

## چند نامساوی میانگین هندسی وزن دار عملگری

عالمه شیخ حسینی\*؛ دانشگاه شهید باهنر، بخش ریاضی محض  
اسما ایلخانی‌زاده منش؛ دانشگاه ولی عصر، بخش ریاضی محض  
مریم خسروی؛ دانشگاه شهید باهنر، بخش ریاضی محض

پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

دریافت ۹۵/۰۹/۰۳

### چکیده

در این مقاله، با استفاده از نامساوی توسعه یافته هولدر- مک کارتی، چندین نامساوی در زمینه میانگین هندسی  $\alpha$ -وزن دار ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) دو عملگر مثبت بیان شده است. به‌ویژه ثابت شده است که اگر  $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به‌طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه به‌ازای هر  $r \geq 1$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)Y\| \leq \|X^*AX\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|Y^*AY\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|X^*BX\|^{\frac{\alpha}{2}} \|Y^*BY\|^{\frac{\alpha}{2}}$$

و

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)X\|^r \leq \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\| - \Omega(X)$$

که در آن  $\#_{\alpha}$  نمایانگر میانگین هندسی  $\alpha$ -وزن دار است و

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\sqrt{\langle (X^*BX)^r x, x \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x, x \rangle})^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

واژه‌های کلیدی: نامساوی هولدر- مک کارتی، برد عددی، نرم عملگری، عملگر مثبت وارون‌پذیر

**Mathematics Subject Classification [2010]:** 15A60, 47A12, 47A63.

### مقدمه و پیشینازها

فرض کنیم  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  فضای همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط  $\mathcal{H}$  با ضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  باشد. عملگر  $A$  را مثبت گوییم و می‌نویسیم  $A \geq 0$  اگر  $A = A^*$  (که در آن  $A^*$  عملگر الحاقی است) و برای هر  $x \in \mathcal{H}$ ،  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ . میانگین هندسی  $\alpha$ -وزن دار  $\#_{\alpha}$  برای  $\alpha \in [0, 1]$  و عملگرهای مثبت وارون‌پذیر  $A$  و  $B$  بدین صورت تعریف می‌شود:

$$A \#_{\alpha} B = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}}.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که  $A \#_{\alpha} B = B \#_{1-\alpha} A$  در حالت  $\alpha = \frac{1}{2}$ ، این تعریف همان میانگین هندسی معمول است. به‌علاوه اگر  $A$  و  $B$  وارون‌پذیر نباشند، می‌توان  $A \#_{\alpha} B$  را بدین صورت

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A + \varepsilon I) \#_{\alpha} (B + \varepsilon I)$$

در توپولوژی قوی در نظر گرفت. مقالات زیادی به میانگین هندسی وزن دار در عملگرها و نامساوی‌های نرمی آن پرداخته‌اند [1], [2], [6], [7], [9], [12], [13].

اگر  $T$  یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشد، آن‌گاه برد عددی  $W(T)$  عبارت است از تصویر دایره واحد تحت نگاشت  $x \rightarrow \langle Tx, x \rangle$  به بیان دیگر

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

در [4] و [5] و مراجع آن‌ها بعضی ویژگی‌های  $W(T)$  بیان شده است.

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، شکل معمول نامساوی یانگ بیان می‌کند که برای هر  $v \in [0, 1]$

$$a^v b^{1-v} \leq va + (1-v)b. \quad (۱)$$

در [8] کیتانه و ماناسرا نامساوی (۱،۱) را به صورت (۲) بهبود بخشیده‌اند:

$$a^v b^{1-v} + r_0(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq va + (1-v)b, \quad (۲)$$

که در آن  $r_0 = \min\{v, 1-v\}$

اخیرا نیز ماناسرا و کیتانه [11] نامساوی (۲) را به صورت (۳) برای  $m = 1, 2, \dots$  تعمیم دادند.

$$(a^v b^{1-v})^m + r_0^m (a^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}})^2 \leq (va + (1-v)b)^m, \quad (۳)$$

هدف از این مقاله ارائه کران بالا برای نرم عملگری میانگین هندسی وزن دار برای دو عملگر است.

