

یک توپولوژی موضعاً محذب روی جبرهای بورلینگ

سعید مقصودی؛ دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۴/۰۶

دریافت ۹۵/۰۸/۰۴

چکیده

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده، ω یک تابع وزن و $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ فضای توابع اندازه‌پذیر روی G باشد که اساساً کراندار و در بینهایت صفر می‌شوند. در این مقاله توپولوژی موضعاً محذب $\beta^1(G, \omega)$ را روی فضای وزندار $L^1(G, \omega)$ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که دوگان $L^1(G, \omega)$ با این توپولوژی برابر فضای باناخ $(L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega}), \|\cdot\|_{\infty, \omega})$ است. علاوه بر این، برخی ویژگی‌های فضای $L^1(G, \omega)$ با توپولوژی مذکور را بررسی می‌کنیم. **واژه‌های کلیدی:** گروه موضعاً فشرده، توپولوژی موضعاً محذب، فضای لبگ وزندار، دوگان.

مقدمه

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و λ اندازه هر چپ ثابتی روی آن باشد. هم‌چنین فرض کنید ω یک تابع وزن روی G باشد؛ یعنی یک تابع اندازه‌پذیر بولر مانند $\omega: G \rightarrow (0, \infty)$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم $\omega(xy) \leq \omega(x)\omega(y)$. مجموعه همه توابع اندازه‌پذیر φ روی G را که $\varphi \in L^1(G, \omega)$ با نشان می‌دهیم. در این صورت $L^1(G, \omega)$ با عمل پیچش $*$ و نرم $\|\cdot\|_{1, \omega}$ که به‌صورت $\|\varphi\|_{1, \omega} = \|\varphi\omega\|_1$ تعریف می‌شود تشکیل جبر باناخی موسوم به جبر بورلینگ می‌دهد. توپولوژی تولید شده با نرم $\|\cdot\|_{1, \omega}$ را با $n(G, \omega)$ نشان می‌دهیم. این فضا به‌دلیل وجود تابع وزن و بروز رفتارهای متفاوت با حالت بدون وزن، مورد توجه آنالیزدان‌ها است. جزئیات بیشتر در این باره را می‌توان در [۵]، [۱۱] دید. آنالیز هارمونیک‌دان‌های ایران به‌ویژه دکتر مدقالچی و دکتر رجالی درباره این جبر پژوهش‌هایی انجام داده‌اند.

فضای همه توابع اندازه‌پذیر f که $f/\omega \in L^\infty(G)$ را با $L^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ نشان می‌دهیم. در این صورت $L^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ با عمل ضرب \cdot_ω با تعریف $f \cdot_\omega g = fg/\omega$ و نرم $\|f\|_{\infty, \omega} = \|f\omega\|_\infty$ و عمل مزدوج مختلط به‌عنوان برگشت تشکیل یک C^* -جبر جابه‌جایی می‌دهد. به‌علاوه، $L^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ دوگان $L^1(G, \omega)$ است. در واقع، نگاشت

$$T: L^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right) \rightarrow L^1(G, \omega)^*, \quad \langle T(f), \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x) d\lambda(x)$$

به‌ازای $f \in L^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ و $\varphi \in L^1(G, \omega)$ یک‌ریختی طولپا است.

مجموعه همه توابع g در $L^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ را که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ مجموعه فشرده K چنان موجود باشد که

$$\|g\chi_{G \setminus K}\|_{\infty, \omega} < \epsilon$$

با $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ نشان می‌دهیم. پژوهشی درباره این فضا در حالت بدون وزن در [۳] و [۶] انجام شده است.

