یک توپولوژی موضعاً محدب روی جبرهای بورلینگ

سعید مقصودی؛ دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

دریافت ۹۵/۰۸/۰۴ پذیرش ۹۷/۰۴/۰۶

چکیده

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده، ω یک تابع وزن و $L_0^\infty(G,\frac{1}{\omega})$ فضای توابع اندازه‌پذیر روی G باشد که اساساً کراندار و در بینهایت صفر می‌شوند. در این مقاله توپولوژی موضعاً محدب $\beta^1(G,\omega)$ را روی فضای وزندار $L^1(G,\omega)$ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که دوگان $L^1(G,\omega)$ با این توپولوژی برابر فضای باناخ $\left(L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right), \|.\|_{\infty,\omega}\right)$ است. علاوه بر این، برخی ویژگی‌های فضای $L^1(G,\omega)$ با توپولوژی مذکور را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گروه موضعاً فشرده، توپولوژی موضعاً محدب، فضای لبگ وزندار، دوگان.

مقدمه

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و λ اندازه هار چپ ثابتی روی آن باشد. هم‌چنین فرض کنید ω یک تابع وزن روی G باشد؛ یعنی یک تابع اندازه‌پذیر بورل مانند $\omega: G \longrightarrow (0,\infty)$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $x,y \in G$ داشته باشیم $\omega(xy) \leq \omega(x)\omega(y)$. مجموعهٔ همه توابع اندازه‌پذیر φ روی G را که $\varphi\omega \in L^1(G)$ با $L^1(G,\omega)$ نشان می‌دهیم. دراین‌صورت $L^1(G,\omega)$ با عمل پیچش $*$ و نرم $\|.\|_{1,\omega}$ که به‌صورت $\|\varphi\|_{1,\omega} = \|\varphi\omega\|_1$ تعریف می‌شود تشکیل جبر باناخی موسوم به جبر بورلینگ می‌دهد. توپولوژی تولید شده با نرم $\|.\|_{1,\omega}$ را با $n(G,\omega)$ نشان می‌دهیم. این فضا به‌دلیل وجود تابع وزن و بروز رفتارهای متفاوت با حالت بدون وزن، مورد توجه آنالیزدان‌ها است. جزئیات بیش‌تر در این باره را می‌توان در [۵]، [۱۱] دید. آنالیز هارمونیک‌دان‌های ایران به‌ویژه دکتر مدقالچی و دکتر رجالی دربارهٔ این جبر پژوهش‌هایی انجام داده‌اند.

فضای همهٔ توابع اندازه‌پذیر f که $f/\omega \in L^\infty(G)$ را با $L^\infty(G,\frac{1}{\omega})$ نشان می‌دهیم. دراین‌صورت $L^\infty(G,\frac{1}{\omega})$ با عمل ضرب $\cdot_\omega$ با تعریف $f\cdot_\omega g = fg/\omega$ و نرم $\|f\|_{\infty,\omega} = \|f\omega\|_\infty$ و عمل مزدوج مختلط به‌عنوان برگشت تشکیل یک C^*-جبر جابه‌جایی می‌دهد. به‌علاوه، $L^\infty(G,\frac{1}{\omega})$ دوگان $L^1(G,\omega)$ است. در واقع، نگاشت

$$\mathrm{T}: L^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right) \longrightarrow L^1(G,\omega)^* \quad , \qquad < T(f),\varphi > = \int f(x)\varphi(x)\, d\lambda(x)$$

به‌ازای $f \in L^\infty(G,\frac{1}{\omega})$ و $\varphi \in L^1(G,\omega)$ یک‌ریختی طولپا است.

مجموعهٔ همه توابع g در $L^\infty(G,\frac{1}{\omega})$ را که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ مجموعه فشرده K چنان موجود باشد که

$$\| g\chi_{G\setminus K}\|_{\infty,\omega} < \epsilon$$

با $L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ نشان می‌دهیم. پژوهشی دربارهٔ این فضا در حالت بدون وزن در [۳] و [۶] انجام شده است.

