(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

وجود بینهایت جواب برای یک مسئلهٔ استکلوف شامل عملگر $p(x)$-لاپلاسین

آرمین حاجیان؛ دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۵/۰۷/۱۱ پذیرش ۹۶/۱۱/۲۰

چکیده

با استفاده از روش‌های تغییراتی و نظریهٔ نقطهٔ بحرانی که روی تابعک‌های تعریف شده بر یک فضای باناخ بازتابی اعمال می‌شوند، وجود بینهایت جواب ضعیف برای یک مسئله استکلوف شامل عملگر $p(x)$-لاپلاسین و وابسته به دو پارامتر اثبات می‌شود. هم‌چنین نتایج مختلف و مثال‌هایی کاربردی برای نتایج به‌دست آمده ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: عملگر $p(x)$-لاپلاسین، فضاهای سوبولوف با نمای متغیر، روش‌های تغییراتی، بینهایت جواب.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۵J۶۰، ۳۵J۲۰.

مقدمه

هدف از نگارش این مقاله بررسی مسئله استکلوف شامل عملگر $p(x)$-لاپلاسین

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)}u = a(x)|u|^{p(x)-2}u & \text{در } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) & \text{روی } \partial\Omega, \end{cases} \tag{۱}$$

است، که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ یک دامنه هموار و کراندار است، λ یک پارامتر مثبت و μ یک پارامتر نامنفی است، $p \in C(\overline{\Omega})$ ، $\Delta_{p(x)}u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ عملگر $p(x)$-لاپلاسین را نشان می‌دهد، $f, g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابع کاراتئودوری هستند (تعریف ۵)، $a \in L^\infty(\Omega)$ یک تابع حقیقی با شرط $\operatorname{ess\,inf}_\Omega a \geq 0$ و $a \in L^1(\Omega)$ و ν نرمال واحد برونسو بر $\partial\Omega$ است.

بررسی معادلات دیفرانسیل و مسائل تغییراتی با شرایط رشد غیراستاندارد از نوع $p(x)$ یک موضوع جدید و جالب است که از نظریهٔ کششی غیرخطی، مایعات الکترو-رئولوژیکی، و غیره ناشی می‌شود، [1]، [2]. بسیاری از نتایج روی این نوع از مسائل به دست آمده است. به‌عنوان مثال به [3]-[14] اشاره می‌کنیم.

در [6] نویسندگان با به‌کار بردن اصل تغییراتی ریچری ([15]، قضیه ۵٫۲)، تحت یک رفتار نوسانی مناسب از تابع غیرخطی و فرضیات مناسب روی نمای متغیر، وجود بینهایت جواب ضعیف را برای مسئله

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + a(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x,u) & \text{در } \Omega, \\ u = 0 & \text{روی } \partial\Omega, \end{cases}$$

*نویسنده مسئول a.hadjian@ub.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.1.8]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.173]

ثابت کرده‌اند، که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ یک مجموعهٔ باز کراندار ناتهی با مرز هموار $\partial\Omega$ است، $p \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ به‌طوری‌که $N < p^- := \inf_{x\in\Omega} p(x)$، $a \in L^\infty(\Omega)$ با شرط $\operatorname{ess\,inf}_\Omega a \geq 0$، $\lambda > 0$ و $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری بدون نیاز به شرایط تقارنی و یا تغییر علامتی روی f است.

هم‌چنین نویسندگان در [8]، با استفاده از [16] قضیهٔ ۱٫۲، برای هر λ در یک بازهٔ معین و μ به اندازهٔ کافی کوچک، وجود بینهایت جواب ضعیف را برای مسئله

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + \alpha(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x,u) & \text{در } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu g(\gamma(u)) & \text{روی } \partial\Omega, \end{cases}$$

ثابت کرده‌اند، که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ یک دامنهٔ باز و کراندار با مرز هموار است، λ یک پارامتر مثبت و μ یک پارامتر نامنفی است، $p \in C(\overline{\Omega})$ به‌طوری‌که $N < p^- := \inf_{x\in\Omega} p(x)$ ، $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری است، $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی است، $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ با شرط $\operatorname{ess\,inf}_\Omega \alpha > 0$ و $\alpha \in L^1(\Omega)$ ، ν نرمال واحد برونسو بر $\partial\Omega$ است و $\gamma: W^{1,p(x)}(\Omega) \to L^{p(x)}(\Omega)$ عملگر رد است.

مسائل استکلوف ناهمگن شامل p-لاپلاسین موضوع پژوهش در [17] است، که در آن نویسندگان این دسته از مسائل استکلوف ناهمگن در حالت‌های $p(x) \equiv p = 2$ و $p(x) \equiv p > 1$ را بررسی کرده‌اند.

هدف این مقاله به‌دست آوردن شرایط کافی برای تضمین وجود بینهایت جواب ضعیف برای مسئلهٔ استکلوف (۱) است. برای این منظور، نیاز داریم که تابع اولیه F از تابع f دارای یک رفتار نوسانی مناسب در بینهایت (برای به‌دست آوردن جواب‌های بیکران) و یا در صفر (برای پیدا کردن جواب‌های به‌اندازه دل‌خواه کوچک) باشد، در حالی که تابع اولیهٔ G از تابع g دارای رشد مناسب (قضایای ۱۱ و ۱۸) باشد. روش ما کاملاً تغییراتی است و ابزار اصلی یک قضیه نقطهٔ بحرانی است (لم ۴) که در [18] ثابت شده است؛ هم‌چنین [15] را ملاحظه شود.