در این مقاله توپولوژی موضعاً محذب $\beta^1(G, \omega)$ را روی فضای $L^1(G, \omega)$ تعریف می‌کنیم. این توپولوژی دارای این خاصیت جالب است که دوگان $L^1(G, \omega)$ تحت آن با $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ یکی می‌شود. این نتایج برخی نتایج عرضه

شده در [۱۵] را تعمیم می‌دهد. به‌علاوه نشان می‌دهیم که $\beta^1(G, \omega)$ نرم‌پذیر است اگر و تنها اگر G فشرده باشد. پژوهش‌های مشابهی برای فضاهای دیگر در [۷]، [۸] و [۱۰] انجام شده است. برخی کاربردهای نتایج این مقاله در [۹] آمده است. همچنین به‌جا است که از مقالات [۱۲]–[۱۴] نام ببریم که از بدیع‌ترین و ارزنده‌ترین پژوهش‌های اخیر در مورد توپولوژی اکید است که پس از مقالات صاحب این قلم در مورد فضاهای اندازه و توابع اندازه‌پذیر انجام شده است. در [۴] هم تعمیم سراسری از برخی نتایج [۱۰] عرضه شده است.

ویژگی‌های $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$

مجموعه همه دنباله‌های صعودی از زیرمجموعه‌های فشرده G را با \mathcal{C} و دنباله‌های صعودی از اعداد مثبت و اگر با بینهایت را با \mathcal{R} نشان می‌دهیم. برای $(C_n) \in \mathcal{C}$ و $(r_n) \in \mathcal{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$U((C_n), (r_n)) = \{\varphi \in L^1(G, \omega) : \|\varphi\|_{1, \omega} < r_n, \forall n \geq 1\}$$

و توجه داریم که مجموعه‌ای محدب متعادل و جاذب در فضای $L^1(G, \omega)$ است. به‌راحتی می‌بینیم که مجموعه \mathcal{U} متشکل از همه $U((C_n), (r_n))$ ها که $(C_n) \in \mathcal{C}$ و $(r_n) \in \mathcal{R}$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی موضعاً محدب می‌دهد. این توپولوژی را با $\beta^1(G, \omega)$ نشان می‌دهیم و آن را توپولوژی اکید می‌نامیم؛ دلیل این نام‌گذاری در [۷] آمده است.

کار را با گزاره ۱ شروع می‌کنیم.

گزاره ۱. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت مجموعه‌های کراندار نسبت به توپولوژی $n(G, \omega)$ و توپولوژی $\beta^1(G, \omega)$ یک‌سانند.

برهان. فرض کنید B مجموعه‌ای $\beta^1(G, \omega)$ کراندار باشد و فرض بگیرید این مجموعه نسبت به توپولوژی نرم $n(G, \omega)$ کراندار نباشد. پس دنباله $(\varphi_n) \subseteq B$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $\|\varphi_n\|_{1, \omega} > n$. حال برای هر عدد طبیعی می‌توانیم مجموعه فشرده K_n را چنان بیابیم که $\|\varphi_n \chi_{K_n}\|_{1, \omega} > n$. اکنون اگر تعریف کنیم $C_n = \bigcup_{i=1}^n K_i$ در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $\|\varphi_n \chi_{C_n}\|_{1, \omega} > n$ و $(C_n) \in \mathcal{C}$. فرض کنید $(r_n) \in \mathcal{R}$ دنباله صعودی به‌طوری باشد که $r_n^2 \geq n$ چون B مجموعه‌ای $\beta^1(G, \omega)$ کراندار است پس عدد ثابتی مثل $s > 0$ موجود است به‌گونه‌ای که $B \subseteq s U((C_n), (r_n))$. از این‌رو، به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $n \leq \| \varphi_n \chi_{C_n} \|_{1, \omega} < s r_n$ که تناقض است. عکس حکم بدیهی است.