در این مقاله توپولوژی موضعاً محدب $\beta^1(G,\omega)$ را روی فضای $L^1(G,\omega)$ تعریف می‌کنیم. این توپولوژی دارای این خاصیت جالب است که دوگان $L^1(G,\omega)$ تحت آن با $L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ یکی می‌شود. این نتایج برخی نتایج عرضه

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.1.5]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.221]

شده در [۱۵] را تعمیم می‌دهد. به‌علاوه نشان می‌دهیم که $\beta^1(G,\omega)$ نرم‌پذیر است اگر و تنها اگر G فشرده باشد. پژوهش‌های مشابهی برای فضاهای دیگر در [۷]، [۸] و [۱۰] انجام شده است. برخی کاربردهای نتایج این مقاله در [۹] آمده است. هم‌چنین به‌جا است که از مقالات [۱۲]-[۱۴] نام ببریم که از بدیع‌ترین و ارزنده‌ترین پژوهش‌های اخیر در مورد توپولوژی اکید است که پس از مقالات صاحب این قلم در مورد فضاهای اندازه و توابع اندازه‌پذیر انجام شده است. در [۴] هم تعمیم سرراستی از برخی نتایج [۱۰] عرضه شده است.

ویژگی‌های $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$

مجموعه همهٔ دنباله‌های صعودی از زیرمجموعه‌های فشرده G را با $\mathcal{C}$ و دنباله‌های صعودی از اعداد مثبت واگرا به بینهایت را با $\mathcal{R}$ نشان می‌دهیم. برای $(\mathrm{C_n})\in\mathcal{C}$ و $(\mathrm{r_n})\in\mathcal{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{U}((\mathrm{C_n}),(\mathrm{r_n}))=\left\{\varphi\in L^1(G,\omega): \|\varphi\|_{1,\omega}<\mathrm{r_n}, \forall \mathrm{n}\geq 1\right\}$$

و توجه داریم که مجموعه‌ای محدب متعادل و جاذب در فضای $L^1(G,\omega)$ است. به‌راحتی می‌بینیم که مجموعه $\mathcal{U}$ متشکل از همه $\mathrm{U}((\mathrm{C_n}),(\mathrm{r_n}))$ها که $(\mathrm{C_n})\in\mathcal{C}$ و $(\mathrm{r_n})\in\mathcal{R}$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی موضعاً محدب می‌دهد. این توپولوژی را با $\beta^1(G,\omega)$ نشان می‌دهیم و آن را توپولوژی اکید می‌نامیم؛ دلیل این نام‌گذاری در [۷] آمده است.

کار را با گزارهٔ ۱ شروع می‌کنیم.

گزارهٔ ۱. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت مجموعه‌های کراندار نسبت به توپولوژی $\mathrm{n}(G,\omega)$ و توپولوژی $\beta^1(G,\omega)$ یک‌سانند.*

برهان. فرض کنید B مجموعه‌ای $\beta^1(G,\omega)$ کراندار باشد و فرض بگیرید این مجموعه نسبت به توپولوژی نرم $\mathrm{n}(G,\omega)$ کراندار نباشد. پس دنبالهٔ $(\varphi_\mathrm{n})\subseteq B$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $\|\varphi_\mathrm{n}\|_{1,\omega}>n$. حال برای هر عدد طبیعی می‌توانیم مجموعه فشرده $\mathrm{K_n}$ را چنان بیابیم که $\|\varphi_\mathrm{n}\chi_{\mathrm{K_n}}\|_{1,\omega}>n$. اکنون اگر تعریف کنیم $\mathrm{C_n}=\bigcup_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{K_i}$ در این‌صورت به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $\|\varphi_\mathrm{n}\chi_{\mathrm{C_n}}\|_{1,\omega}>n$ و $(\mathrm{C_n})\in\mathcal{C}$. فرض کنید $(\mathrm{r_n})\in\mathcal{R}$ دنبالهٔ صعودی به‌طوری باشد که $r_\mathrm{n}^2\geq n$. چون B مجموعه‌ای $\beta^1(G,\omega)$ کرانداراست پس عدد ثابتی مثل $s>0$ موجود است به‌گونه‌ای‌که $B\subseteq s\,\mathrm{U}((\mathrm{C_n}),(\mathrm{r_n}))$. از این‌رو، به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $n\leq\|\varphi_\mathrm{n}\chi_{\mathrm{C_n}}\|_{1,\omega}<sr_n$ که تناقض است. عکس حکم بدیهی است.

