

چند نامساوی میانگین هندسی وزن دار عملگری

عالمه شیخ حسینی*؛ دانشگاه شهید باهنر، بخش ریاضی محض
اسما ایلخانی‌زاده منش؛ دانشگاه ولی عصر، بخش ریاضی محض
مریم خسروی؛ دانشگاه شهید باهنر، بخش ریاضی محض

پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

دریافت ۹۵/۰۹/۰۳

چکیده

در این مقاله، با استفاده از نامساوی توسعه یافته هولدر- مک کارتی، چندین نامساوی در زمینه میانگین هندسی α -وزن دار ($0 \leq \alpha \leq 1$) دو عملگر مثبت بیان شده است. به‌ویژه ثابت شده است که اگر $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه به‌ازای هر $r \geq 1$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)Y\| \leq \|X^*AX\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|Y^*AY\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|X^*BX\|^{\frac{\alpha}{2}} \|Y^*BY\|^{\frac{\alpha}{2}}$$

و

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)X\|^r \leq \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\| - \Omega(X)$$

که در آن $\#_{\alpha}$ نمایانگر میانگین هندسی α -وزن دار است و

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\sqrt{\langle (X^*BX)^r x, x \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x, x \rangle})^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

واژه‌های کلیدی: نامساوی هولدر- مک کارتی، برد عددی، نرم عملگری، عملگر مثبت وارون‌پذیر

Mathematics Subject Classification [2010]: 15A60, 47A12, 47A63.

مقدمه و پیشینازها

فرض کنیم $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ فضای همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط \mathcal{H} با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ باشد. عملگر A را مثبت گوییم و می‌نویسیم $A \geq 0$ اگر $A = A^*$ (که در آن A^* عملگر الحاقی است) و برای هر $x \in \mathcal{H}$ ، $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. میانگین هندسی α -وزن دار $\#_{\alpha}$ برای $\alpha \in [0, 1]$ و عملگرهای مثبت وارون‌پذیر A و B بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$A \#_{\alpha} B = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}}.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $A \#_{\alpha} B = B \#_{1-\alpha} A$ در حالت $\alpha = \frac{1}{2}$ ، این تعریف همان میانگین هندسی معمول است. به‌علاوه اگر A و B وارون‌پذیر نباشند، می‌توان $A \#_{\alpha} B$ را بدین‌صورت

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A + \varepsilon I) \#_{\alpha} (B + \varepsilon I)$$

در توپولوژی قوی در نظر گرفت. مقالات زیادی به میانگین هندسی وزن دار در عملگرها و نامساوی‌های نرمی آن پرداخته‌اند [1], [2], [6], [7], [9], [12], [13].

اگر T یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت \mathcal{H} باشد، آن‌گاه برد عددی $W(T)$ عبارت است از تصویر دایره واحد تحت نگاشت $x \rightarrow \langle Tx, x \rangle$ به بیان دیگر

$$W(T) = \{ \langle Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \}.$$

در [4] و [5] و مراجع آن‌ها بعضی ویژگی‌های $W(T)$ بیان شده است.

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، شکل معمول نامساوی یانگ بیان می‌کند که برای هر $v \in [0, 1]$

$$a^v b^{1-v} \leq va + (1-v)b. \tag{۱}$$

در [8] کیتانه و ماناسرا نامساوی (۱،۱) را به صورت (۲) بهبود بخشیده‌اند:

$$a^v b^{1-v} + r_0(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq va + (1-v)b, \tag{۲}$$

که در آن $r_0 = \min \{v, 1-v\}$

اخیرا نیز ماناسرا و کیتانه [11] نامساوی (۲) را به صورت (۳) برای $m = 1, 2, \dots$ تعمیم دادند.

$$(a^v b^{1-v})^m + r_0^m (a^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}})^2 \leq (va + (1-v)b)^m, \tag{۳}$$

هدف از این مقاله ارائه کران بالا برای نرم عملگری میانگین هندسی وزن دار برای دو عملگر است.