توپولوژی قوی روی $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))^*$ را با $\tau_B(G, \omega)$ نشان می‌دهیم؛ این توپولوژی برابر توپولوژی

همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های کراندار نسبت به توپولوژی ضعیف

$$\sigma(L^1(G, \omega), (L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))^*)$$

است. همچنین توپولوژی القایی حاصل از توپولوژی نرمی فضای $(L^1(G, \omega), n(G, \omega))^*$ روی $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))^*$ را با $\tau_n(G, \omega)$ نشان می‌دهیم. این توپولوژی به‌وسیله این نرم القا می‌شود:

$$\|f\| = \sup\{|f(\varphi)| : \varphi \in L^1(G, \omega), \|\varphi\|_{1, \omega} = 1\}$$

که در آن $f \in (L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))^*$

به آسانی از گزاره ۱ درمی‌یابیم که توپولوژی‌های $\tau_n(G, \omega)$ و $\tau_b(G, \omega)$ روی $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ معادل‌اند.

یادآوری می‌کنیم که $L^1(G, \omega)$ و $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ تحت نگاشت دوخطی زیر در دوگانگی قرار دارند

$$\langle \varphi, g \rangle = \int g(x)\varphi(x) d\lambda(x)$$

توپولوژی ضعیف $\sigma(L^1(G, \omega), L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega}))$ روی $L^1(G, \omega)$ را با $\sigma_0(G, \omega)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که

$$\sigma_0(G, \omega) \leq n(G, \omega) \leq \beta^1(G, \omega)$$

در گزاره ۲ شرط تساوی دو توپولوژی نرمی و اکید را مشخص می‌کنیم.

گزاره ۲. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت توپولوژی نرمی $n(G, \omega)$ روی $L^1(G, \omega)$ با توپولوژی $\beta^1(G, \omega)$ برابر است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

برهان. اگر G فشرده باشد برابری دو توپولوژی بدیهی است. حال فرض کنیم دو توپولوژی برابر باشند. مجموعه

$$U = \{ \varphi \in L^1(G, \omega) : \|\varphi\|_{1, \omega} = 1 \}$$

را در نظر می‌گیریم و توجه کنید که این مجموعه نسبت به توپولوژی نرمی باز است و بنابراین نسبت به توپولوژی اکید نیز

باز است. از این‌جا نتیجه می‌شود که دنباله $((C_n), (r_n))$ در $\mathcal{C} \times \mathcal{R}$ وجود دارد به طوری که $U((C_n), (r_n)) \subseteq U$

نشان می‌دهیم به‌ازای m داریم $G = C_m$. بدین‌منظور فرض کنید برای هر $m \geq 1$ داشته باشیم $G \setminus C_m \neq \emptyset$.

عدد ثابتی مثل m را در نظر می‌گیریم و مجموعه فشرده $A \subseteq G \setminus C_m$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\lambda(A) > 0$

تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_m = \frac{r_m}{\lambda(A)\omega} \chi_A$$

داریم:

$$\|\varphi_m \chi_{C_n}\|_{1, \omega} = 0, \quad n < m$$

و

$$\|\varphi_m \chi_{C_n}\|_{1, \omega} \leq r_m \leq r_n, \quad n \geq m$$

بنابراین $\varphi_m \in U((C_n), (r_n))$ این‌رو از $\varphi_m \in U$ ؛ یعنی $\|\varphi_m\|_{1, \omega} < 1$. از سوی دیگر

$$r_m = \left\| \frac{r_m}{\lambda(A)\omega} \chi_A \right\|_1 = \|\varphi_m\|_{1, \omega} < 1$$

که با $r_m \rightarrow \infty$ در تناقض است.

این بخش را با بیان ویژگی جالبی از توپولوژی اکید به پایان می‌بریم. تعریفی را یادآوری می‌کنیم. فضای موضعاً

محدب (E, τ) را چلیکی گویند هرگاه هر چلیک (یعنی، مجموعه بسته محدب متعادل و جاذب) در E یک همسایگی

از صفر باشد. هم‌چنین این فضا را برونولوژی گویند اگر هر زیرمجموعه محدب و متعادل که زیرمجموعه‌های کراندار را

جذب می‌کند یک همسایگی از صفر باشد.

