

وجود بینهایت جواب برای یک مسئله استکلوف شامل عملگر $p(x)$ -لاپلاسین

آرمین حاجیان؛ دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۶/۱۱/۲۰

دریافت ۹۵/۰۷/۱۱

چکیده

با استفاده از روش‌های تغییراتی و نظریه نقطه بحرانی که روی تابع‌های تعریف شده بر یک فضای باناخ بازتابی اعمال می‌شوند، وجود بینهایت جواب ضعیف برای یک مسئله استکلوف شامل عملگر $p(x)$ -لاپلاسین و وابسته به دو پارامتر اثبات می‌شود. همچنین نتایج مختلف و مثال‌هایی کاربردی برای نتایج به دست آمده ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: عملگر $p(x)$ -لاپلاسین، فضاها ی سوبولوف با نمای متغیر، روش‌های تغییراتی، بینهایت جواب.
رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۵J۲۰، ۳۵J۶۰

مقدمه

هدف از نگارش این مقاله بررسی مسئله استکلوف شامل عملگر $p(x)$ -لاپلاسین
(۱)
$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = a(x)|u|^{p(x)-2}u & \Omega \text{ در}, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u) + \mu g(x, u) & \partial \Omega \text{ روی}, \end{cases}$$
 است، که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ یک دامنه هموار و کراندار است، λ یک پارامتر مثبت و μ یک پارامتر نامنفی است، $f, g: \partial \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را نشان می‌دهد، $p \in C(\bar{\Omega})$ ، $\Delta_{p(x)} u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ ، عملگر $p(x)$ -لاپلاسین را نشان می‌دهد، توابع کاراتئودوری هستند (تعریف ۵)، $a \in L^\infty(\Omega)$ یک تابع حقیقی با شرط $\operatorname{ess\,inf}_\Omega a \geq 0$ و $a \in L^1(\Omega)$ و ν نرمال واحد برونسو بر $\partial \Omega$ است.

بررسی معادلات دیفرانسیل و مسائل تغییراتی با شرایط رشد غیراستاندارد از نوع $p(x)$ یک موضوع جدید و جالب است که از نظریه کششی غیرخطی، مایعات الکترو-رئولوژیکی، و غیره ناشی می‌شود، [1]، [2]. بسیاری از نتایج روی این نوع از مسائل به دست آمده است. به عنوان مثال به [3]-[14] اشاره می‌کنیم.

در [6] نویسندگان با به کار بردن اصل تغییراتی ریچری ([15]، قضیه ۲، ۵)، تحت یک رفتار نوسانی مناسب از تابع غیرخطی و فرضیات مناسب روی نمای متغیر، وجود بینهایت جواب ضعیف را برای مسئله

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + a(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x, u) & \Omega \text{ در}, \\ u = 0 & \partial \Omega \text{ روی}, \end{cases}$$

*نویسنده مسئول a.hadjian@ub.ac.ir

ثابت کرده‌اند، که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ یک مجموعه باز کراندار ناتهی با مرز هموار $\partial\Omega$ است، $p \in C(\bar{\Omega})$ به طوری که $N < p^- := \inf_{x \in \Omega} p(x)$ ، $a \in L^\infty(\Omega)$ با شرط $\text{ess inf}_\Omega a \geq 0$ و $\lambda > 0$ و $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری بدون نیاز به شرایط تقارنی و یا تغییر علامتی روی f است. هم‌چنین نویسندگان در [8]، با استفاده از [16] قضیه ۱، ۲، برای هر λ در یک بازه معین و μ به اندازه کافی کوچک، وجود بینهایت جواب ضعیف را برای مسئله

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + \alpha(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x, u) & \Omega \text{ در}, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu g(\gamma(u)) & \partial\Omega \text{ روی}, \end{cases}$$

ثابت کرده‌اند، که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ یک دامنه باز و کراندار با مرز هموار است، λ یک پارامتر مثبت و μ یک پارامتر نامنفی است، $p \in C(\bar{\Omega})$ به طوری که $N < p^- := \inf_{x \in \Omega} p(x)$ ، $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری است، $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی است، $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ با شرط $\text{ess inf}_\Omega \alpha > 0$ و $\alpha \in L^1(\Omega)$ ، ν نرمال واحد برونسو بر $\partial\Omega$ است و $\gamma: W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ عملگر رد است.