توپولوژی قوی روی $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)^*$ را با $\tau_\mathrm{b}(G,\omega)$ نشان می‌دهیم؛ این توپولوژی برابر توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های کراندار نسبت به توپولوژی ضعیف

$$\sigma\left(L^1(G,\omega),\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)^*\right)$$

است. هم‌چنین توپولوژی القایی حاصل از توپولوژی نرمی فضای $\left(L^1(G,\omega),n(G,\omega)\right)^*$ روی $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)^*$ را با $\tau_n(G,\omega)$ نشان می‌دهیم. این توپولوژی به‌وسیلهٔ این نرم القا می‌شود:

$$\|f\|=\sup\left\{|f(\varphi)|:\varphi\in L^1(G,\omega),\quad \|\varphi\|_{1,\omega}=1\right\}$$

که در آن $f\in\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)^*$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.1.5]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.221]

به آسانی از گزارهٔ ۱ درمی‌یابیم که توپولوژی‌های $\tau_n(G,\omega)$ و $\tau_b(G,\omega)$ روی* $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$ معادل‌اند.

یادآوری می‌کنیم که $L^1(G,\omega)$ و $L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ تحت نگاشت دوخطی زیر در دوگانگی قرار دارند

$$<\varphi,g>=\int g(x)\varphi(x)\,d\lambda(x)$$

توپولوژی ضعیف $\sigma\left(L^1(G,\omega),L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)\right)$ روی $L^1(G,\omega)$ را با $\sigma_0(G,\omega)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که

$$\sigma_0(G,\omega)\le n(G,\omega)\le\beta^1(G,\omega)$$

در گزارهٔ ۲ شرط تساوی دو توپولوژی نرمی و اکید را مشخص می‌کنیم.

گزارهٔ ۲ . *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت توپولوژی نرمی* $n(G,\omega)$ روی $L^1(G,\omega)$ با توپولوژی $\beta^1(G,\omega)$ برابر است اگر و تنها اگر G *فشرده باشد.*

برهان. اگر G فشرده باشد برابری دو توپولوژی بدیهی است. حال فرض کنیم دو توپولوژی برابر باشند. مجموعه

$$U=\left\{\varphi\in L^1(G,\omega):\ \|\varphi\|_{1,\omega}=1\ \right\}$$

را در نظر می‌گیریم و توجه کنید که این مجموعه نسبت به توپولوژی نرمی باز است و بنابراین نسبت به توپولوژی اکید نیز باز است. از این‌جا نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $((C_n),(r_n))$ در $\mathcal{C}\times\mathcal{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که $U((C_n),(r_n))\subseteq U$ نشان می‌دهیم به‌ازای mیی داریم $G=C_m$. بدین‌منظور فرض کنید برای هر $m\ge1$ داشته باشیم $G\setminus C_m\ne\emptyset$. عدد ثابتی مثل m را در نظر می‌گیریم و مجموعهٔ فشرده $A\subseteq G\setminus C_m$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\lambda(A)>0$. تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_m=\frac{r_m}{\lambda(A)\omega}\chi_A$$

داریم:

$$\left\|\varphi_m\chi_{C_n}\right\|_{1,\omega}=0,\qquad n<m$$

و

$$\left\|\varphi_m\chi_{C_n}\right\|_{1,\omega}\le r_m\le r_n,\qquad n\ge m$$

بنابراین $\varphi_m\in U((C_n),(r_n))$ این‌رو از $\varphi_m\in U$ ؛ یعنی $\|\varphi_m\|_{1,\omega}<1$. از سوی دیگر

$$r_m=\left\|\frac{r_m}{\lambda(A)}\chi_A\right\|_1=\ \|\varphi_m\|_{1,\omega}<1$$

که با $r_m\longrightarrow\infty$ در تناقض است.

این بخش را با بیان ویژگی جالبی از توپولوژی اکید به پایان می‌بریم. تعریفی را یادآوری می‌کنیم. فضای موضعاً محدب (E,τ) را چلیکی گویند هرگاه هر چلیک (یعنی، مجموعه بسته محدب متعادل و جاذب) در E یک همسایگی از صفر باشد. هم‌چنین این فضا را برونولوژی گویند اگر هر زیرمجموعه محدب و متعادل که زیرمجموعه‌های کراندار را جذب می‌کند یک همسایگی از صفر باشد.