گزاره ۳. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. احکام زیر معادل‌اند:

$$1. (L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega)) \text{ چلیکی است.}$$

۲. $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ برونولوژی است.

۳. $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ نرم‌پذیر است.

۴. G فشرده است.

برهان. کافی است نشان دهیم (۴) برقرار است هرگاه (۱) یا (۲) برقرار باشد؛ زیرا هر فضای نرم‌پذیر یک فضای چلیکی است.

فرض کنید (۱) برقرار باشد. به آسانی می‌بینیم که گوی یک

$$B = \{ \varphi \in L^1(G, \omega) : \|\varphi\|_{1, \omega} \leq 1 \}$$

زیرمجموعه $\sigma_0(G, \omega)$ -بسته در $L^1(G, \omega)$ است و به‌ویژه یک چلیک در این فضا است. از این‌رو، بنابر فرض این مجموعه یک $\beta^1(G, \omega)$ -همسایگی از صفر است. این یعنی این‌که $n(G, \omega) \leq \beta^1(G, \omega)$ که با توجه به گزاره ۲ نتیجه می‌گیریم که G فشرده است.

حالا فرض کنید که (۲) برقرار باشد و نگاشت همانی را با

$$I: (L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega)) \rightarrow (L^1(G, \omega), n(G, \omega))$$

نشان می‌دهیم. بنابه گزاره ۱ این نگاشت کراندار است. چون $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ یک فضای برونولوژی است پس نگاشت مذکور پیوسته است. از این‌رو، $n(G, \omega) = \beta^1(G, \omega)$ که باز طبق گزاره ۲ نتیجه می‌گیریم که G فشرده است.

برخی خاصیت‌های دوگان $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$

این بخش را با قضیه زیر که تعمیم قضیه ۲ در [۱۵] است، شروع می‌کنیم. اثبات این قضیه شبیه حالت بدون وزن است و از تکرار آن صرف‌نظر می‌کنیم.

گزاره ۴. فرض کنید G گروهی موضعی فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. اگر τ یک توپولوژی موضعی محذب روی $L^1(G, \omega)$ چنان باشد که $\sigma_0(G, \omega) \leq \tau \leq n(G, \omega)$ در این صورت دوگان $(L^1(G, \omega), \tau)$ تحت توپولوژی قوی با فضای باناخ $(L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega}), \|\cdot\|_{\infty, \omega})$ یکی است.

اکنون به بررسی برخی ویژگی‌های دوگان $L^1(G, \omega)$ تحت توپولوژی اکید می‌پردازیم. به یاد بیاورید که فضای موضعی محذب (E, τ) نیم‌بازتابی است هرگاه $E^* = (E, \tau)^*$.

گزاره ۵. فرض کنید G گروهی موضعی فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ نیم‌بازتابی است اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

برهان. فرض کنید G گسسته باشد، در این صورت $L^1(G, \omega)$ را می‌توان با $\ell^1(G, \omega)$ که فضای همه توابع مختلط مقدار روی G با شرط $\sum_{x \in G} |\omega(x)\varphi(x)| < \infty$ است، یکی گرفت. با توجه به گزاره ۴ دوگان $(\ell^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ با فضای باناخ $(\ell_0^\infty(G, \frac{1}{\omega}), \|\cdot\|_{\infty, \omega})$ یکی است. این فضا متشکل از همه توابع مختلط مقدار g است که g/ω کراندار و در بینهایت صفر می‌شود. می‌دانیم دوگان این فضای باناخ را می‌توان با $\ell^1(G, \omega) = (\ell^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))^*$ یکی گرفت پس داریم

$$\ell^1(G, \omega) = (\ell^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))^*$$