مسائل استکلوف ناهمگن شامل p -لاپلاسین موضوع پژوهش در [17] است، که در آن نویسندگان این دسته از مسائل استکلوف ناهمگن در حالت‌های $p(x) \equiv p > 1$ و $p(x) \equiv p = 2$ را بررسی کرده‌اند. هدف این مقاله به دست آوردن شرایط کافی برای تضمین وجود بینهایت جواب ضعیف برای مسئله استکلوف (۱) است. برای این منظور، نیاز داریم که تابع اولیه F از تابع f دارای یک رفتار نوسانی مناسب در بینهایت (برای به دست آوردن جواب‌های بیکران) و یا در صفر (برای پیدا کردن جواب‌های به اندازه دل‌خواه کوچک) باشد، در حالی که تابع اولیه G از تابع g دارای رشد مناسب (قضایای ۱۱ و ۱۸) باشد. روش ما کاملاً تغییراتی است و ابزار اصلی یک قضیه نقطه بحرانی است (لم ۴) که در [18] ثابت شده است؛ هم‌چنین [15] را ملاحظه شود. هم‌چنین خواننده علاقه‌مند را به مقالات [19]، [20] و مراجع موجود در آن‌ها ارجاع می‌دهیم، که در آن‌ها اصل تغییراتی ریچری و نتایج آن با موفقیت برای اثبات وجود بینهایت جواب برای مسائل مقدار مرزی استفاده شده است.

۱. تعاریف و لم‌های اساسی

تعریف ۱ ([۱۸]): فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی و $\Phi, \Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو باشند. قرار می‌دهیم $I := \Phi - \Psi$. گوئیم تابع I برای $r \in \mathbb{R}$ در شرط $(PS)^{[r]}$ صدق می‌کند، هرگاه هر دنباله $\{u_n\}$ به طوری که:

$$(\alpha) \text{ دنباله } \{I(u_n)\} \text{ کراندار باشد،}$$

$$(\beta) \lim_{n \rightarrow \infty} \|I'(u_n)\|_{X^*} = 0$$

$$(\gamma) \text{ برای هر } n \in \mathbb{N} \text{ داشته باشیم } -\infty < \Phi(u_n) < r$$

دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

تعریف ۲: فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی و $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت Φ یک تابع اجباری نامیده می‌شود، هرگاه

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{\|u\|} = +\infty.$$

گزاره ۳ [18] گزاره ۱.۲): فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی باشد، $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر گاتو، نیم-پیوسته ضعیف پایینی دنباله‌ای و اجباری باشد به طوری که مشتق گاتوی آن دارای یک وارون پیوسته روی X^* باشد و $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر گاتو باشد به طوری که مشتق گاتوی آن فشرده باشد. در این صورت تابع $\Phi - \Psi$ برای هر $r \in \mathbb{R}$ در شرط $(PS)^{[r]}$ صدق می‌کند.

برای اثبات نتایج اصلی این مقاله از قضیه ۴،۷ [18] استفاده می‌کنیم که بونانو ثابت کرده است و حالت خاصی از اصل تغییراتی ریچری است ([15] قضیه ۵،۲). برای راحتی خواننده، این قضیه را در لم ۴ بیان می‌کنیم. لم ۴: فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی باشد، $\Phi, \Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع به طور پیوسته مشتق پذیر گاتو باشند به طوری که Φ از پایین کراندار باشد. برای هر $r > \inf_X \Phi$ قرار می‌دهیم:

$$\varphi(r) := \inf_{\Phi(u) < r} \frac{\left(\sup_{\Phi(v) < r} \Psi(v) \right) - \Psi(u)}{r - \Phi(u)},$$

$$\gamma := \liminf_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r), \quad \delta := \liminf_{r \rightarrow (\inf_X \Phi)^+} \varphi(r).$$

در این صورت:

(آ) اگر $\gamma < +\infty$ و برای هر $\lambda \in]0, 1/\gamma[$ تابع $I_\lambda := \Phi - \lambda\Psi$ برای هر $r \in \mathbb{R}$ در شرط $(PS)^{[r]}$ صدق کند، آن‌گاه برای هر $\lambda \in]0, 1/\gamma[$ یکی از این موارد برقرار است:

(a₁) دارای یک کمینه سراسری است، و یا

(a₂) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی کمینه‌های موضعی I_λ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) = +\infty.$$

(ب) اگر $\delta < +\infty$ و برای هر $\lambda \in]0, 1/\delta[$ تابع I_λ برای هر $r > \inf_X \Phi$ در شرط $(PS)^{[r]}$ صدق کند، آن‌گاه برای هر $\lambda \in]0, 1/\delta[$ ، یکی از این موارد برقرار است:

(b₁) یک کمینه سراسری از Φ وجود دارد که یک کمینه موضعی از I_λ است، و یا

(b₂) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی (کمینه‌های موضعی) مجزای I_λ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) = \inf_X \Phi.$$

تعریف ۵ [21]: تابع $h: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع کاراتئودوری می‌نامند، هرگاه تابع $h(x, \xi) \mapsto x$ برای هر $\xi \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر و تابع $h(x, \xi) \mapsto \xi$ برای تقریباً هر $x \in \partial\Omega$ پیوسته باشد.