هم‌چنین خواننده علاقه‌مند را به مقالات [19]، [20] و مراجع موجود در آن‌ها ارجاع می‌دهیم، که در آن‌ها اصل تغییراتی ریچری و نتایج آن با موفقیت برای اثبات وجود بینهایت جواب برای مسائل مقدار مرزی استفاده شده است.

۱. تعاریف و لم‌های اساسی

تعریف ۱ ([۱۸]): فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی و $\Phi, \Psi: X \to \mathbb{R}$ دو تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو باشند. قرار می‌دهیم $I := \Phi - \Psi$. گوئیم تابعک I برای $r \in \mathbb{R}$ در شرط $(\mathrm{PS})^{[r]}$ صدق می‌کند، هرگاه هر دنبالهٔ $\{u_n\}$ به‌طوری‌که:

(α) دنبالهٔ $\{I(u_n)\}$ کراندار باشد،

(β) $\lim_{n\to\infty}\|I'(u_n)\|_{X^*} = 0$ ،

(γ) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $-\infty < \Phi(u_n) < r$ ،

دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

تعریف ۲: فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی و $\Phi: X \to \mathbb{R}$ یک تابعک باشد. در این صورت Φ یک تابعک اجباری نامیده می‌شود، هرگاه

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\Phi(u)}{\|u\|} = +\infty.$$

گزارهٔ ۳ ([18] **گزارهٔ ۲.۱**): *فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی باشد، $\Phi: X \to \mathbb{R}$ یک تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو، نیم‌پیوسته ضعیف پایینی دنباله‌ای و اجباری باشد به‌طوری‌که مشتق گاتوی آن دارای یک وارون پیوسته روی X^* باشد و $\Psi: X \to \mathbb{R}$ یک تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو باشد به‌طوری‌که مشتق گاتوی آن فشرده باشد. در این صورت تابعک $\Phi - \Psi$ برای هر $r \in \mathbb{R}$ در شرط $(\mathrm{PS})^{[r]}$ صدق می‌کند.*

برای اثبات نتایج اصلی این مقاله از قضیهٔ ۴،۷ در [18] استفاده می‌کنیم که بونانو ثابت کرده است و حالت خاصی از اصل تغییراتی ریچری است ([15] قضیهٔ ۵،۲). برای راحتی خواننده، این قضیه را در لم ۴ بیان می‌کنیم.

لم ۴: *فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی باشد، $\Phi, \Psi: X \to \mathbb{R}$ دو تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو باشند به‌طوری‌که Φ از پایین کراندار باشد. برای هر $r > \inf_X \Phi$ قرار می‌دهیم:*

$$\varphi(r) := \inf_{\Phi(u)<r} \frac{\left(\sup\limits_{\Phi(v)<r} \Psi(v)\right) - \Psi(u)}{r - \Phi(u)},$$
$$\gamma := \liminf_{r\to+\infty} \varphi(r), \qquad \delta := \liminf_{r\to(\inf_X \Phi)^+} \varphi(r).$$

در این صورت:

آ) اگر $\gamma < +\infty$ و برای هر $\lambda \in]0,1/\gamma[$ تابعک $I_\lambda := \Phi - \lambda\Psi$ برای هر $r \in \mathbb{R}$ در شرط $(\mathrm{PS})^{[r]}$ صدق کند، آن‌گاه برای هر $\lambda \in]0,1/\gamma[$ یکی ازاین موارد برقرار است:

(a_1) I_λ دارای یک کمینه سراسری است، و یا

(a_2) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی کمینه‌های موضعی) I_λ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = +\infty.$$

ب) اگر $\delta < +\infty$ و برای هر $\lambda \in]0,1/\delta[$ تابعک I_λ برای هر $r > \inf_X \Phi$ در شرط $(\mathrm{PS})^{[r]}$ صدق کند، آن‌گاه برای هر $\lambda \in]0,1/\delta[$، یکی از این موارد برقرار است:

(b_1) یک کمینهٔ سراسری از Φ وجود دارد که یک کمینهٔ موضعی از I_λ است، و یا

(b_2) یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی (کمینه‌های موضعی) مجزای I_λ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = \inf_X \Phi.$$

تعریف ۵ [21]: تابع $h: \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را یک تابع کاراتئودوری می‌نامند، هرگاه تابع $x \mapsto h(x,\xi)$ برای هر $\xi \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر و تابع $\xi \mapsto h(x,\xi)$ برای تقریباً هر $x \in \partial\Omega$ پیوسته باشد.