گزارهٔ ۳. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. احکام زیر معادل‌اند:*

۱. $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$ *چلیکی است.*

۲. $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$ *برونولوژی است.*
۳. $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$ *نرم‌پذیر است.*
۴. G *فشرده است.*

برهان. کافی است نشان دهیم (۴) برقرار است هرگاه (۱) یا (۲) برقرار باشد؛ زیرا هرفضای نرم‌پذیر یک فضای چلیکی است.

فرض کنید (۱) برقرار باشد. به آسانی می‌بینیم که گوی یکه

$$\mathrm{B}=\left\{\varphi\in L^1(G,\omega):\ \|\varphi\|_{1,\omega}\le 1\ \right\}$$

زیرمجموعهٔ $\sigma_0(\mathrm{G},\omega)$- بسته در $L^1(G,\omega)$ است و به‌ویژه یک چلیک در این فضا است. از این‌رو، بنابر فرض این مجموعه یک $\beta^1(G,\omega)$-همسایگی از صفر است. این یعنی این‌که $\mathrm{n}(\mathrm{G},\omega)\le\beta^1(G,\omega)$ که با توجه به گزارهٔ ۲ نتیجه می‌گیریم که G فشرده است.

حالا فرض کنید که (۲) برقرار باشد و نگاشت همانی را با

$$I:\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)\longrightarrow\left(L^1(G,\omega),n(\mathrm{G},\omega)\right)$$

نشان می‌دهیم. بنابه گزارهٔ ۱ این نگاشت کراندار است. چون $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$ یک فضای برونولوژی است پس نگاشت مذکور پیوسته است. از این‌رو، $\mathrm{n}(\mathrm{G},\omega)=\beta^1(G,\omega)$ که باز طبق گزاره ۲ نتیجه می‌گیریم که G فشرده است.

برخی خاصیت‌های دوگان $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$

این بخش را با قضیهٔ زیر که تعمیم قضیهٔ ۲ در [۱۵] است، شروع می‌کنیم. اثبات این قضیه شبیه حالت بدون وزن است و از تکرار آن صرف‌نظر می‌کنیم.

گزارهٔ ۴. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. اگر τ یک توپولوژی موضعاً محدب روی $L^1(G,\omega)$ چنان باشد که $\sigma_0(\mathrm{G},\omega)\le\tau\le\mathrm{n}(\mathrm{G},\omega)$ در این‌صورت دوگان $\left(L^1(G,\omega),\tau\right)$* تحت توپولوژی قوی با فضای باناخ $\left(L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right),\|.\|_{\infty,\omega}\right)$ یکی است.

اکنون به بررسی برخی ویژگی‌های دوگان $L^1(G,\omega)$ تحت توپولوژی اکید می‌پردازیم. به یاد بیاورید که فضای موضعاً محدب (E,τ) نیم‌بازتابی است هرگاه $(\mathrm{E},\tau)^*=E$.

گزارهٔ ۵. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت $\left(L^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$ نیم‌بازتابی است اگر و تنها اگر G گسسته باشد.*

برهان. فرض کنید G گسسته باشد، در این‌صورت $L^1(G,\omega)$ را می‌توان با $\ell^1(G,\omega)$ که فضای همه توابع مختلط مقدار روی G با شرط $\sum_{x\in G}|\omega(x)\varphi(x)|<\infty$ است، یکی گرفت. با توجه به گزارهٔ ۴ دوگان $\left(\ell^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)$ با فضای باناخ $\left(\ell_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right),\|.\|_{\infty,\omega}\right)$ یکی است. این فضا متشکل از همه توابع مختلط مقدار g است که g/ω کراندار و در بینهایت صفر می‌شود. می‌دانیم دوگان این فضای باناخ را می‌توان با $\ell^1(G,\omega)$ یکی گرفت پس داریم $\left(\ell^1(G,\omega),\beta^1(G,\omega)\right)^{**}=\ell^1(G,\omega)$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.1.5]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.221]