نتایج اصلی

برای به دست آوردن نتیجه اصلی به لم مشهور ۱ نیاز داریم:

لم ۱. (نامساوی توسعه یافته هولدر- مک‌کارتی [10]) فرض کنید $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک عملگر مثبت باشد. در این

صورت برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ و هر عدد حقیقی مثبت γ داریم

$$|\langle Ax, y \rangle|^\gamma \leq \langle A^\gamma x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle A^\gamma y, y \rangle^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\gamma-1} \|y\|^{\gamma-1}$$

(آ) اگر $\gamma \geq 1$ آن‌گاه

$$|\langle A^\gamma x, y \rangle| \leq \langle Ax, x \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \langle Ay, y \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \|x\|^{1-\gamma} \|y\|^{1-\gamma}$$

(ب) اگر $0 < \gamma \leq 1$ آن‌گاه

قضیه ۲. فرض کنید $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت

برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|X^*(A \#_\alpha B)Y\| \leq \|X^*AX\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|Y^*AY\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|X^*BX\|^{\frac{\alpha}{2}} \|Y^*BY\|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

برهان. برای هر دو بردار واحد $x, y \in \mathcal{H}$ با استفاده از لم ۱ قسمت ب داریم:

$$\begin{aligned} & |\langle X^*(A \#_\alpha B)Yy, x \rangle| = | \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}} Yy, A^{\frac{1}{2}} Xx \rangle | \\ & \leq \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Yy, A^{\frac{1}{2}} Yy \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Xx, A^{\frac{1}{2}} Xx \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} Yy \right\|^{1-\alpha} \left\| A^{\frac{1}{2}} Xx \right\|^{1-\alpha} \\ & = \langle Y^* B Yy, y \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle X^* B Xx, x \rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle Y^* A Yy, y \rangle^{\frac{1-\alpha}{2}} \langle X^* A Xx, x \rangle^{\frac{1-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

حال اگر از طرفین نسبت به همه بردارهای واحد \mathcal{H} سوپریم بگیریم، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

با قرار دادن $X = Y = I$ در نامساوی قضیه ۲، نتیجه ۳ به دست می‌آید:

نتیجه ۳. فرض کنید $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|A \#_\alpha B\| \leq \|A\|^{(1-\alpha)} \|B\|^\alpha.$$

همچنین با فرض $\alpha = \frac{1}{2}$ در نامساوی قضیه ۲، نتیجه می‌شود:

نتیجه ۴. فرض کنید $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند. در این صورت

$$\|X^*(A \# B)Y\|^4 \leq \|X^*AX\| \|Y^*AY\| \|X^*BX\| \|Y^*BY\|.$$

به‌ازای $X = Y$ در نامساوی قضیه ۲، داریم:

نتیجه ۵. اگر $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند، آن‌گاه به‌ازای هر

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)X\| \leq \|X^*AX\|^{1-\alpha} \|X^*BX\|^{\alpha}. \quad (۴)$$

همچنین شکل وارونه‌ای برای نامساوی (۴) می‌توان به‌دست آورد. برای این منظور، به عکس قضیه هولدر-مک‌کارتی

(قضیه ۵) به صورت قضیه ۶ نیاز داریم.

قضیه ۶. فرض کنید A یک عملگر مثبت روی فضای هیلبرت \mathcal{H} باشد به طوری که $0 \leq mI \leq A \leq MI$ در این صورت برای هر $x \in \mathcal{H}$ و $0 < p < 1$ داریم

$$\langle A^p x, x \rangle \geq K \left(\frac{M}{m}, p \right) \langle Ax, x \rangle^p \|x\|^{2-2p},$$

$$K(h, p) = \frac{1}{h-1} \cdot \frac{h^p-h}{p-1} \left(\frac{p-1}{h^p-h} \cdot \frac{h^p-1}{p} \right)^p$$

با روشی مشابه قضیه ۲ و به‌کار بردن این قضیه، شکل وارونه‌ای برای نامساوی (۱) به صورت قضیه ۷ حاصل می‌شود.