برای اثبات جهت عکس، عضو همانی گروه G را با e و اندازه دیراک را با δ_e نشان می‌دهیم. تابع δ_e یک تابع خطی پیوسته روی $C_c\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ تعریف می‌کند. بنابه قضیه هان-باناخ می‌توانیم گسترشی از δ_e روی $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ به اسم u انتخاب کنیم. فرض ما به همراه گزاره ۴ نشان می‌دهد که تابع $\varphi \in L^1(G, \omega)$ وجود دارد به طوری که $u = T^*(\varphi)$ به ویژه به ازای هر $\psi \in L^1(G, \omega)$ داریم:

$$\langle \delta_e, \psi \rangle = \langle u, \psi \rangle = \int \varphi \psi \, d\lambda$$

در نتیجه δ_e نسبت به اندازه λ پیوسته مطلق است و از این جا نتیجه می‌گیریم که گروه G گسسته است؛ بند ۱۵.۱۷ در [۲] را ببینید.

اکنون یک نتیجه سراسر است از این گزاره:

نتیجه ۶. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ بازتابی است اگر و تنها اگر G متناهی باشد.

برهان. از آن جا که یک فضای موضعاً محدب بازتابی است اگر و تنها اگر نیم‌بازتابی و چلیکی باشد، حکم مورد نظر از گزاره‌های ۳ و ۵ به دست می‌آید.

به یاد بیاورید که فضای موضعاً محدب (E, τ) را یک فضای دوگان می‌نامند هرگاه فضای موضعاً محدب دیگری مثل (E_0, τ_0) موجود باشد به طوری که (E, τ) برابر دوگان (E_0, τ_0) بشود.

نتیجه ۷. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ فضای دوگان است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

برهان. اگر G فشرده باشد، بنا به گزاره ۳ فضای $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ چلیکی است. از این رو، بنا به لم ۱.۳ در [۱] فضای $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ فضای دوگان است.

برعکس، فرض کنید $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ فضای دوگان باشد. چون دوگان $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ برابر فضای نرم‌دار $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ است، مجدداً بنا به لم ۱.۳ در [۱] فضای $(L^1(G, \omega), \beta^1(G, \omega))$ باید نرم‌پذیر باشد. اکنون گزاره لم ۳ ایجاب می‌کند که G فشرده است.

در ادامه، نگاشت طبیعی‌ای را که به هر تابع روی $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ تحدید آن به $C_0\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ را نسبت می‌دهد با

$$\mathcal{P}: L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^* \rightarrow C_0\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$$

نشان می‌دهیم.

لم ۸. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت به ازای هر تابع خطی

$$\|m\| = \|\mathcal{P}(m)\| \quad L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right) \text{ روی } m \text{ مثبت}$$

برهان. خانواده همه زیرمجموعه‌های فشرده از G را که به وسیله رابطه شمول جهت‌دار شده است با $(C_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ نشان می‌دهیم. در این صورت $(\omega\chi_{C_\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ یک همانی تقریبی برای C^* -جبر $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ تشکیل می‌دهد. در واقع، برای هر

$$g \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right) \text{ داریم:}$$

$$\|g - g_{\omega}(\omega\chi_{C_\gamma})\|_{\infty, \omega} = \|g - g\chi_{C_\gamma}\|_{\infty, \omega} = \|g\chi_{G \setminus C_\gamma}\|_{\infty, \omega} \rightarrow 0.$$

چون m مثبت است پس $\|m\| > \langle m, \omega\chi_{C_\gamma} \rangle$. از این رو، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ وجود دارد یک $\gamma_0 \in \Gamma$ به‌طوری که

$$\|m\| - \epsilon \leq \langle m, \omega\chi_{C_\gamma} \rangle.$$

تابع $\psi \in C_c(G)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\omega\chi_{C_{\gamma_0}} \leq \psi \leq 1$. پس $\omega\psi \in C_0(G, \frac{1}{\omega})$. از این رو، داریم

$$\langle m, \omega\chi_{C_{\gamma_0}} \rangle \leq \langle m, \omega\psi \rangle = \langle \mathcal{P}(m), \omega\psi \rangle \leq \|\mathcal{P}(m)\|$$

که از این‌جا نتیجه می‌گیریم $\|m\| - \|\mathcal{P}(m)\| < \epsilon$ که همان نتیجه مطلوب است.