برای اثبات جهت عکس، عضو همانی گروه G را با e و اندازه دیراک را با δ_e نشان می‌دهیم. تابع δ_e یک تابعک خطی پیوسته روی $C_c\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ تعریف می‌کند. بنابه قضیه هان-باناخ می‌توانیم گسترشی از δ_e روی $L_0^{\infty}\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ به اسم u انتخاب کنیم. فرض ما به‌همراه گزارهٔ ۴ نشان می‌دهد که تابع $\varphi \in L^1(G,\omega)$ وجود دارد به‌طوری‌که $u = T^*(\varphi)$. به‌ویژه به‌ازای هر $\psi \in L^1(G,\omega)$ داریم:

$$< \delta_e, \psi >=< u, \psi >= \int \varphi\psi \, d\lambda$$

در نتیجه δ_e نسبت به اندازهٔ هار λ پیوسته مطلق است و از این‌جا نتیجه می‌گیریم که گروه G گسسته است؛ بند ۱۵.۱۷ در [۲] را ببینید.

اکنون یک نتیجه سرراست از این گزاره:

نتیجهٔ ۶. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت $\left(L^1(G,\omega), \beta^1(G,\omega)\right)$ بازتابی است اگر و تنها اگر G* متناهی باشد.

برهان. از آن‌جاکه یک فضای موضعاً محدب بازتابی است اگر و تنها اگر نیم‌بازتابی و چلیکی باشد، حکم مورد نظر از گزاره‌های ۳ و ۵ به‌دست می‌آید.

به یاد بیاورید که فضای موضعاً محدب (E,τ) را یک فضای دوگان می‌نامند هرگاه فضای موضعاً محدب دیگری مثل (E_0,τ_0) موجود باشد به‌طوری‌که (E,τ) برابر دوگان (E_0,τ_0) بشود.

نتیجهٔ ۷. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت $\left(L^1(G,\omega), \beta^1(G,\omega)\right)$ فضای دوگان است اگر و تنها اگر G* فشرده باشد.

برهان. اگر G فشرده باشد، بنا به گزارهٔ ۳ فضای $\left(L^1(G,\omega), \beta^1(G,\omega)\right)$ چلیکی است. از این‌رو، بنا به لم ۱.۳ در [۱] فضای $\left(L^1(G,\omega), \beta^1(G,\omega)\right)$ فضای دوگان است.

برعکس، فرض کنید $\left(L^1(G,\omega), \beta^1(G,\omega)\right)$ فضای دوگان باشد. چون دوگان $\left(L^1(G,\omega), \beta^1(G,\omega)\right)$ برابر فضای نرم‌دار $L_0^{\infty}\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ است، مجدداً بنا به لم ۱.۳ در [۱] فضای $\left(L^1(G,\omega), \beta^1(G,\omega)\right)$ باید نرم‌پذیر باشد. اکنون گزاره لم ۳ ایجاب می‌کند که G فشرده است.

در ادامه، نگاشت طبیعی‌ای را که به هر تابعک روی $L_0^{\infty}\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ تحدید آن به $C_0\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ را نسبت می‌دهد با

$$\mathcal{P}: L_0^{\infty}\left(G,\frac{1}{\omega}\right)^* \longrightarrow C_0\left(G,\frac{1}{\omega}\right)^*$$

نشان می‌دهیم.

لم ۸. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت به‌ازای هر تابعک خطی* مثبت m *روی* $L_0^{\infty}\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ داریم $\|m\| = \|\mathcal{P}(m)\|$.

برهان. خانواده همه زیرمجموعه‌های فشرده از G را که به‌وسیلهٔ رابطهٔ شمول جهت‌دار شده است با $(C_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ نشان می‌دهیم. دراین‌صورت $\left(\omega\chi_{C_\gamma}\right)_{\gamma\in\Gamma}$ یک همانی تقریبی برای C^*-جبر $L_0^{\infty}\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ تشکیل می‌دهد. در واقع، برای هر $g \in L_0^{\infty}\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ داریم:

$$\left\| g - g\cdot_{\omega} (\omega\chi_{C_\gamma})\right\|_{\infty,\omega} = \left\| g - g\chi_{C_\gamma}\right\|_{\infty,\omega} = \left\| g\chi_{G\setminus C_\gamma}\right\|_{\infty,\omega} \longrightarrow 0.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.1.5]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.221]