در این مقاله شرط زیر روی هر تابع کاراتئودوری $h: \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ استفاده می‌شود:

(h_0) برای هر $(x,s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ داریم $|h(x,s)| \le \alpha(x) + b|s|^{\beta(x)-1}$ ، که در آن $\alpha \in L^{\frac{\beta(x)}{\beta(x)-1}}(\partial\Omega)$ ، $b \ge 0$ یک عدد ثابت است و $\beta \in C(\partial\Omega)$ به‌طوری‌که:

$$1 < \beta^- := \inf_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x) \le \beta(x) \le \beta^+ := \sup_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x) < p^-.$$

برای هر $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$F(x,t) := \int_0^t f(x,\xi)d\xi, \qquad G(x,t) := \int_0^t g(x,\xi)d\xi,$$

و برای هر $\lambda > 0$ و هر $\mu \ge 0$ قرار می‌دهیم:

$$H(x,t) := F(x,t) + \frac{\mu}{\lambda} G(x,t).$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.1.8]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.173]

گزارهٔ ۶ (**[3] قضیه ۹،۲**): *فرض کنیم* $f,g:\partial\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *توابع کاراتئودوری صادق در شرایط* (f_0) *و* (g_0) *باشند. برای هر* $u\in X$ *قرار می‌دهیم* $\Psi(u):=\int_{\partial\Omega}H(x,u(x))d\sigma$ *. در این صورت* $\Psi\in \mathrm{C}^1(X,\mathbb{R})$ *و برای هر* $v\in X$ *داریم:*

$$\Psi'(u)(v)=\int_{\partial\Omega}f\big(x,u(x)\big)v(x)d\sigma+\frac{\mu}{\lambda}\int_{\partial\Omega}g\big(x,u(x)\big)v(x)d\sigma.$$

به‌علاوه عملگر $\Psi':X\to X^*$ *فشرده است.*

تعریف ۷: تابع $u\in X$ یک جواب ضعیف مسئله (۱) است، هرگاه برای هر $v\in X$ داشته باشیم:

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v\,dx+\int_\Omega a(x)|u|^{p(x)-2}uv\,dx$$
$$=\lambda\int_{\partial\Omega}f(x,u)v\,d\sigma+\mu\int_{\partial\Omega}g(x,u)v\,d\sigma.$$

تعریف ۸: تابع $u\in \mathrm{C}^2(\Omega)\cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ یک جواب کلاسیک مسئله (۱) است، هرگاه برای هر $x\in\Omega$ معادلهٔ

$$\Delta_{p(x)}u=a(x)|u|^{p(x)-2}u$$

برقرار باشد و برای هر $x\in\partial\Omega$ داشته باشیم:

$$|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial\nu}=\lambda f(x,u)+\mu g(x,u).$$

تذکر ۹: به‌وضوح هر جواب کلاسیک مسئله (۱) یک جواب ضعیف این مسئله است. هرگاه $f,g:\partial\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابع پیوسته باشند، آن‌گاه طبق نتایج منظم بودن جواب‌ها [21]، هر جواب ضعیف مسئله (۱) یک جواب کلاسیک این مسئله است.

در ادامه این مقاله فرض می‌کنیم $p\in C(\overline{\Omega})$ در این شرط صدق کند:

$$N<p^-:=\inf_{x\in\Omega}p(x)\le p(x)\le p^+:=\sup_{x\in\Omega}p(x)<+\infty. \quad (۲)$$

فضای لبگ با نمای متغیر $L^{p(x)}(\Omega)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$L^{p(x)}(\Omega):=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}:\ u\ \text{اندازه‌پذیر است و}\ \int_\Omega|u(x)|^{p(x)}dx<+\infty\right\}.$$

روی این فضا نرم لوکزامبورگ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}=|u|_{p(x)}:=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Omega\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}dx\le1\right\}.$$

فضای سوبولوف با نمای متغیر $W^{1,p(x)}(\Omega)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$W^{1,p(x)}(\Omega):=\left\{u\in L^{p(x)}(\Omega):|\nabla u|\in L^{p(x)}(\Omega)\right\}.$$

روی این فضا این نرم را در نظر می‌گیریم:

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}:=|u|_{p(x)}+|\nabla u|_{p(x)}.$$

با توجه به رابطهٔ (۲)، در [22] نشان داده شده است که $L^{p(x)}(\Omega)$ و $W^{1,p(x)}(\Omega)$ با نرم‌های متناظر، فضاهای باناخ بازتابی، تفکیک‌پذیر و به‌طور یک‌نواخت محدب هستند.

در حالتی که $a\in L^\infty(\Omega)$ یک تابع حقیقی و $\operatorname{ess\,inf}_\Omega a\ge0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega):=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}:\ u\ \text{اندازه‌پذیر است و}\ \int_\Omega a(x)|u(x)|^{p(x)}dx<+\infty\right\}.$$

روی این فضا نرم زیر را در نظر می‌گیریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.1.8]

[DOI: 10.29252/mmr.4.2.173]

$$|u|_{(p(x),a(x))} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega a(x)\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}.$$

برای هر $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ تعریف می‌کنیم:

$$\| u \|_a := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left(\left|\frac{\nabla u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} + a(x)\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}\right) dx \le 1\right\}.$$

به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که $\| u \|_a$ یک نرم روی فضای $W^{1,p(x)}(\Omega)$ و معادل با نرم $\| u \|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$ است. در ادامه این مقاله همواره از نرم $\| u \|_a$ به‌جای $\| u \|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$ روی فضای $X := W^{1,p(x)}(\Omega)$ استفاده می‌کنیم. چنان‌که در [22] و [23] بیان شده است، X به‌طور پیوسته در فضای $W^{1,p^-}(\Omega)$ نشانده می‌شود. چون $p^- > N$ ، بنابراین $W^{1,p^-}(\Omega)$ به‌طور فشرده در فضای $C^0(\overline{\Omega})$ نشانده می‌شود. پس X به‌طور فشرده در فضای $C^0(\overline{\Omega})$ نشانده می‌شود. در نتیجه یک عدد ثابت مثبت $c > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $u \in X$ داریم:

$$\| u \|_{C^0(\overline{\Omega})} \le c \| u \|_a. \tag{۳}$$

زمانی که Ω محدب باشد، یک کران بالای صریح برای c در نامساوی فوق بدین‌صورت است:

$$c \le 2^{\frac{p^- - 1}{p^-}} \max\left\{\left(\frac{1}{\| a \|_1}\right)^{\frac{1}{p^-}}, \frac{d}{N^{\frac{1}{p^-}}}\left(\frac{p^- - 1}{p^- - N} m(\Omega)\right)^{\frac{p^- - 1}{p^-}} \frac{\| a \|_\infty}{\| a \|_1}\right\}(1 + m(\Omega)),$$