به پیروی از [۳] تابع $n \in L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})^*$ را با محل فشرده می‌نامیم هرگاه مجموعه فشرده C چنان موجود باشد که به‌ازای هر $g \in L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ داشته باشیم؛ $\langle n, g \rangle = \langle n, g\chi_C \rangle$ چنین C یی را یک محل فشرده برای n می‌نامیم.

گزاره ۹. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت تابع‌ها با محل فشرده در $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})^*$ یک زیرفضای نرم‌چگال تشکیل می‌دهند.

برهان. فرض کنید m و n دو تابع با محل فشرده در $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})^*$ باشند. در این صورت $cm + n$ به‌ازای هر عدد c دارای محل فشرده‌ای برابر اجتماع محل‌های m و n است. از این رو، اگر نشان دهیم، تابع‌ها با محل فشرده در $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})^*$ نرم‌چگال‌اند اثبات تمام است.

برای این منظور فرض کنید $m \in L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})^*$ و $\epsilon > 0$ مفروض باشند. نشان می‌دهیم عضو $n \in L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})^*$ با محل فشرده موجود است به‌طوری که $\|m - n\| < \epsilon$. بدون از دست رفتن کلیت حکم فرض می‌کنیم m تابع خطی مثبت روی $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ باشد؛ زیرا می‌دانیم $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})^*$ به‌وسیله اعضای مثبت تولید می‌شود. از آن‌جاکه $\mathcal{P}(m) \in C_0(G, \frac{1}{\omega})$ پس به‌ازای هر $\epsilon > 0$ زیرمجموعه فشرده G/C یافت می‌شود که

$$\langle \omega\mathcal{P}(m), \chi_{G \setminus C} \rangle \leq \epsilon.$$

حال فرض کنید n روی $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ با این ضابطه تعریف شود:

$$\langle n, g \rangle = \langle m, g\chi_C \rangle, \quad g \in L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega}).$$

در این صورت n دارای محل فشرده C است و $\mathcal{P}(n) = \chi_C\mathcal{P}(m)$. به‌علاوه $m - n$ تابع مثبت روی $L_0^\infty(G, \frac{1}{\omega})$ است. از لم ۸ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|m - n\| &= \|\mathcal{P}(m - n)\| \\ &= \|\mathcal{P}(m) - \mathcal{P}(n)\| \\ &= \|\chi_{G \setminus C}\mathcal{P}(m)\| \\ &= \langle \omega\mathcal{P}(m), \chi_{G \setminus C} \rangle \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $\|m - n\| \leq \epsilon$.

آخرین نتیجه ما حکمی است که در نوع خود جالب توجه است.

گزاره ۱۰. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده، نافشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این صورت $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ در $L^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ متمم‌دار نیست.

برهان. چون G فشرده نیست پس بنا به حکم ۴۳.۱۱ از [۲] دنباله (U_n) از همسایگی‌های فشرده و دو به دو مجزا در G یافت می‌شود. حال نگاشت‌های $I: \ell^\infty \rightarrow L^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ و $R: L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right) \rightarrow c_0$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$I((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \omega \chi_{U_n} \quad \forall (\alpha_n) \in \ell^\infty$$

و

$$R(g) = \left(\frac{1}{\lambda(U_n)} \int_{U_n} \frac{g(x)}{\omega(x)} d\lambda(x) \right)_{n \geq 1} \quad \forall g \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$$