چون m مثبت است پس $\|m\| \nearrow < m, \omega\chi_{C_\gamma} >$. از این‌رو، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ وجود دارد یک $\gamma_0 \in \Gamma$ به‌طوری که

$$\|m\| - \epsilon \leq < m, \omega\chi_{C_\gamma} >.$$

تابع $\psi \in C_c(G)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\omega\chi_{C_{\gamma_0}} \leq \psi \leq 1$. پس $\omega\psi \in C_0\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$. از این‌رو، داریم

$$< m, \omega\chi_{C_{\gamma_0}} > \leq < m, \omega\psi > = < \mathcal{P}(m), \omega\psi > \leq \|\mathcal{P}(m)\|$$

که از این‌جا نتیجه می‌گیریم $\|m\| - \|\mathcal{P}(m)\| < \epsilon$ که همان نتیجه مطلوب است.

به پیروی از [۳] تابعک $n \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$ را با محمل فشرده می‌نامیم هرگاه مجموعه فشرده C چنان موجود باشد که به‌ازای هر $g \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ داشته باشیم؛ $< n, g > = < n, g\chi_C >$ چنین Cیی را یک محمل فشرده برای n می‌نامیم.

گزارهٔ ۹. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت تابعک‌ها با محمل فشرده در $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$ یک زیرفضای نرم‌چگال تشکیل می‌دهند.*

برهان. فرض کنید m و n دو تابعک با محمل فشرده در $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$ باشند. در این‌صورت $cm + n$ به‌ازای هر عدد c دارای محمل فشرده‌ای برابر اجتماع محمل‌های m و n است. از این‌رو، اگر نشان دهیم، تابعک‌ها با محمل فشرده در $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$ نرم‌چگال‌اند اثبات تمام است.

برای این منظور فرض کنید $m \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$ و $\epsilon > 0$ مفروض باشند. نشان می‌دهیم عضو $n \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$ با محمل فشرده موجود است به‌طوری‌که $\|m - n\| < \epsilon$. بدون از دست رفتن کلیت حکم فرض می‌کنیم m تابعک خطی مثبت روی $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ باشد؛ زیرا می‌دانیم $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)^*$ به‌وسیلهٔ اعضای مثبت تولید می‌شود. از آن‌جاکه $\mathcal{P}(m) \in C_0\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ پس به‌ازای هر $\epsilon > 0$ زیرمجموعه فشرده C از G یافت می‌شود که

$$< \omega\mathcal{P}(m), \chi_{G\setminus C} > \leq \epsilon.$$

حال فرض کنید n روی $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ با این ضابطه تعریف شود:

$$< n, g > = < m, g\chi_C >, \qquad g \in L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right).$$

در این‌صورت n دارای محمل فشرده C است و $\mathcal{P}(n) = \chi_C\mathcal{P}(m)$ به‌علاوه $m - n$ تابعک مثبت روی $L_0^\infty\left(G, \frac{1}{\omega}\right)$ است. از لم ۸ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\|m - n\| &= \|\mathcal{P}(m - n)\| \\
&= \|\mathcal{P}(m) - \mathcal{P}(n)\| \\
&= \left\|\chi_{G\setminus C}\mathcal{P}(m)\right\| \\
&= < \omega\mathcal{P}(m), \chi_{G\setminus C} >
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $\|m - n\| \leq \epsilon$.

آخرین نتیجه ما حکمی است که در نوع خود جالب توجه است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.1.5]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.221]

گزارهٔ ۱۰. *فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده، نافشرده و ω یک تابع وزن روی آن باشد. در این‌صورت $L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ در $L^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ متمم‌دار نیست.*

برهان. چون G فشرده نیست پس بنا به حکم ۴۳.۱۱ از [۲] دنباله (U_n) از همسایگی‌های فشرده و دو به‌دو مجزا در G یافت می‌شود. حال نگاشت‌های $I:\ell^\infty \longrightarrow L^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ و $R:L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right) \longrightarrow c_0$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$I\big((\alpha_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \omega \chi_{U_n} \qquad\qquad \forall (\alpha_n) \in \ell^\infty$$

و

$$R(g) = \left(\frac{1}{\lambda(U_n)} \int_{U_n} \frac{g(x)}{\omega(x)} d\lambda(x)\right)_{n\geq 1} \qquad\qquad \forall g \in L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$$