در این مقاله شرط زیر روی هر تابع کاراتئودوری $h: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ استفاده می‌شود:

(h₀) برای هر $(x, s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ داریم $|h(x, s)| \leq \alpha(x) + b|s|^{\beta(x)-1}$ ، که در آن $\alpha \in L^{\frac{\beta(x)}{\beta(x)-1}}(\partial\Omega)$ ،

$b \geq 0$ یک عدد ثابت است و $\beta \in C(\partial\Omega)$ به طوری که:

$$1 < \beta^- := \inf_{x \in \Omega} \beta(x) \leq \beta(x) \leq \beta^+ := \sup_{x \in \Omega} \beta(x) < p^-.$$

برای هر $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$F(x, t) := \int_0^t f(x, \xi) d\xi, \quad G(x, t) := \int_0^t g(x, \xi) d\xi,$$

و برای هر $\lambda > 0$ و هر $\mu \geq 0$ قرار می‌دهیم:

$$H(x, t) := F(x, t) + \frac{\mu}{\lambda} G(x, t).$$

گزاره ۶ [3] قضیه ۲،۹: فرض کنیم $f, g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابع کاراتئودوری صادق در شرایط (f_0) و (g_0) باشند. برای هر $u \in X$ قرار می‌دهیم $\Psi(u) := \int_{\partial\Omega} H(x, u(x)) d\sigma$. در این صورت $\Psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ و برای هر $v \in X$ داریم:

$$\Psi'(u)(v) = \int_{\partial\Omega} f(x, u(x))v(x) d\sigma + \frac{\mu}{\lambda} \int_{\partial\Omega} g(x, u(x))v(x) d\sigma.$$

به علاوه عملگر $\Psi': X \rightarrow X^*$ فشرده است.

تعریف ۷: تابع $u \in X$ یک جواب ضعیف مسئله (۱) است، هرگاه برای هر $v \in X$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} a(x) |u|^{p(x)-2} uv \, dx \\ = \lambda \int_{\partial\Omega} f(x, u)v \, d\sigma + \mu \int_{\partial\Omega} g(x, u)v \, d\sigma. \end{aligned}$$

تعریف ۸: تابع $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ یک جواب کلاسیک مسئله (۱) است، هرگاه برای هر $x \in \Omega$ معادله

$$\Delta_{p(x)} u = a(x) |u|^{p(x)-2} u$$

برقرار باشد و برای هر $x \in \partial\Omega$ داشته باشیم:

$$|\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, u) + \mu g(x, u).$$

تذکره ۹: به وضوح هر جواب کلاسیک مسئله (۱) یک جواب ضعیف این مسئله است. هرگاه $f, g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابع پیوسته باشند، آن‌گاه طبق نتایج منظم بودن جواب‌ها [21]، هر جواب ضعیف مسئله (۱) یک جواب کلاسیک این مسئله است.

در ادامه این مقاله فرض می‌کنیم $p \in C(\bar{\Omega})$ در این شرط صدق کند:

$$N < p^- := \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ := \sup_{x \in \Omega} p(x) < +\infty. \quad (2)$$

فضای لبگ با نمای متغیر $L^{p(x)}(\Omega)$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$L^{p(x)}(\Omega) := \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty \text{ و } u \text{ اندازه‌پذیر است} \right\}.$$

روی این فضا نرم لوکزامبورگ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

فضای سوبولوف با نمای متغیر $W^{1,p(x)}(\Omega)$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}.$$

روی این فضا این نرم را در نظر می‌گیریم:

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} := |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}.$$

با توجه به رابطه (۲)، در [22] نشان داده شده است که $L^{p(x)}(\Omega)$ و $W^{1,p(x)}(\Omega)$ با نرم‌های متناظر، فضاهای باناخ بازتابی، تفکیک‌پذیر و به‌طور یک‌نواخت محدب هستند.

در حالتی که $a \in L^\infty(\Omega)$ یک تابع حقیقی و $\text{ess inf}_{\Omega} a \geq 0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$L_{a(x)}^{p(x)}(\Omega) := \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} a(x) |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty \text{ و } u \text{ اندازه‌پذیر است} \right\}.$$

روی این فضا نرم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$|u|_{(p(x), a(x))} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} a(x) \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

برای هر $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ تعریف می‌کنیم:

$$\|u\|_a := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\nabla u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} + a(x) \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که $\|u\|_a$ یک نرم روی فضای $W^{1,p(x)}(\Omega)$ و معادل با نرم $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$ است. در ادامه این مقاله همواره از نرم $\|u\|_a$ به جای $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$ روی فضای $X := W^{1,p(x)}(\Omega)$ استفاده می‌کنیم. چنان‌که در [22] و [23] بیان شده است، X به طور پیوسته در فضای $W^{1,p^-}(\Omega)$ نشانده می‌شود. چون $p^- > N$ ، بنابراین $W^{1,p^-}(\Omega)$ به طور فشرده در فضای $C^0(\bar{\Omega})$ نشانده می‌شود. پس X به طور فشرده در فضای $C^0(\bar{\Omega})$ نشانده می‌شود. در نتیجه یک عدد ثابت مثبت $c > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $u \in X$ داریم:

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq c \|u\|_a. \quad (۳)$$

زمانی که Ω محدب باشد، یک کران بالای صریح برای c در نامساوی فوق بدین صورت است:

$$c \leq 2^{\frac{p^- - 1}{p^-}} \max \left\{ \left(\frac{1}{\|a\|_1} \right)^{\frac{1}{p^-}}, \frac{d}{N^{\frac{1}{p^-}}} \left(\frac{p^- - 1}{p^- - N} m(\Omega) \right)^{\frac{p^- - 1}{p^-}} \frac{\|a\|_{\infty}}{\|a\|_1} \right\} (1 + m(\Omega)),$$

که در آن $d := \text{diam}(\Omega)$ و $m(\Omega)$ اندازه لبگ Ω است (برای جزئیات گزاره [24] ۳،۴ ملاحظه شود)، $\|a\|_{\infty} := \sup_{x \in \Omega} a(x)$ و $\|a\|_1 := \int_{\Omega} a(x) dx < \infty$.

لم ۱۰ (گزاره ۲،۲ در [7]): فرض کنیم $\Phi(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla u|^{p(x)} + a(x)|u|^{p(x)}) dx$. در این صورت برای هر $u \in X$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{(j) اگر } \|u\|_a < 1 \text{، آن گاه } \frac{1}{p^+} \|u\|_a^{p^+} \leq \Phi(u) \leq \frac{1}{p^-} \|u\|_a^{p^-} \\ \text{(jj) اگر } \|u\|_a > 1 \text{، آن گاه } \frac{1}{p^+} \|u\|_a^{p^+} \leq \Phi(u) \leq \frac{1}{p^-} \|u\|_a^{p^-} \end{aligned}$$

خواننده علاقه‌مند را برای بررسی خواص اساسی فضاها لبگ و سوبولوف با نمای متغیر به [22]، [25] ارجاع می‌دهیم.

نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی این مقاله بیان می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} A &:= \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi} F(x, t) d\sigma}{\xi^{p^-}}, & B &:= \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} F(x, \xi) d\sigma}{\xi^{p^+}}, \\ \lambda_1 &:= \frac{\|a\|_1}{p^- B}, & \lambda_2 &:= \frac{1}{p^+ c^{p^-} A}, \end{aligned}$$

که در آن c در رابطه (۳) داده شده است.

قضیه ۱۱: فرض کنیم $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کارانتودوری باشد که در شرط (f_0) صدق می‌کند. فرض کنیم:

$$A < \frac{p^-}{p^+ c^{p^-} \|a\|_1} B \quad (A1)$$

در این صورت برای هر $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ و هر تابع کارانتودوری دل‌خواه $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ صادق در شرط (g_0) که تابع اولیه آن $G(x, t) := \int_0^t g(x, \xi) d\xi$ برای هر $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$g_\infty := \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi} G(x,t) d\sigma}{\xi^{p^-}} < +\infty, \tag{۴}$$

اگر قرار دهیم:

$$\mu_{g,\lambda} := \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_\infty} (1 - \lambda p^+ c^{p^-} A),$$

که در آن $\mu_{g,\lambda} = +\infty$ هرگاه $g_\infty = 0$ ، مسئله (۱) دارای یک دنبالهٔ بیکران از جواب‌های ضعیف برای هر $\mu \in [0, \mu_{g,\lambda}[$ در X است.

اثبات: هدف ما استفاده از لم (a)۴ برای مسئله (۱) است. برای این منظور، $[\lambda_1, \lambda_2[$ را ثابت می‌گیریم و فرض کنیم g در شرایط قضیه صدق کند. چون $\bar{\lambda} < \lambda_2$ ، بنابراین داریم:

$$\mu_{g,\bar{\lambda}} = \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_\infty} (1 - \bar{\lambda} p^+ c^{p^-} A) > 0.$$

حال $\bar{\mu} \in]0, \mu_{g,\bar{\lambda}}[$ را ثابت می‌گیریم و برای هر $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$H(x, t) := F(x, t) + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} G(x, t).$$

برای هر $u \in X$ ، تابع‌های $\Phi, \Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla u|^{p(x)} + a(x)|u|^{p(x)}) dx, \quad \Psi(u) := \int_{\partial\Omega} H(x, u(x)) d\sigma,$$

و قرار می‌دهیم:

$$I_{\bar{\lambda}}(u) := \Phi(u) - \bar{\lambda} \Psi(u), \quad u \in X.$$

در این صورت نقاط بحرانی تابع $I_{\bar{\lambda}}$ دقیقاً جواب‌های ضعیف مسئله (۱) هستند.