که در آن $d := \operatorname{diam}(\Omega)$ و $m(\Omega)$ اندازهٔ لبگ Ω است (برای جزئیات گزاره ۳,۴ [24] ملاحظه شود)، $\| a \|_1 := \int_\Omega a(x)dx < \infty$ و $\| a \|_\infty := \sup_{x\in\Omega} a(x)$.

لم ۱۰ (گزارهٔ ۲,۲ در [7]): *فرض کنیم* $\Phi(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + a(x)|u|^{p(x)})dx$. *در این صورت برای هر* $u \in X$ *داریم:*

(j) *اگر* $\| u \|_a < 1$ *، آن‌گاه* $\frac{1}{p^+}\| u \|_a^{p^+} \le \Phi(u) \le \frac{1}{p^-}\| u \|_a^{p^-}$ ؛

(jj) *اگر* $\| u \|_a > 1$ *، آن‌گاه* $\frac{1}{p^+}\| u \|_a^{p^-} \le \Phi(u) \le \frac{1}{p^-}\| u \|_a^{p^+}$.

خواننده علاقه‌مند را برای بررسی خواص اساسی فضاهای لبگ و سوبولوف با نمای متغیر به [22]،[25] ارجاع می‌دهیم.

نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی این مقاله بیان می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$A := \liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t|\le\xi} F(x,t)d\sigma}{\xi^{p^-}}, \qquad B := \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} F(x,\xi)d\sigma}{\xi^{p^+}},$$

$$\lambda_1 := \frac{\| a \|_1}{p^- B}, \qquad \lambda_2 := \frac{1}{p^+ c^{p^-} A},$$

که در آن c در رابطهٔ (۳) داده شده است.

قضیه ۱۱: *فرض کنیم* $f : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *یک تابع کاراتئودوری باشد که در شرط* (f_0) *صدق می‌کند. فرض کنیم:*

(A1) $A < \frac{p^-}{p^+ c^{p^-} \|a\|_1} B$.

در این صورت برای هر $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ *و هر تابع کاراتئودوری دل‌خواه* $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *صادق در شرط* (g_0) *که تابع اولیه آن* $G(x,t) := \int_0^t g(x,\xi)d\xi$ *برای هر* $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ *یک تابع نامنفی است که در شرط زیر صدق می‌کند:*

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.1.8]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.173]

$$g_\infty := \lim_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t|\le\xi} G(x,t)d\sigma}{\xi^{p^-}} < +\infty, \tag{۴}$$

اگر قرار دهیم:

$$\mu_{g,\lambda} := \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_\infty}(1-\lambda p^+ c^{p^-} A),$$

که در آن $\mu_{g,\lambda} = +\infty$ *هرگاه* $g_\infty = 0$*، مسئله (۱) دارای یک دنبالهٔ بیکران از جواب‌های ضعیف برای هر* $\mu \in [0,\mu_{g,\lambda}[$ *در* X *است.*

اثبات: هدف ما استفاده از لم ۴(a) برای مسئله (۱) است. برای این منظور، $\overline{\lambda} \in]\lambda_1,\lambda_2[$ را ثابت می‌گیریم و فرض کنیم g در شرایط قضیه صدق کند. چون $\overline{\lambda} < \lambda_2$ ، بنابراین داریم:

$$\mu_{g,\overline{\lambda}} = \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_\infty}\left(1-\overline{\lambda} p^+ c^{p^-} A\right) > 0.$$

حال $\overline{\mu} \in]0,\mu_{g,\overline{\lambda}}[$ را ثابت می‌گیریم و برای هر $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$H(x,t) := F(x,t) + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} G(x,t).$$

برای هر $u \in X$ ، تابعک‌های $\Phi,\Psi: X \to \mathbb{R}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + a(x)|u|^{p(x)}\right)dx, \qquad \Psi(u) := \int_{\partial\Omega} H(x,u(x))d\sigma,$$

و قرار می‌دهیم:

$$I_{\overline{\lambda}}(u) := \Phi(u) - \overline{\lambda}\Psi(u), \qquad u \in X.$$

در این صورت نقاط بحرانی تابعک $I_{\overline{\lambda}}$ دقیقاً جواب‌های ضعیف مسئله (۱) هستند.