این دو نگاشت پیوسته‌اند؛ در واقع به‌ازای هر $(\alpha_n) \in \ell^\infty$ داریم $\left\|I\big((\alpha_n)\big)\right\|_{\infty,\omega} = \|(\alpha_n)\|_\infty$ و بنابراین $\|I\| = 1$. هم‌چنین برای هر $g \in L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$ داریم:

$$\|R(g)\|_\infty = \sup\left|\frac{1}{\lambda(U_n)} \int_{U_n} \frac{g(x)}{\omega(x)} d\lambda(x)\right| \leq \|g\|_{\infty,\omega}$$

و $\left\|R\big(\omega\chi_{U_1}\big)\right\|_\infty = 1$ و از این‌رو $\|R\| = 1$. اکنون فرض کنید که تصویر پیوسته‌ای مانند

$$P: L^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right) \longrightarrow L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$$

موجود باشد. اگر $Q:\ell^\infty \longrightarrow c_0$ برابر ترکیب $RoPoI$ باشد در این‌صورت برای هر $(\alpha_n) \in c_0$ داریم

$$I\big((\alpha_n)\big) \in L_0^\infty\left(G,\frac{1}{\omega}\right)$$

و

$$\begin{aligned} Q\big((\alpha_n)\big) &= R\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \omega \chi_{U_m}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda(U_n)} \int_{U_n} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \omega \chi_{U_m}(x) d\lambda(x)\right)_{n\geq 1} = (\alpha_n) \end{aligned}$$

از این‌رو $Q:\ell^\infty \longrightarrow c_0$ یک تصویر است که خلاف این مطلب آشنا است که c_0 در ℓ^∞ متمم‌دار نیست؛ مثلا قضیهٔ ۵.۲۷ در [۱۶] را ببینید.

تشکر و قدردانی

از داوران مقاله که اشتباهاتی را که به متن راه یافته بود متذکر شدند سپاسگزاری می‌کنیم.

منابع

1. Gulick D., "Duality theory for the strict topology", Studia Math., 49 (1974) 195-208.

2. Hewitt, E., Ross, K., "Abstract harmonic analysis, I", Springer-Verlag, New York (1970).

3. Isik N., Pym J., Ulger A., "The second dual of the group algebra of a compact group", J. London Math. Soc., 35 (1987) 135-148.

4. Javanshiri H., Nasr-Isfahani R., "The strict topology for the space of Radon measures on a locally compact Hausdorff space", Topology Appl., 160 (2013) 887-895.

5. Kaniuth E., "A course in commutative Banach algebra", Springer-Verlag, New York (2009).

6. Lau A-T., Pym J., "Concerning the second dual of the group algebra of a locally compact group", J. London Math. Soc., 41 (1990) 445-460.

7. Maghsoudi S., "The space of vector-valued integrable functions under a locally convex topology", Math. Nach., 213 (2013) 437-448.

8. Maghsoudi S., Nasr-Isfahani R., Rejali A., "The dual of semigroup algebras with certain locally convex topologies", Semigroup Forum, 73 (2006) 367-376.

9. Maghsoudi S., Nasr-Isfahani R., Rejali A., "Strong Arens irregularity of Beurling algebras with a locally convex topology", Arch. Math. (Basel), 86 (2006) 437-448.

10. Maghsoudi S., Nasr-Isfahani R., "Strict topology over the space of measures with continuous translations on locally compact foundation semigroups", Acta Math, Sinica, 27 (2011) 933-942.

11. Reiter H., Stegeman D., "Classical harmonic analysis and locally compact groups", Clarendon, Oxford (2000).

12. Samea H., Fasahat E., "Strict topology on locally compact groups", Topology Appl., 226 (2017) 42-50.

13. Samea H., Fasahat E., "Strict topology on locally compact semigroups", Semigroup Forum, 95 (2017) 405-414.

14. Samea H., Fasahat E., "Strict topologies on measure spaces", Math. Nach., 290 (2017) 3020-3028.

15. Singh A. I., "$L_0^\infty(G)^*$ as the second dual of the group algebra $L^1(G)$ with a locally convex topology", Michigan Math. J., 46 (1999) 143-150.

16. Swartz C., "An introduction to functional analysis", Marcel Dekker, New York (1992).