برآورد پارامتر نسبت در توزیع دوجمله‌ای با استفاده از توزیع پیشین تعدیل شده

حسن اسفندیاری‌فر*؛ دانشگاه افسری امام علی (ع)
پرویز نصیری، علی شادرخ؛ دانشگاه پیام نور
موسی گلعلی‌زاده لهی؛ دانشگاه تربیت مدرس

دریافت ۹۴/۷/۳ پذیرش ۹۵/۲/۱۲

چکیده

از دیرباز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامتر نسبت در توزیع‌های برنولی و دوجمله‌ای عرضه شده است. از روش‌های برآورد پارامتر، روش بیز، مبتنی بر استفاده از توزیع‌های پیشین است، که انتخاب معقول آن‌ها روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر پسین بیزی دارد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزهٔ تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر باعث افزایش خطا و بزرگ شدن معیارهای مقایسه می‌شود. بنابراین تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. از این رو، در این مقاله توزیع پیشین تعدیل شدهٔ مناسب برای پارامتر توزیع دو جمله‌ای عرضه و با اعمال شرایطی خاص روی ابر پارامترهای توزیع پیشین، برآوردی کارا باعنوان برآورد بیزی مورد انتظار، که به اختصار E-بیز نامیده می‌شود، معرفی می‌شود. در پایان برای ارزیابی و مقایسهٔ براوردگرها با استفاده از بررسی‌های شبیه‌سازی و معیار میانگین توان دوم خطا نتایج تجزیه و تحلیل شده و روش‌های مزبور در مثالی واقعی به‌کار گرفته می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع‌های پیشین، برآورد بیز، برآورد E-بیز،برآورد ماکسیمم درست‌نمایی ، میانگین توان دوم خطا

مقدمه

برآورد پارامترهای یک توزیع از مباحث مهم استنباط آماری است که مورد توجه محققان بیشماری قرار گرفته است. این امر معمولاً با دو روی‌کرد فراوانی‌گرا و بیز انجام می‌پذیرد. بنا به دیدگاه دوم، برآوردگر بیزی با معرفی یک توزیع پیشین و ترکیب آن با تابع درست‌نمایی منجر به محاسبه توزیع پسین شده و همین توزیع مبنای استنباط راجع به پارامتر بررسی می‌شود. انتظار می‌رود هرچه میزان اطلاعات پیشین راجع به پارامتر افزایش یابد، تابع چگالی پسین حاصل رفتار تصادفی پارامتر را واقعی‌تر توصیف می‌کند. انتخاب توزیع پیشین خود پیشینه بسیار طولانی دارد. لیندلی و اسمیت [۱] بحث توزیع پیشین سلسله مراتبی را مطرح و سال‌ها بعد هان [۲] این موضوع را بسط بیش‌تری داد. سپس هان [۳] روش جدیدی به‌نام روش بیزی مورد انتظار[1] را، که به اختصار E-بیز نامیده می‌شود، معرفی کرد. ادامه فعالیت هان منجر به مجموعه مقالاتی برای تشریح بیش‌تر ایده‌اش در مسائلی مانند پیش‌بینی مدل امنیت سرمایه-گذاری، احتمال تغییر وضعیت مجانبی و قابلیت اعتماد شد. برای اطلاع به منابع [۴]،[۵]، [۶]،[۷]،[۸] مراجعه شود. به پیروی از او، لی و همکاران آن ایـده را بـرای

*نویسندهٔ مسئول h50p50@yahoo.com

1. Expected Bayesian method
2. Burr

[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.1.4]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.1]

احتمال تغییر وضعیت در مباحث قابلیت اعتماد مهندسی به‌کار گرفتند ([۹]، [۱۰]). اخیراً، جاهین و اوکاشا [۱۱] این روش را برای مدل بور[۲] و اوکاشا [۱۲] برای توزیع لوماکس به خدمت گرفتند. در این مقاله پس از معرفی توزیع پیشین برای پارامتر توزیع دوجمله‌ای و هم‌چنین معرفی توزیع پیشین و اعمال شرایط برای ابر پارامترهای پارامتر توزیع دوجمله‌ای، اقدام به برآورد E-بیز پارامتر توزیع دوجمله‌ای می‌شود. ساختار مقاله حاضر درشش بخش تشریح می‌شود. در بخش ۲ پس از ارائه برآورد ماکسیممی درست‌نمایی، برآورد بیز تحت تابع زیان توان دوم خطا و با استفاده از توزیع پیشین بتا ارائه می‌شود. در بخش ۳ با اعمال شرایط روی ابر پارامترهای توزیع پیشین بتا، برآورد E–بیز پارامتر توزیع دوجمله‌ای ارائه می‌شود. در بخش ۴ بررسی‌های شبیه‌سازی انجام و با استفاده از معیار میانگین توان دوم خطا،سه برآورد مزبور مقایسه شده و برآورد بهتر، برای مقادیر مختلف پارامتر، معرفی می‌شود. در بخش ۵ مقایسهٔ سه روش در یک مثال از داده‌های واقعی بیان می‌شود و در بخش ۶ نتایج به اختصار بیان می‌شود. شایان ذکر است که همهٔ محاسبات این مقاله با استفاده از نرم‌افزار R انجام شده است.