تابعک Φ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو است و مشتق گاتوی آن در نقطه $u \in X$ تابعک $\Phi'(u) \in X^*$ است و برای هر $v \in X$ با این دستور مشخص می‌شود:

$$\Phi'(u)(v) = \int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + a(x)|u|^{p(x)-2}uv)dx.$$

چون Φ یک تابعک پیوسته و محدب است، طبق گزارهٔ ۲۰,۲۵ از [26]، Φ نیم‌پیوسته ضعیف پایینی دنباله‌ای است. هم‌چنین مشتق Φ دارای وارون پیوسته است (طبق قضیه A.۲۶ (d) از [26]). تابعک Φ اجباری است، زیرا طبق لم ۱۰ و این که $p^- > N \ge 1$ داریم:

$$\lim_{\|u\|_a\to+\infty} \frac{\Phi(u)}{\|u\|_a} \ge \frac{1}{p^+} \lim_{\|u\|_a\to+\infty} \|u\|_a^{p^- -1} = +\infty.$$

از طرف دیگر، طبق گزارهٔ ۶، تابعک Ψ خوش‌تعریف، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو و با مشتق فشرده است. هم‌چنین مشتق گاتوی Ψ' برای هر $u,v \in X$ با این دستور مشخص می‌شود:

$$\Psi'(u)(v) = \int_{\partial\Omega} f\left(x,u(x)\right)v(x)d\sigma + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}\int_{\partial\Omega} g\left(x,u(x)\right)v(x)d\sigma.$$

بنابراین طبق گزارهٔ ۳، تابعک $I_{\overline{\lambda}}$ برای هر $r \in \mathbb{R}$ در شرط $(\mathrm{PS})^{[r]}$ صدق می‌کند.

ابتدا نشان می‌دهیم $\overline{\lambda} < 1/\gamma$ بنابراین فرض کنیم $\{\xi_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to+\infty}\xi_n = +\infty:$$

و

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.1.8]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.173]

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_{\partial\Omega}\max_{|t|\le\xi_n}F(x,t)d\sigma}{\xi_n^{p^-}}=A.$$

برای هر $n\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $r_n:=\frac{1}{p^+}\left(\frac{\xi_n}{c}\right)^{p^-}$. با توجه به لم ۱۰، برای هر $v\in X$ با شرط $\Phi(v)<r_n$ داریم:

$$\| v \|_a\le \max\left\{(p^+r_n)^{\frac{1}{p^+}},(p^+r_n)^{\frac{1}{p^-}}\right\}=\frac{\xi_n}{c}.$$

پس با توجه به نشان‌دهی $X\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ (رابطهٔ (۳)) داریم:

$$\max_{x\in\Omega}|v(x)|\le c\,\| v \|_a\le \xi_n.$$

می‌دانیم که $\Phi(0)=\Psi(0)=0$. بنابراین برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$\begin{aligned}\varphi(r_n)&=\inf_{\Phi(u)<r_n}\frac{\left(\sup_{\Phi(v)<r_n}\Psi(v)\right)-\Psi(u)}{r_n-\Phi(u)}\\&\le\frac{\sup_{\Phi(v)<r_n}\Psi(v)}{r_n}\le\frac{\int_{\partial\Omega}\max_{|t|\le\xi_n}H(x,t)d\sigma}{\frac{1}{p^+}\left(\frac{\xi_n}{c}\right)^{p^-}}\\&=p^+c^{p^-}\frac{\int_{\partial\Omega}\max_{|t|\le\xi_n}\left[F(x,t)+\frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}G(x,t)\right]d\sigma}{\xi_n^{p^-}}\\&\le p^+c^{p^-}\left[\frac{\int_{\partial\Omega}\max_{|t|\le\xi_n}F(x,t)d\sigma}{\xi_n^{p^-}}+\frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}\frac{\int_{\partial\Omega}\max_{|t|\le\xi_n}G(x,t)d\sigma}{\xi_n^{p^-}}\right].\end{aligned}$$

به‌علاوه، از فرض (A1) داریم $A<+\infty$. بنابراین:

$$\gamma\le\liminf_{n\to+\infty}\varphi(r_n)\le p^+c^{p^-}\left(A+\frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}g_\infty\right)<+\infty.$$

فرض $\overline{\mu}\in]0,\mu_{g,\overline{\lambda}}[$ ایجاب می‌کند که:

$$\gamma\le p^+c^{p^-}\left(A+\frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}g_\infty\right)<p^+c^{p^-}A+\frac{1-\overline{\lambda}p^+c^{p^-}A}{\overline{\lambda}}.$$

بنابراین:

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{p^+c^{p^-}A+(1-\overline{\lambda}p^+c^{p^-}A)/\overline{\lambda}}<\frac{1}{\gamma}.$$

حال فرض کنیم $\overline{\lambda}$ ثابت باشد. ادعا می‌کنیم که تابعک $I_{\overline{\lambda}}$ از پایین بیکران است. چون $\frac{1}{\overline{\lambda}}<\frac{p^-B}{\|a\|_1}$، پس یک دنبالهٔ $\{\eta_n\}$ از اعداد مثبت و $\tau>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to+\infty}\eta_n=+\infty$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$ بهٔاندازهٔ کافی بزرگ داریم:

$$\frac{1}{\overline{\lambda}}<\tau<\frac{p^-}{\|a\|_1}\frac{\int_{\partial\Omega}F(x,\eta_n)d\sigma}{\eta_n^{p^+}}.\tag{۵}$$

برای هر $n\in\mathbb{N}$ تابع w_n را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$w_n(x):=\eta_n,\qquad x\in\overline{\Omega}.$$