قضیه ۷. اگر A و B دو عملگر مثبت روی فضای هیلبرت \mathcal{H} باشند و m و M دو عدد مثبت حقیقی باشند که

$$0 < mA \leq B \leq MA$$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)X\| \geq K \left(\frac{M}{m}, \alpha \right) \|X^*AX\|^{1-\alpha} \|X^*BX\|^{\alpha}.$$

در قضیه ۸ تعمیمی از صورت عملگری نامساوی یانگ با استفاده از نرم عملگری داده می‌شود.

قضیه ۸. فرض کنید $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند. در این صورت

برای هر $m = 1, 2, \dots$ و هر $r \geq 1$ و هر $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|X^*(A \#_{\alpha} B)Y\|^{rm} \leq (\|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\|^m - \Omega(X))^{\frac{1}{2}} \\ \times (\|\alpha(Y^*BY)^r + (1-\alpha)(Y^*AY)^r\|^m - \Omega(Y))^{\frac{1}{2}},$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2 \cdot \min \{ \alpha^m, (1-\alpha)^m \}.$$

برهان. بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ به ترتیب با استفاده از لم ۱

قسمت‌های ب و الف و با نامساوی (۳)، برای هر بردار یکه $x, y \in \mathcal{H}$ داریم:

$$|\langle X^*(A \#_{\alpha} B)Yy, x \rangle^{2rm}| = \left| \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}} Y y, A^{\frac{1}{2}} X x \rangle^{2rm} \right| \\ \leq \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} X x, A^{\frac{1}{2}} X x \rangle^{r m \alpha} \left\| A^{\frac{1}{2}} X x \right\|^{2rm(1-\alpha)} \\ \times \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Y y, A^{\frac{1}{2}} Y y \rangle^{r m \alpha} \left\| A^{\frac{1}{2}} Y y \right\|^{2rm(1-\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle X^*AXx, x \rangle^{rm(1-\alpha)} \langle X^*BXx, x \rangle^{r\alpha} \times \langle Y^*BYy, y \rangle^{r\alpha} \langle Y^*AYy, y \rangle^{rm(1-\alpha)} \\
 &\leq (\langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{1-\alpha} \langle (X^*BX)^r x, x \rangle^\alpha)^m \times (\langle (Y^*BY)^r y, y \rangle^\alpha \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle^{1-\alpha})^m \\
 &\leq ([\alpha \langle (X^*BX)^r x, x \rangle + (1-\alpha) \langle (X^*AX)^r x, x \rangle]^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2) \\
 &\quad \times ([\alpha \langle (Y^*BY)^r y, y \rangle + (1-\alpha) \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle]^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (Y^*BY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}})^2) \\
 &= [([\alpha (X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r]x, x)^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2] \\
 &\quad \times [([\alpha (Y^*BY)^r + (1-\alpha)(Y^*AY)^r]y, y)^m \\
 &\quad - \alpha^m (\langle (Y^*BY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (Y^*AY)^r y, y \rangle^{\frac{m}{2}})^2].
 \end{aligned}$$

حال با سوپریمم گرفتن از طرفین نامساوی نسبت به همه بردارهای واحد \mathcal{H} نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.
نتیجه ۹. فرض کنید $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند. در این صورت برای هر $m = 1, 2, \dots$ و $r \geq 1$

$$\|X^*(A \#_\alpha B)X\|^{rm} \leq \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\|^m - \Omega(X)$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\langle (X^*BX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x \rangle^{\frac{m}{2}})^2 \cdot \min\{\alpha^m, (1-\alpha)^m\}.$$

نتیجه ۱۰. فرض کنید $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند، $r \geq 1$ و $0 \leq \alpha \leq 1$ در این صورت

$$\|X^*(A \#_\alpha B)X\|^r \leq \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\| - \Omega(X)$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} \left(\sqrt{\langle (X^*BX)^r x, x \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x, x \rangle} \right)^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