## نتایج اصلی

برای به دست آوردن نتیجه اصلی به لم مشهور ۱ نیاز داریم:

**لم ۱.** (نامساوی توسعه یافته هولدر- مک‌کارتی [10]) فرض کنید  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  یک عملگر مثبت باشد. در این

صورت برای هر  $x, y \in \mathcal{H}$  و هر عدد حقیقی مثبت  $\gamma$  داریم

$$|\langle Ax, y \rangle|^\gamma \leq \langle A^\gamma x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle A^\gamma y, y \rangle^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\gamma-1} \|y\|^{\gamma-1} \quad (آ)$$

$$|\langle A^\gamma x, y \rangle| \leq \langle Ax, x \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \langle Ay, y \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \|x\|^{1-\gamma} \|y\|^{1-\gamma} \quad (ب)$$

**قضیه ۲.** فرض کنید  $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت

برای هر  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|X^*(A \#_\alpha B)Y\| \leq \|X^*AX\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|Y^*AY\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|X^*BX\|^{\frac{\alpha}{2}} \|Y^*BY\|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

**برهان.** برای هر دو بردار واحد  $x, y \in \mathcal{H}$  با استفاده از لم ۱ قسمت ب داریم:

$$\begin{aligned} & |\langle X^*(A \#_\alpha B)Yy, x \rangle| = | \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}} Yy, A^{\frac{1}{2}} Xx \rangle | \\ & \leq \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Yy, A^{\frac{1}{2}} Yy \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Xx, A^{\frac{1}{2}} Xx \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} Yy \right\|^{1-\alpha} \left\| A^{\frac{1}{2}} Xx \right\|^{1-\alpha} \\ & = \langle Y^* B Yy, y \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle X^* B Xx, x \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle Y^* A Yy, y \rangle^{\frac{1-\alpha}{2}} \langle X^* A Xx, x \rangle^{\frac{1-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

حال اگر از طرفین نسبت به همه بردارهای واحد  $\mathcal{H}$  سوپریم بگیریم، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

با قرار دادن  $X = Y = I$  در نامساوی قضیه ۲، نتیجه ۳ به دست می‌آید:

**نتیجه ۳.** فرض کنید  $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت برای هر  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|A \#_\alpha B\| \leq \|A\|^{(1-\alpha)} \|B\|^\alpha.$$

همچنین با فرض  $\alpha = \frac{1}{2}$  در نامساوی قضیه ۲، نتیجه می‌شود:

نتیجه ۴. فرض کنید  $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند. در این صورت

$$\|X^*(A \# B)Y\|^4 \leq \|X^*AX\| \|Y^*AY\| \|X^*BX\| \|Y^*BY\|.$$

به‌ازای  $X = Y$  در نامساوی قضیه ۲، داریم:

نتیجه ۵. اگر  $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند، آن‌گاه به‌ازای هر

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)X\| \leq \|X^*AX\|^{1-\alpha} \|X^*BX\|^{\alpha}. \quad (۴)$$

همچنین شکل وارونه‌ای برای نامساوی (۴) می‌توان به‌دست آورد. برای این منظور، به عکس قضیه هولدر-مک‌کارتی (قضیه ۵) به صورت قضیه ۶ نیاز داریم.

قضیه ۶. فرض کنید  $A$  یک عملگر مثبت روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشد به طوری که  $0 \leq mI \leq A \leq MI$  در این صورت برای هر  $x \in \mathcal{H}$  و  $0 < p < 1$  داریم

$$\langle A^p x, x \rangle \geq K \left( \frac{M}{m}, p \right) \langle Ax, x \rangle^p \|x\|^{2-2p},$$

$$K(h, p) = \frac{1}{h-1} \cdot \frac{h^p-h}{p-1} \left( \frac{p-1}{h^p-h} \cdot \frac{h^p-1}{p} \right)^p$$