در این صورت برای هر $n\in\mathbb{N}$ ثابت، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $w_n\in X$ و داریم:

$$\Phi(w_n)=\int_\Omega\frac{1}{p(x)}a(x)\eta_n^{p(x)}dx\le\frac{\eta_n^{p^+}}{p^-}\| a \|_1.\tag{۶}$$

از طرف دیگر، چون G نامنفی است، از تعریف Ψ نتیجه می‌شود:

$$\Psi(w_n) = \int_{\partial\Omega} [F(x, w_n(x)) + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} G(x, w_n(x))] d\sigma \geq \int_{\partial\Omega} F(x, \eta_n) d\sigma. \tag{۷}$$

طبق نامساوی‌های (۵) ، (۶) و (۷) ، برای هر $n \in \mathbb{N}$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ داریم:

$$I_{\overline{\lambda}}(w_n) \leq \frac{\eta_n^{p^+}}{p^-} \| a \|_1 - \overline{\lambda} \int_{\partial\Omega} F(x, \eta_n) d\sigma < \frac{\eta_n^{p^+}}{p^-} \| a \|_1 \left(1 - \overline{\lambda}\tau\right).$$

چون $\overline{\lambda}\tau > 1$ و $\lim_{n\to+\infty} \eta_n = +\infty$ ، پس داریم $\lim_{n\to+\infty} I_{\overline{\lambda}}(w_n) = -\infty$. بنابراین تابعک $I_{\overline{\lambda}}$ از پایین بیکران است. پس $I_{\overline{\lambda}}$ هیچ کمینهٔ سراسری ندارد و طبق لم ۴(a)، دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی $I_{\overline{\lambda}}$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to+\infty} \| u_n \|_a = +\infty,$$

و حکم ثابت می‌شود.

تذکر ۱۲: تحت شرایط $A = 0$ و $B = +\infty$، از قضیهٔ ۱۱ نتیجه می‌شود که برای هر $\lambda > 0$ و هر $\mu \in \left[0, \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_\infty}\right[$ مسئله (۱) دارای دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف بیکران در X می‌باشد. به علاوه اگر $g_\infty = 0$ ، این نتیجه برای هر $\lambda > 0$ و هر $\mu \geq 0$ برقرار است.

مثال ۱۳. قرار می‌دهیم $\Omega \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 3\}$. مسئلهٔ (۸) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \Delta_{p(x,y)} u = e^{x^2+y^2} |u|^{p(x,y)-2} u & \text{در } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x,y)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x, y, u) + \mu g(x, y, u) & \text{روی } \partial\Omega, \end{cases} \tag{۸}$$

که در آن برای هر $(x, y) \in \Omega$ داریم $p(x, y) \coloneqq x^2 + y^2 + 3$. هم‌چنین قرار می‌دهیم:

$$f(x, y, t) \coloneqq \begin{cases} f^*(x, y) t^6 (7 + \sin(\ln(|t|)) - 7\cos(\ln(|t|))) & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times (\mathbb{R} - \{0\}), \\ 0 & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

که در آن $f^*: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی است و برای هر $(x, y) \in \partial\Omega$ و $t \in \mathbb{R}$ ،

$$g(x, y, t) \coloneqq e^{x+y-t^+} (t^+)^{\gamma-1} (\gamma - t^+),$$

که در آن $t^+ \coloneqq \max\{t, 0\}$ و γ یک عدد حقیقی مثبت است.

به‌وضوح $p^- = 3$ و $p^+ = 6$. با محاسبه‌ای مستقیم به‌دست می‌آید:

$$F(x, y, t) = \begin{cases} f^*(x, y) t^7 \left(1 - \cos\left(\ln(|t|)\right)\right) & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times (\mathbb{R} - \{0\}), \\ 0 & \text{اگر } (x, y, t) \in \partial\Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

بنابراین:

$$\liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t|\leq\xi} F(x, y, t) d\sigma}{\xi^3} = 0, \qquad \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\partial\Omega} F(x, y, \xi) d\sigma}{\xi^6} = +\infty.$$

از طرف دیگر:

$$g_\infty = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{x^2+y^2=3} \max_{|t|\leq\xi} \left(e^{x+y-t^+} (t^+)^\gamma e^{-t^+}\right) d\sigma}{\xi^3} = \left(\int_{x^2+y^2=3} e^{x+y} d\sigma\right) \lim_{\xi\to+\infty} \frac{e^{-\xi} \xi^\gamma}{\xi^3} = 0.$$

طبق قضیهٔ ۱۱، برای هر $(\lambda, \mu) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ مسئلهٔ (۸) دارای یک دنبالهٔ بیکران از جواب‌های ضعیف در $W^{1,p(x)}(\Omega)$ است.

نتیجه ۱۴: *فرض کنیم $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری باشد که در شرط (f_0) صدق می‌کند. فرض کنیم:*

$$A < \frac{1}{p^+ c^{p^-}}, \qquad B > \frac{\| a \|_1}{p^-}.$$

در این صورت برای هر تابع کاراتئودوری دل‌خواه $g:\partial\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ صادق در شرایط قضیهٔ ۱۱، مسئله (۱) با $\lambda=1$ دارای یک دنباله بیکران از جواب‌های ضعیف برای هر $\mu\in[0,\mu_{g,1}[$ در Xاست.