با قرار دادن $X = I$ داریم:

نتیجه ۱۱. فرض کنید $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند و $0 \leq \alpha \leq 1$ در این صورت

$$\|A \#_\alpha B\| \leq \|\alpha B + (1-\alpha)A\| - \Omega$$

که در آن

$$\Omega = \inf_{\|x\|=1} (\sqrt{\langle Bx, x \rangle} - \sqrt{\langle Ax, x \rangle})^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

در گزاره ۱۲ شرطی لازم و کافی برای آن که در نتیجه ۱۰، $\Omega(X) > 0$ ارائه می‌دهیم:

گزاره ۱۲. فرض کنید $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به طوری که A و B دو عملگر مثبت وارون پذیر باشند، $r \geq 1$ و $\alpha \in [0, 1]$

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1} (\sqrt{\langle (X^*BX)^r x, x \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x, x \rangle})^2 \cdot \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

در این صورت

$$\Omega(X) > 0 \Leftrightarrow 0 \notin \overline{W((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)}.$$

برهان. از آنجاکه بزرگترین کران پایین یک مجموعه نقطه حدی آن نیز هست، بنا براین واضح است که

$$\Omega(X) = 0 \text{ اگر و تنها اگر دنباله } \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ موجود باشد که}$$

$$\xi_n = (\sqrt{\langle (X^*BX)^r x_n, x_n \rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x_n, x_n \rangle})^2$$

در آن x_n ها بردارهایی یکه در \mathcal{H} هستند و $\xi_n \rightarrow 0$ این معادل است با این که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle ((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)x_n, x_n \rangle = 0.$$

یا به عبارت دیگر

$$0 \in \overline{W((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)}.$$

در مثال ۱۳ نشان می دهیم $\Omega(X) > 0$.

مثال ۱۳. فرض کنیم $X = I$, $r = 1$, $A = \text{diag}(1,2)$ و $B = \text{diag}(6,7)$. در این صورت

$$W(B - A) = [5,6].$$

پس بنا به گزاره ۱۲ داریم $\Omega(X) > 0$.

منابع

1. Ando T., Li C.-K., Mathias R., "Geometric means", Linear Algebra Appl., 385 (2004) 305-334.
2. Fujii J. I., Fujii M., Nakamura M., Pecaric J., Seo Y., "A reverse inequality for the weightedgeometric mean due to Lawson-Lim", Linear Algebra Appl., 427 (2007) 272-284.
3. Furuta T., "Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities", J. Inequal. Appl., 2 (1998) 137-148.
4. Gustafson K. E., Rao D. K. M., "Numerical Range: The Field of values of linear operators and matrices", Springer- Verlag, New York (1997).
5. Horn R. A., Johnson C. R., "Topics in Matrix Analysis", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1991).
6. Izumino S., Nakamura N., "Geometric means of positive operators II", Sci. Math. Japan., 69 (2009) 35-44.
7. Kim S., Lim Y., "A converse inequality of higher order weighted arithmetic and geometric means of positive definite operators", Linear Algebra Appl., 426 (2007) 490-496.
8. Kittaneh F., Manasrah Y., "Improved Young and Heinz inequalities for matrices", J. Math. Anal. Appl., 361 (2010) 262-269.

9. Kubo F., Ando T., "Means of positive linear operators", *Math. Ann.*, 246 (1980) 205-224.
10. Lin C.S., Cho Y.J., "On Hölder-McCarthy-type inequalities with powers", *J. Korean Math. Soc.*, 39 (2002) 351-361.
11. Manasrah Y., Kittaneh F., "A generalization of two refined Young inequalities", *Positivity*, 19 (2015) 757-786.
12. Sheikhhosseini A., "A numerical radius version of the arithmetic-geometric mean of operators", *Filomat*, 30 (2016) 2139-2145.
13. Yamazaki T., "An extension of Kantorovich inequality to n -operators via the geometric mean by Ando-Li-Mathias", *Linear Algebra Appl.*, 416 (2006) 688-695.