تابع Φ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو است و مشتق گاتوی آن در نقطه $u \in X$ تابع $\Phi'(u) \in X^*$ است و برای هر $v \in X$ با این دستور مشخص می‌شود:

$$\Phi'(u)(v) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v + a(x)|u|^{p(x)-2} uv) dx.$$

چون Φ یک تابع پیوسته و محدب است، طبق گزارهٔ ۲۰، ۲۵ از [26]، Φ نیم‌پیوسته ضعیف پایینی دنباله‌ای است. همچنین مشتق Φ دارای وارون پیوسته است (طبق قضیه A.۲۶ (d) از [26]). تابع Φ اجباری است، زیرا طبق لم ۱۰ و این که $p^- > N \geq 1$ داریم:

$$\lim_{\|u\|_a \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{\|u\|_a} \geq \frac{1}{p^+} \lim_{\|u\|_a \rightarrow +\infty} \|u\|_a^{p^- - 1} = +\infty.$$

از طرف دیگر، طبق گزارهٔ ۶، تابع Ψ خوش‌تعریف، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو و با مشتق فشرده است. همچنین مشتق گاتوی Ψ' برای هر $u, v \in X$ با این دستور مشخص می‌شود:

$$\Psi'(u)(v) = \int_{\partial\Omega} f(x, u(x)) v(x) d\sigma + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} \int_{\partial\Omega} g(x, u(x)) v(x) d\sigma.$$

بنابراین طبق گزارهٔ ۳، تابع $I_{\bar{\lambda}}$ برای هر $r \in \mathbb{R}$ در شرط (PS)^[r] صدق می‌کند.

ابتدا نشان می‌دهیم $\bar{\lambda} < 1/\gamma$. بنابراین فرض کنیم $\{\xi_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty:$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi_n} F(x, t) d\sigma}{\xi_n^{p^-}} = A.$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $r_n := \frac{1}{p^+} \left(\frac{\xi_n}{c}\right)^{p^-}$. با توجه به لم ۱۰، برای هر $v \in X$ با شرط $\Phi(v) < r_n$ داریم:

$$\|v\|_a \leq \max \left\{ (p^+ r_n)^{\frac{1}{p^+}}, (p^+ r_n)^{\frac{1}{p^-}} \right\} = \frac{\xi_n}{c}.$$

پس با توجه به نشان‌دهی $X \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ (رابطه (۳)) داریم:

$$\max_{x \in \Omega} |v(x)| \leq c \|v\|_a \leq \xi_n.$$

می‌دانیم که $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi(r_n) &= \inf_{\Phi(u) < r_n} \frac{\left(\sup_{\Phi(v) < r_n} \Psi(v) \right) - \Psi(u)}{r_n - \Phi(u)} \\ &\leq \frac{\sup_{\Phi(v) < r_n} \Psi(v)}{r_n} \leq \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi_n} H(x, t) d\sigma}{\frac{1}{p^+} \left(\frac{\xi_n}{c}\right)^{p^-}} \\ &= p^+ c^{p^-} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi_n} \left[F(x, t) + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} G(x, t) \right] d\sigma}{\xi_n^{p^-}} \\ &\leq p^+ c^{p^-} \left[\frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi_n} F(x, t) d\sigma}{\xi_n^{p^-}} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi_n} G(x, t) d\sigma}{\xi_n^{p^-}} \right]. \end{aligned}$$

بعلاوه، از فرض (A1) داریم $A < +\infty$. بنابراین:

$$\gamma \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(r_n) \leq p^+ c^{p^-} \left(A + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} g_\infty \right) < +\infty.$$

فرض $\bar{\mu} \in]0, \mu_{g, \bar{\lambda}}[$ ایجاب می‌کند که:

$$\gamma \leq p^+ c^{p^-} \left(A + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} g_\infty \right) < p^+ c^{p^-} A + \frac{1 - \bar{\lambda} p^+ c^{p^-} A}{\bar{\lambda}}.$$

بنابراین:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{p^+ c^{p^-} A + (1 - \bar{\lambda} p^+ c^{p^-} A) / \bar{\lambda}} < \frac{1}{\gamma}.$$

حال فرض کنیم $\bar{\lambda}$ ثابت باشد. ادعا می‌کنیم که تابع $I_{\bar{\lambda}}$ از پایین بیکران است. چون $\frac{1}{\bar{\lambda}} < \frac{p^- B}{\|a\|_1}$ ، پس یک دنباله $\{\eta_n\}$ از اعداد مثبت و $\tau > 0$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = +\infty$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} < \tau < \frac{p^- \int_{\partial\Omega} F(x, \eta_n) d\sigma}{\|a\|_1 \eta_n^{p^+}}. \tag{۵}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع w_n را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$w_n(x) := \eta_n, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ثابت، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $w_n \in X$ و داریم:

$$\Phi(w_n) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} a(x) \eta_n^{p(x)} dx \leq \frac{\eta_n^{p^+}}{p^-} \|a\|_1. \tag{۶}$$