نتیجهٔ ۱۵: *فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی باشد. برای هر $\xi\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $F(\xi):=\int_0^\xi f(t)dt$ و فرض کنیم:*

$$\liminf_{\xi\to+\infty}\frac{F(\xi)}{\xi^{p^-}}=0,\qquad \limsup_{\xi\to+\infty}\frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}}=+\infty.$$

در این صورت برای هر تابع پیوسته نامنفی $g:\partial\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$g_\infty^*:=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^\xi g(x,t)dt\right)d\sigma}{\xi^{p^-}}<+\infty,$$

و برای هر $\mu\in\left[0,\frac{1}{p^+c^{p^-}g_\infty^*}\right[$، مسئله

$$\begin{cases}\Delta_{p(x)}u=|u|^{p(x)-2}u & \text{در }\Omega,\\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=f(u)+\mu g(x,u) & \text{روی }\partial\Omega,\end{cases}$$

دارای بینهایت جواب ضعیف مجزاست.

نتیجهٔ ۱۶: *فرض کنیم $\Omega=]0,1[$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. برای هر $t\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $F(t):=\int_0^t f(\xi)d\xi$ و فرض کنیم:*

$$\liminf_{\xi\to+\infty}\frac{\max_{|t|\le\xi}F(t)}{\xi^{p^-}}<\frac{p^-}{p^+2^{(2p^--1)}}\limsup_{\xi\to+\infty}\frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}}.$$

در این صورت برای هر

$$\lambda\in\left]\frac{1}{p^-\limsup_{\xi\to+\infty}\frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}}},\frac{1}{p^+2^{(2p^--1)}\liminf_{\xi\to+\infty}\frac{\max_{|t|\le\xi}F(t)}{\xi^{p^-}}}\right[,$$

مسئلهٔ

$$\begin{cases}\left(|u'|^{p(x)-2}u'\right)'=|u|^{p(x)-2}u & \text{در }]0,1[,\\ |u'(0)|^{p(x)-2}=-\lambda f(u(0)),\\ |u'(1)|^{p(x)-2}=\lambda f\big(u(1)\big),\end{cases}$$

دارای یک دنباله بیکران از جواب‌های کلاسیک در $W^{1,p(x)}(]0,1[)$ است.

مثال ۱۷: برای هر $x\in[0,1]$ قرار می‌دهیم $p(x)\equiv p>1$ به‌طوری‌که $2^{2p-1}<\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ (برای مثال $p=1.5$). هم‌چنین فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد که برای هر $t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ به صورت $f(t):=\frac{2}{p}t^{p-1}\cos^2(\frac{p}{2}\ln(|t|))$ تعریف می‌شود و $f(0)=0$. برای هر $t\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $F(t):=\int_0^t f(\xi)d\xi$. با محاسباتی ساده خواهیم داشت:

$$\liminf_{\xi\to+\infty}\frac{\max_{|t|\le\xi}F(t)}{\xi^{p^-}}=\liminf_{\xi\to+\infty}\frac{\frac{\xi^p}{p^2}\left(1+\frac{\sin(p\ln(|\xi|))+\cos(p\ln(|\xi|))}{2}\right)}{\xi^p}=\frac{2-\sqrt{2}}{2p^2},$$

$$\limsup_{\xi\to+\infty}\frac{F(\xi)}{\xi^{p^+}}=\limsup_{\xi\to+\infty}\frac{\frac{\xi^p}{p^2}\left(1+\frac{\sin(p\ln(|\xi|))+\cos(p\ln(|\xi|))}{2}\right)}{\xi^p}=\frac{2+\sqrt{2}}{2p^2}.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.1.8]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.173]

با توجه به نتیجهٔ ۱۶، برای هر $\lambda \in \left]\frac{2p}{2+\sqrt{2}}, \frac{p}{2^{2p-2}(2-\sqrt{2})}\right[$ مسئلهٔ

$$\begin{cases}(|u'|^{p-2}u')' = |u|^{p-2}u & \text{در }]0,1[\,,\\ |u'(0)|^{p-2} = -\lambda f(u(0)), \\ |u'(1)|^{p-2} = \lambda f(u(1)),\end{cases}$$

دارای دنباله‌ای بیکران از جواب‌های کلاسیک در $W^{1,p}(]0,1[)$ است.

حال قرار می‌دهیم:

$$A' \coloneqq \liminf_{\xi\to 0^+} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t|\le\xi} F(x,t)d\sigma}{\xi^{p^-}}, \qquad B' \coloneqq \limsup_{\xi\to 0^+} \frac{\int_{\partial\Omega} F(x,\xi)d\sigma}{\xi^{p^+}},$$

$$\lambda_3 \coloneqq \frac{\| a \|_1}{p^- B'}, \qquad \lambda_4 \coloneqq \frac{1}{p^+ c^{p^-} A'}.$$

با استفاده از لم ۴(b) و اثباتی مشابه برهان قضیهٔ ۱۱، حکم زیر را به‌دست می‌آوریم. لازم به ذکر است که طبق لم ۴(b)، دنباله $\{u_n\}$ از جواب‌های ضعیف مسئلهٔ (۱) در این شرط صدق می‌کند:

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = \inf_X \Phi = 0,$$

و طبق لم ۱۰ داریم: $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_a = 0$ ، یعنی دنباله $\{u_n\}$ *به‌طور قوی به صفر در X همگراست.*