با روشی مشابه قضیه ۲ و به کار بردن این قضیه، شکل وارونه‌ای برای نامساوی (۱) به صورت قضیه ۷ حاصل می‌شود. قضیه ۷. اگر  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشند و  $m$  و  $M$  دو عدد مثبت حقیقی باشند که

$$0 < mA \leq B \leq MA$$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)X\| \geq K \left( \frac{M}{m}, \alpha \right) \|X^*AX\|^{1-\alpha} \|X^*BX\|^{\alpha}.$$

در قضیه ۸ تعمیمی از صورت عملگری نامساوی یانگ با استفاده از نرم عملگری داده می‌شود.

قضیه ۸. فرض کنید  $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند. در این صورت برای هر  $m = 1, 2, \dots$  و هر  $r \geq 1$  و هر  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)Y\|^{rm} \leq (\|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\|^m - \Omega(X))^{\frac{1}{2}} \\ \times (\|\alpha(Y^*BY)^r + (1-\alpha)(Y^*AY)^r\|^m - \Omega(Y))^{\frac{1}{2}},$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2 \cdot \min \{ \alpha^m, (1-\alpha)^m \}.$$

برهان. بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ . به ترتیب با استفاده از لم ۱

قسمت‌های ب و الف و با نامساوی (۳)، برای هر بردار یکه  $x, y \in \mathcal{H}$  داریم:

$$|\langle X^*(A \#_{\alpha} B)Yy, x \rangle^{2rm}| = \left| \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}} Y y, A^{\frac{1}{2}} X x \rangle^{2rm} \right| \\ \leq \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} X x, A^{\frac{1}{2}} X x \rangle^{r m \alpha} \left\| A^{\frac{1}{2}} X x \right\|^{2rm(1-\alpha)} \\ \times \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Y y, A^{\frac{1}{2}} Y y \rangle^{r m \alpha} \left\| A^{\frac{1}{2}} Y y \right\|^{2rm(1-\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle X^*AXx, x \rangle^{rm(1-\alpha)} \langle X^*BXx, x \rangle^{rma} \times \langle Y^*BYy, y \rangle^{rma} \langle Y^*AYy, y \rangle^{rm(1-\alpha)} \\
 &\leq (\langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{1-\alpha} \langle (X^*BX)^r x, x \rangle^\alpha)^m \times (\langle (Y^*BY)^r y, y \rangle^\alpha \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle^{1-\alpha})^m \\
 &\leq ([\alpha \langle (X^*BX)^r x, x \rangle + (1-\alpha) \langle (X^*AX)^r x, x \rangle]^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2) \\
 &\quad \times ([\alpha \langle (Y^*BY)^r y, y \rangle + (1-\alpha) \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle]^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (Y^*BY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}})^2) \\
 &= [([\alpha (X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r]x, x)^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2] \\
 &\quad \times [([\alpha (Y^*BY)^r + (1-\alpha)(Y^*AY)^r]y, y)^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (Y^*BY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}})^2].
 \end{aligned}$$

حال با سوپریمم گرفتن از طرفین نامساوی نسبت به همه بردارهای واحد  $\mathcal{H}$  نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.  
**نتیجه ۹.** فرض کنید  $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت برای هر  $m = 1, 2, \dots$  و  $r \geq 1$

$$\|X^*(A \#_\alpha B)X\|^{rm} \leq \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\|^m - \Omega(X)$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2 \cdot \min\{\alpha^m, (1-\alpha)^m\}.$$

**نتیجه ۱۰.** فرض کنید  $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند،  $r \geq 1$  و  $0 \leq \alpha \leq 1$  در این صورت

$$\|X^*(A \#_\alpha B)X\|^r \leq \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\|^r - \Omega(X)$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} \left( \sqrt{\langle (X^*BX)^r x, x \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x, x \rangle} \right)^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

با قرار دادن  $X = I$  داریم:

**نتیجه ۱۱.** فرض کنید  $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند و  $0 \leq \alpha \leq 1$  در این صورت

$$\|A \#_\alpha B\| \leq \|\alpha B + (1-\alpha)A\| - \Omega$$

که در آن

$$\Omega = \inf_{\|x\|=1} (\sqrt{\langle Bx, x \rangle} - \sqrt{\langle Ax, x \rangle})^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

در گزاره ۱۲ شرطی لازم و کافی برای آن که در نتیجه ۱۰،  $\Omega(X) > 0$  ارائه می‌دهیم:

**گزاره ۱۲.** فرض کنید  $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  به طوری که  $A$  و  $B$  دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند،  $r \geq 1$  و  $\alpha \in [0, 1]$

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\sqrt{\langle (X^*BX)^r x, x \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x, x \rangle})^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

در این صورت

$$\Omega(X) > 0 \Leftrightarrow 0 \notin \overline{W((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)}.$$

**برهان.** از آنجا که بزرگ‌ترین کران پایین یک مجموعه نقطه حدی آن نیز هست، بنا براین واضح است که

$$\Omega(X) = 0 \text{ اگر و تنها اگر دنباله } \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ موجود باشد که}$$

$$\xi_n = (\sqrt{\langle (X^*BX)^r x_n, x_n \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x_n, x_n \rangle})^2$$

در آن  $x_n$ ها بردارهایی یکه در  $\mathcal{H}$  هستند و  $\xi_n \rightarrow 0$  این معادل است با این که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle ((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)x_n, x_n \rangle = 0.$$

یا به عبارت دیگر

$$0 \in \overline{W((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)}.$$

در مثال ۱۳ نشان می‌دهیم  $\Omega(X) > 0$ .

**مثال ۱۳.** فرض کنیم  $r = 1$ ,  $X = I$ ,  $A = \text{diag}(1, 2)$  و  $B = \text{diag}(6, 7)$ . در این صورت

$$W(B - A) = [5, 6].$$

پس بنا به گزاره ۱۲ داریم  $\Omega(X) > 0$ .

### منابع

1. Ando T., Li C.-K., Mathias R., "Geometric means", *Linear Algebra Appl.*, 385 (2004) 305-334.
2. Fujii J. I., Fujii M., Nakamura M., Pecaric J., Seo Y., "A reverse inequality for the weighted geometric mean due to Lawson-Lim", *Linear Algebra Appl.*, 427 (2007) 272-284.
3. Furuta T., "Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities", *J. Inequal. Appl.*, 2 (1998) 137-148.
4. Gustafson K. E., Rao D. K. M., "Numerical Range: The Field of values of linear operators and matrices", Springer-Verlag, New York (1997).
5. Horn R. A., Johnson C. R., "Topics in Matrix Analysis", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1991).
6. Izumino S., Nakamura N., "Geometric means of positive operators II", *Sci. Math. Japan.*, 69 (2009) 35-44.
7. Kim S., Lim Y., "A converse inequality of higher order weighted arithmetic and geometric means of positive definite operators", *Linear Algebra Appl.*, 426 (2007) 490-496.
8. Kittaneh F., Manasrah Y., "Improved Young and Heinz inequalities for matrices", *J. Math. Anal. Appl.*, 361 (2010) 262-269.

9. Kubo F., Ando T., "Means of positive linear operators", *Math. Ann.*, 246 (1980) 205-224.
10. Lin C.S., Cho Y.J., "On Hölder-McCarthy-type inequalities with powers", *J. Korean Math. Soc.*, 39 (2002) 351-361.
11. Manasrah Y., Kittaneh F., "A generalization of two refined Young inequalities", *Positivity*, 19 (2015) 757-786.
12. Sheikhhosseini A., "A numerical radius version of the arithmetic-geometric mean of operators", *Filomat*, 30 (2016) 2139-2145.
13. Yamazaki T., "An extension of Kantorovich inequality to  $n$ -operators via the geometric mean by Ando-Li-Mathias", *Linear Algebra Appl.*, 416 (2006) 688-695.