از طرف دیگر، چون G نامنفی است، از تعریف Ψ نتیجه می‌شود:

$$\Psi(w_n) = \int_{\partial\Omega} [F(x, w_n(x)) + \frac{\mu}{\lambda} G(x, w_n(x))] d\sigma \geq \int_{\partial\Omega} F(x, \eta_n) d\sigma. \quad (7)$$

طبق نامساوی‌های (۵)، (۶) و (۷)، برای هر $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$I_{\bar{\lambda}}(w_n) \leq \frac{\eta_n^{p^+}}{p^-} \|a\|_1 - \bar{\lambda} \int_{\partial\Omega} F(x, \eta_n) d\sigma < \frac{\eta_n^{p^+}}{p^-} \|a\|_1 (1 - \bar{\lambda}\tau).$$

چون $\bar{\lambda}\tau > 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = +\infty$ ، پس داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\bar{\lambda}}(w_n) = -\infty$. بنابراین تابع $I_{\bar{\lambda}}$ از پایین بیکران است. پس $I_{\bar{\lambda}}$ هیچ کمینه سراسری ندارد و طبق لم (a)۴، دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی $I_{\bar{\lambda}}$ وجود دارد که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_a = +\infty,$$

و حکم ثابت می‌شود.

تذکره ۱۲: تحت شرایط $A = 0$ و $B = +\infty$ ، از قضیه ۱۱ نتیجه می‌شود که برای هر $\lambda > 0$ و هر $\mu \in \left[0, \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_\infty}\right]$ مسئله (۱) دارای دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف بیکران در X می‌باشد. به علاوه اگر $g_\infty = 0$ ، این نتیجه برای هر $\lambda > 0$ و هر $\mu \geq 0$ برقرار است.

مثال ۱۳: قرار می‌دهیم $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 3\}$. مسئله (۸) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \Delta_{p(x,y)} u = e^{x^2+y^2} |u|^{p(x,y)-2} u & \Omega \text{ در}, \\ |\nabla u|^{p(x,y)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, y, u) + \mu g(x, y, u) & \partial\Omega \text{ روی}, \end{cases} \quad (8)$$

که در آن برای هر $(x, y) \in \Omega$ داریم $p(x, y) := x^2 + y^2 + 3$. همچنین قرار می‌دهیم:

$$f(x, y, t) := \begin{cases} f^*(x, y) t^6 (7 + \sin(\ln(|t|)) - 7 \cos(\ln(|t|))) & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times (\mathbb{R} - \{0\}), \\ 0 & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

که در آن $f^*: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی است و برای هر $(x, y) \in \partial\Omega$ و $t \in \mathbb{R}$ ،

$$g(x, y, t) := e^{x+y-t^+} (t^+)^{\gamma-1} (\gamma - t^+),$$

که در آن $t^+ := \max\{t, 0\}$ و γ یک عدد حقیقی مثبت است.

به‌وضوح $p^- = 3$ و $p^+ = 6$. با محاسبه‌ای مستقیم به‌دست می‌آید:

$$F(x, y, t) = \begin{cases} f^*(x, y) t^7 (1 - \cos(\ln(|t|))) & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times (\mathbb{R} - \{0\}), \\ 0 & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

بنابراین:

$$\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi} F(x, y, t) d\sigma}{\xi^3} = 0, \quad \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} F(x, y, \xi) d\sigma}{\xi^6} = +\infty.$$

از طرف دیگر:

$$g_\infty = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x^2+y^2=3} \max_{|t| \leq \xi} (e^{x+y-t^+} (t^+)^{\gamma-1} e^{-t^+}) d\sigma}{\xi^3} = \left(\int_{x^2+y^2=3} e^{x+y} d\sigma \right) \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\xi} \xi^\gamma}{\xi^3} = 0.$$

طبق قضیه ۱۱، برای هر $[\lambda, \mu] \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ مسئله (۸) دارای یک دنباله بیکران از جواب‌های ضعیف در $W^{1,p(x)}(\Omega)$ است.

نتیجه ۱۴: فرض کنیم $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کار/اتنودوری باشد که در شرط (f_0) صدق می‌کند. فرض کنیم:

$$A < \frac{1}{p^+ c^{p^-}}, \quad B > \frac{\|a\|_1}{p^-}.$$

در این صورت برای هر تابع کاراتئودوری دل خواه $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ صادق در شرایط قضیه ۱۱، مسئله (۱) با $\lambda = 1$ دارای یک دنباله بیکران از جواب های ضعیف برای هر $\mu \in [0, \mu_{g,1}[$ در X است.