قضیه ۱۸: *فرض کنیم $f: \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری باشد که در شرط (f_0) صدق می‌کند. فرض کنیم:*

$$A' < \frac{p^-}{p^+ c^{p^-} \|a\|_1} B'. \qquad \text{(A2)}$$

در این صورت برای هر $\lambda \in]\lambda_3, \lambda_4[$ و هر تابع کاراتئودوری دل‌خواه $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ صادق در شرط (g_0) که تابع اولیه آن $G(x,t) \coloneqq \int_0^t g(x,\xi)d\xi$ برای هر $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی است که در این شرط صدق می‌کند:

$$g_0 \coloneqq \lim_{\xi\to 0^+} \frac{\int_{\partial\Omega} \max_{|t|\le\xi} G(x,t)d\sigma}{\xi^{p^-}} < +\infty,$$

اگر قرار دهیم:

$$\mu'_{g,\lambda} \coloneqq \frac{1}{p^+ c^{p^-} g_0}(1 - \lambda p^+ c^{p^-} A'),$$

که در آن $\mu'_{g,\lambda} = +\infty$ هرگاه $g_0 = 0$ ، برای هر $\mu \in [0, \mu'_{g,\lambda}[$ مسئلهٔ (۱) دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف است که به‌طور قوی به صفر در X همگراست.

تشکر و قدردانی

از داوران مقاله، که با نظرات ارزشمند خود بر غنای علمی مقاله افزودند، تشکر و قدردانی می‌کنیم.

منابع

1. Růžička M., "Electro-rheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory", Lecture Notes in Math., vol. 1784, Springer-Verlag, Berlin (2000).
2. Zhikov V. V., "Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory", Math. USSR. Izv., 29 (1987) 33-66.

3. Allaoui M., El Amrouss A. R., Ourraoui A., "Existence and multiplicity of solutions for a Steklov problem involving the $p(x)$-*Laplace* operator", Electron. J. Differential Equations, 132 (2012) 1-12.

4. Bonanno G., Chinnì A., "Discontinuous elliptic problems involving the $p(x)$-*Laplacian*", Math. Nachr., 284 (2011) 639-652.

5. Bonanno G., Chinnì A., "Multiple solutions for elliptic problems involving the $p(x)$-*Laplacian*", Matematiche (Catania), 66 (2011) 105-113.

6. Bonanno G., Chinnì A., "Existence results of infinitely many solutions for p(x)-Laplacian elliptic Dirichlet problems", Complex Var. Elliptic Equ., 57 (2012) 1233-1246.

7. Cammaroto F., Chinnì A., Di Bella B., "Multiple solutions for a Neumann problem involving the $p(x)$-*Laplacian*", Nonlinear Anal., 71 (2009) 4486-4492.

8. D'Aguì G., Sciammetta A., "Infinitely many solutions to elliptic problems with variable exponent and nonhomogeneous Neumann conditions", Nonlinear Anal., 75 (2012) 5612-5619.

9. Dai G., "Infinitely many non-negative solutions for a Dirichlet problem involving $p(x)$-*Laplacian*", Nonlinear Anal., 71 (2009) 5840-5849.

10. Fan X.L., Deng S.-G., "Remarks on Ricceri's variational principle and applications to the p(x)-Laplacian equations", Nonlinear Anal., 67 (2007) 3064-3075.

11. Fan X.L., Han X., "Existence and multiplicity of solutions for p(x)-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$", Nonlinear Anal., 59 (2004) 173-188.

12. Fan X.L., Zhang Q.H., "Existence of solutions for $p(x)$-*Laplacian* Dirichlet problem", Nonlinear Anal., 52 (2003) 1843-1852.

13. Harjulehto P., Hästö P., Latvala V., "Minimizers of the variable exponent, non-uniformly convex Dirichlet energy", J. Math. Pures Appl., 89 (2008) 174-197.

14. Ji C., "Remarks on the existence of three solutions for the p(x)-Laplacian equations", Nonlinear Anal., 74 (2011) 2908-2915.

15. Ricceri B., "A general variational principle and some of its applications", J. Comput. Appl. Math., 113 (2000) 401-410.

16. Bonanno G., Molica Bisci G., "Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities", Bound. Value Probl., 2009 (2009) 1-20.

17. Mavinga N., Nkashama M.N., "Steklov spectrum and nonresonance for elliptic equations with nonlinear boundary conditions", Electron. J. Differential Equations, Conf., 19 (2010) pp. 197-205.

18. Bonanno G., "A critical point theorem via the Ekeland variational principle", Nonlinear Anal., 75 (2012) 2992-3007.

19. Bonanno G., Candito P., "Infinitely many solutions for a class of discrete non-linear boundary value problems", Appl. Anal., 88 (2009) 605-616.

20. Bonanno G., Di Bella B., "Infinitely many solutions for a fourth-order elastic beam equation", NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 18 (2011) 357-368.

21. Drábek P., Milota J., "Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations", in: Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Basel, (2007).

22. Fan X. L., Zhao D., "On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$", J. Math. Anal. Appl., 263 (2001) 424-446.

23. Kováčik O., Rákosník J., "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$", Czechoslovak Math. J., 41 (1991) 592-618.

24. Anello G., Cordaro G., "An existence theorem for the Neumann problem involving the *p-Laplacian*", J. Convex Anal., 10 (2003) 185-198.

25. Fan X. L., Shen J.S., Zhao D., "Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$", J. Math. Anal. Appl., 262 (2001) 749-760.

26. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and its Applications", Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.1.8]

[DOI: 10.29252/mmr.4.2.173]