این دو نگاشت پیوسته‌اند؛ در واقع به‌ازای هر $(\alpha_n) \in \ell^\infty$ داریم $\|I((\alpha_n))\|_{\infty, \omega} = \|(\alpha_n)\|_\infty$ و بنابراین $\|I\| = 1$. هم‌چنین برای هر $g \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ داریم:

$$\|R(g)\|_\infty = \sup \left| \frac{1}{\lambda(U_n)} \int_{U_n} \frac{g(x)}{\omega(x)} d\lambda(x) \right| \leq \|g\|_{\infty, \omega}$$

و $\|R(\omega \chi_{U_1})\|_\infty = 1$ و از این رو $\|R\| = 1$. اکنون فرض کنید که تصویر پیوسته‌ای مانند

$$P: L^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right) \rightarrow L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$$

موجود باشد. اگر $Q: \ell^\infty \rightarrow c_0$ برابر ترکیب $RoPoI$ باشد در این صورت برای هر $(\alpha_n) \in c_0$ داریم

$$I((\alpha_n)) \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$$

و

$$\begin{aligned} Q((\alpha_n)) &= R\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \omega \chi_{U_m}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda(U_n)} \int_{U_n} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \omega \chi_{U_m}(x) d\lambda(x)\right)_{n \geq 1} = (\alpha_n) \end{aligned}$$

از این رو $Q: \ell^\infty \rightarrow c_0$ یک تصویر است که خلاف این مطلب آشنا است که c_0 در ℓ^∞ متمم‌دار نیست؛ مثلاً قضیه ۵.۲۷ در [۱۶] را ببینید.

تشکر و قدردانی

از داوران مقاله که اشتباهاتی را که به متن راه یافته بود متذکر شدند سپاسگزاری می‌کنیم.

منابع

1. Gulick D., "Duality theory for the strict topology", *Studia Math.*, 49 (1974) 195-208.
2. Hewitt, E., Ross, K., "Abstract harmonic analysis, I", Springer-Verlag, New York (1970).

3. Isik N., Pym J., Ulger A., "The second dual of the group algebra of a compact group", *J. London Math. Soc.*, 35 (1987) 135-148.
4. Javanshiri H., Nasr-Isfahani R., "The strict topology for the space of Radon measures on a locally compact Hausdorff space", *Topology Appl.*, 160 (2013) 887-895.
5. Kaniuth E., "A course in commutative Banach algebra", Springer-Verlag, New York (2009).
6. Lau A-T., Pym J., "Concerning the second dual of the group algebra of a locally compact group", *J. London Math. Soc.*, 41 (1990) 445-460.
7. Maghsoudi S., "The space of vector-valued integrable functions under a locally convex topology", *Math. Nach.*, 213 (2013) 437-448.
8. Maghsoudi S., Nasr-Isfahani R., Rejali A., "The dual of semigroup algebras with certain locally convex topologies", *Semigroup Forum*, 73 (2006) 367-376.
9. Maghsoudi S., Nasr-Isfahani R., Rejali A., "Strong Arens irregularity of Beurling algebras with a locally convex topology", *Arch. Math. (Basel)*, 86 (2006) 437-448.
10. Maghsoudi S., Nasr-Isfahani R., "Strict topology over the space of measures with continuous translations on locally compact foundation semigroups", *Acta Math, Sinica*, 27 (2011) 933-942.
11. Reiter H., Stegeman D., "Classical harmonic analysis and locally compact groups", Clarendon, Oxford (2000).
12. Samea H., Fasahat E., "Strict topology on locally compact groups", *Topology Appl.*, 226 (2017) 42-50.
13. Samea H., Fasahat E., "Strict topology on locally compact semigroups", *Semigroup Forum*, 95 (2017) 405-414.
14. Samea H., Fasahat E., "Strict topologies on measure spaces", *Math. Nach.*, 290 (2017) 3020-3028.
15. Singh A. I., " $L_0^\infty(G)^*$ as the second dual of the group algebra $L^1(G)$ with a locally convex topology", *Michigan Math. J.*, 46 (1999) 143-150.
16. Swartz C., "An introduction to functional analysis", Marcel Dekker, New York (1992).