نتیجه ۱۵: فرض کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی باشد. برای هر $\xi \in \mathbb{R}$ قرار می دهیم $F(\xi) := \int_0^\xi f(t) dt$ و فرض کنیم:

$$\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{p^-}} = 0, \quad \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}} = +\infty.$$

در این صورت برای هر تابع پیوسته نامنفی $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که در شرط زیر صدق می کند:

$$g_\infty^* := \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \left(\int_0^\xi g(x,t) dt \right) d\sigma}{\xi^{p^-}} < +\infty,$$

و برای هر $\mu \in \left[0, \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_\infty^*}\right]$ مسئله

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2} u & \Omega \text{ در}, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = f(u) + \mu g(x, u) & \partial\Omega \text{ روی}, \end{cases}$$

دارای بینهایت جواب ضعیف مجزا است.

نتیجه ۱۶: فرض کنیم $\Omega =]0,1[$ و $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. برای هر $t \in \mathbb{R}$ قرار می دهیم $F(t) := \int_0^t f(\xi) d\xi$ و فرض کنیم:

$$\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\max_{|t| \leq \xi} F(t)}{\xi^{p^-}} < \frac{p^-}{p^+ + 2(2^{p^-} - 1)} \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}}.$$

در این صورت برای هر

$$\lambda \in \left[\frac{1}{p^- \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}}}, \frac{1}{p^+ + 2(2^{p^-} - 1) \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\max_{|t| \leq \xi} F(t)}{\xi^{p^-}}} \right],$$

مسئله

$$\begin{cases} \left(|u|^{p(x)-2} u' \right)' = |u|^{p(x)-2} u &]0,1[\text{ در}, \\ |u'(0)|^{p(x)-2} = -\lambda f(u(0)), \\ |u'(1)|^{p(x)-2} = \lambda f(u(1)), \end{cases}$$

دارای یک دنباله بیکران از جواب های کلاسیک در $W^{1,p(x)}(]0,1[)$ است.

مثال ۱۷: برای هر $x \in [0,1]$ قرار می دهیم $p(x) \equiv p > 1$ به طوری که $2^{2p-1} < \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ (برای مثال $p = 1.5$). هم چنین فرض کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد که برای هر $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ به صورت $f(t) := \frac{2}{p} t^{p-1} \cos^2\left(\frac{p}{2} \ln(|t|)\right)$ تعریف می شود و $f(0) = 0$. برای هر $t \in \mathbb{R}$ قرار می دهیم $F(t) := \int_0^t f(\xi) d\xi$ با محاسباتی ساده خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\max_{|t| \leq \xi} F(t)}{\xi^{p^-}} &= \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^p \left(1 + \frac{\sin(p \ln(|\xi|)) + \cos(p \ln(|\xi|))}{2} \right)}{\xi^p} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2p^2}, \\ \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}} &= \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^p \left(1 + \frac{\sin(p \ln(|\xi|)) + \cos(p \ln(|\xi|))}{2} \right)}{\xi^p} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2p^2}. \end{aligned}$$

$$\text{با توجه به نتیجه ۱۶، برای هر } \lambda \in \left] \frac{2p}{2+\sqrt{2}}, \frac{p}{2^{2p-2}(2-\sqrt{2})} \right[\text{ مسئله}$$

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' = |u|^{p-2}u & \text{در }]0,1[\\ |u'(0)|^{p-2} = -\lambda f(u(0)), \\ |u'(1)|^{p-2} = \lambda f(u(1)), \end{cases}$$

دارای دنباله‌ای بیکران از جواب‌های کلاسیک در $W^{1,p}(]0,1[)$ است.

حال قرار می‌دهیم:

$$A' := \liminf_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi} F(x,t) d\sigma}{\xi^{p^-}}, \quad B' := \limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\partial\Omega} F(x,\xi) d\sigma}{\xi^{p^+}},$$

$$\lambda_3 := \frac{\|a\|_1}{p^- B'}, \quad \lambda_4 := \frac{1}{p^+ c^{p^-} A'}.$$

با استفاده از لم ۴(b) و اثباتی مشابه برهان قضیه ۱۱، حکم زیر را به دست می‌آوریم. لازم به ذکر است که طبق لم ۴(b)، دنباله $\{u_n\}$ از جواب‌های ضعیف مسئله (۱) در این شرط صدق می‌کند:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) = \inf_X \Phi = 0,$$

و طبق لم ۱۰ داریم: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_a = 0$ ، یعنی دنباله $\{u_n\}$ به طور قوی به صفر در X همگراست.

قضیه ۱۸: فرض کنیم $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری باشد که در شرط (f_0) صدق می‌کند. فرض کنیم:

$$A' < \frac{p^-}{p^+ c^{p^-} \|a\|_1} B'. \quad (A2)$$

در این صورت برای هر $\lambda \in]\lambda_3, \lambda_4[$ و هر تابع کاراتئودوری دلخواه $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ صادق در شرط (g_0) که تابع اولیه آن $G(x,t) := \int_0^t g(x,\xi) d\xi$ برای هر $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی است که در این شرط صدق می‌کند:

$$g_0 := \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t| \leq \xi} G(x,t) d\sigma}{\xi^{p^-}} < +\infty,$$

اگر قرار دهیم:

$$\mu'_{g,\lambda} := \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_0} (1 - \lambda p^+ c^{p^-} A'),$$

که در آن $\mu'_{g,\lambda} = +\infty$ هرگاه $g_0 = 0$ ، برای هر $\mu \in [0, \mu'_{g,\lambda}[$ مسئله (۱) دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف است که به طور قوی به صفر در X همگراست.

تشکر و قدردانی

از داوران مقاله، که با نظرات ارزشمند خود بر غنای علمی مقاله افزودند، تشکر و قدردانی می‌کنیم.

منابع

1. Růžička M., "Electro-rheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory", Lecture Notes in Math., vol. 1784, Springer-Verlag, Berlin (2000).
2. Zhikov V. V., "Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory", Math. USSR. Izv., 29 (1987) 33-66.

3. Allaoui M., El Amrouss A. R., Ourraoui A., "Existence and multiplicity of solutions for a Steklov problem involving the $p(x)$ -Laplace operator", Electron. J. Differential Equations, 132 (2012) 1-12.
4. Bonanno G., Chinnì A., "Discontinuous elliptic problems involving the $p(x)$ -Laplacian", Math. Nachr., 284 (2011) 639-652.
5. Bonanno G., Chinnì A., "Multiple solutions for elliptic problems involving the $p(x)$ -Laplacian", Matematiche (Catania), 66 (2011) 105-113.
6. Bonanno G., Chinnì A., "Existence results of infinitely many solutions for $p(x)$ -Laplacian elliptic Dirichlet problems", Complex Var. Elliptic Equ., 57 (2012) 1233-1246.
7. Cammaroto F., Chinnì A., Di Bella B., "Multiple solutions for a Neumann problem involving the $p(x)$ -Laplacian", Nonlinear Anal., 71 (2009) 4486-4492.
8. D'Agù G., Sciammetta A., "Infinitely many solutions to elliptic problems with variable exponent and nonhomogeneous Neumann conditions", Nonlinear Anal., 75 (2012) 5612-5619.
9. Dai G., "Infinitely many non-negative solutions for a Dirichlet problem involving $p(x)$ -Laplacian", Nonlinear Anal., 71 (2009) 5840-5849.
10. Fan X.L., Deng S.-G., "Remarks on Ricceri's variational principle and applications to the $p(x)$ -Laplacian equations", Nonlinear Anal., 67 (2007) 3064-3075.
11. Fan X.L., Han X., "Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$ -Laplacian equations in \mathbb{R}^N ", Nonlinear Anal., 59 (2004) 173-188.
12. Fan X.L., Zhang Q.H., "Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem", Nonlinear Anal., 52 (2003) 1843-1852.
13. Harjulehto P., Hästö P., Latvala V., "Minimizers of the variable exponent, non-uniformly convex Dirichlet energy", J. Math. Pures Appl., 89 (2008) 174-197.
14. Ji C., "Remarks on the existence of three solutions for the $p(x)$ -Laplacian equations", Nonlinear Anal., 74 (2011) 2908-2915.
15. Ricceri B., "A general variational principle and some of its applications", J. Comput. Appl. Math., 113 (2000) 401-410.
16. Bonanno G., Molica Bisci G., "Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities", Bound. Value Probl., 2009 (2009) 1-20.
17. Mavinga N., Nkashama M.N., "Steklov spectrum and nonresonance for elliptic equations with nonlinear boundary conditions", Electron. J. Differential Equations, Conf., 19 (2010) pp. 197-205.
18. Bonanno G., "A critical point theorem via the Ekeland variational principle", Nonlinear Anal., 75 (2012) 2992-3007.

19. Bonanno G., Candito P., "Infinitely many solutions for a class of discrete non-linear boundary value problems", *Appl. Anal.*, 88 (2009) 605-616.
20. Bonanno G., Di Bella B., "Infinitely many solutions for a fourth-order elastic beam equation", *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 18 (2011) 357-368.
21. Drábek P., Milota J., "Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations", in: *Birkhäuser Advanced Texts*, Birkhäuser, Basel, (2007).
22. Fan X. L., Zhao D., "On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ ", *J. Math. Anal. Appl.*, 263 (2001) 424-446.
23. Kováčik O., Rákosník J., "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ ", *Czechoslovak Math. J.*, 41 (1991) 592-618.
24. Anello G., Cordaro G., "An existence theorem for the Neumann problem involving the p -Laplacian", *J. Convex Anal.*, 10 (2003) 185-198.
25. Fan X. L., Shen J.S., Zhao D., "Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ", *J. Math. Anal. Appl.*, 262 (2001) 749-760.
26. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and its Applications", Berlin-Heidelberg-New York, 1985.