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و برآورد بیز

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع احتمال دوجمله‌ای زیر با پارامتر θ باشد:

$$\mathrm{P(X=x)}=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}\quad,\quad x=0,1,2,\dots,n\qquad 0<\theta<1 \tag{۱}$$

واضح است که $\widehat{\theta}_{ML}=\frac{X}{n}$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی است.

حال فرض کنید، از دیدگاه بیزی، پارامتر θ دارای تابع چگالی پیشین بتا باشد:

$$\pi(\theta)=\frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)}\qquad,\qquad 0<\theta<1\qquad a>0,b>0 \tag{۲}$$

که در آن

$$B(a,b)=\int_0^1\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta$$

می‌توان نشان داد که چگالی پسین θ به‌صورت:

$$\pi(\theta|x)=\frac{P(X=x|\theta)\pi(\theta)}{\int_0^1 P(X=x|\theta)\pi(\theta)d\theta}=\frac{\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{\int_0^1\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta}$$

$$=\frac{\theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n-x+b-1}}{B(x+a,n-x+b)} \tag{۳}$$

بنابراین توزیع پسین، یک توزیع بتا با پارامترهای $x+a$ و $n-x+b$ است و برآورد بیزی θ، تحت تابع زیان توان دوم خطا، برابر است با:

$$\hat{\theta}_B=E(\theta|x)=\frac{x+a}{n+a+b} \tag{۴}$$

برآورد E-بیز

در بخش دوم، ابر پارامترهای a و b معلوم فرض شدند. برای داشتن توزیع پسین واقعی‌تر می‌توان یک یا هردو ابرپارامتر a و b را متغیر تصادفی در نظر گرفت، که این موضوع بحث بیز سلسله مراتبی است. به این موضوع ابتدا لیندلی و اسمیت [۱] و سپس هان[۲] توجه کردند. هان [۲] برای رسیدن به توزیع پسین معقول‌تر، توزیع پیشین سلسله مراتبی را به‌صورت تابعی نزولی از θ معرفی کرد. با پیروی از هان، مشتق‌گیری از $\pi(\theta) = \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)}$ نسبت به θ منجر به‌عبارت

$$\frac{d\pi(\theta)}{d\theta} = \frac{\theta^{a-2}(1-\theta)^{b-2}}{B(a,b)}\big((a-1)(1-\theta)-(b-1)\theta\big) \quad (۵)$$

می‌شود. واضح است که شرط لازم نزولی بودن $\pi(\theta)$ منفی بودن کمیت $\frac{d\pi(\theta)}{d\theta}$ است چون $a > 0$, $b > 0$ و $0 < \theta < 1$ کافی است $b > 1$ و $0 < a \leq 1$، تا نزولی بودن $\pi(\theta)$ محقق شود. حال می‌توان برای a و b با توجه به محدودیت‌های مزبور و هم‌چنین بحث بیز سلسله مراتبی، توزیع مناسبت‌تری در نظر گرفت. برگر [۱۳] اعتقاد دارد که برای رسیدن به برآوردگری نیرومند نیازی به بزرگ اختیار کردن b نیست. بر این اساس، هان [۳] فرض می‌کند $1 < b \leq c$، که c عددی معلوم است. در این مقاله برای سادگی a=1 و b دارای توزیع یک‌نواخت روی بازهٔ (۱,c) با تابع چگالی احتمال $g(b) = \frac{1}{c-1}$ در نظر گرفته شده است. بنابراین،

$$\pi(\theta|a,b) = \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)}$$

$$\pi(\theta|a=1,b) = \frac{(1-\theta)^{b-1}}{B(1,b)}$$

$$\pi(\theta|b) = b(1-\theta)^{b-1}$$

$$\pi(\theta,b) = \pi(\theta|b)g(b) = \frac{b(1-\theta)^{b-1}}{c-1}$$

بنابراین توزیع پیشین مبتنی بر روش بیزی مورد انتظار یا E-بیز برابر است با:

$$\pi_E(\theta) = \frac{1}{C-1}\int_1^C b(1-\theta)^{b-1}db \qquad ,1 < b \leq c \qquad ,0 < \theta < 1 \quad (۶)$$

و توزیع پسین مبتنی بر این روش بدین‌صورت است:

$$\pi_E(\theta\,|x) = \frac{P(X=x|\theta)\pi_E(\theta)}{\int_0^1 P(X=x|\theta)\pi_E(\theta)d\theta} = \frac{\int_1^C b\theta^x(1-\theta)^{n-x+b-1}db}{\int_0^1\int_1^C b\theta^x(1-\theta)^{n-x+b-1}db\,d\theta} \quad (۷)$$

واضح است که تحت تابع زیان توان دوم خطا، برآورد E-بیز θ با محاسبه کمیت $E(\theta|x)$ به‌دست می‌آید. به‌طور دقیق‌تر:

$$\hat{\theta}_{EB} = E(\theta|x) = \frac{\int_1^C\int_0^1 b\theta^{x+1}(1-\theta)^{n-x+b-1}d\theta\,db}{\int_1^C\int_0^1 b\theta^{x}(1-\theta)^{n-x+b-1}d\theta\,db} \quad (۸)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.1.4]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.1]

اما

$$\int_1^C \int_0^1 b\theta^x (1-\theta)^{n-x+b-1}\, d\theta db =$$
$$\int_0^1 \theta^x (1-\theta)^{n-x} \int_1^c b\,(1-\theta)^{b-1}\, dbd\theta =$$
$$\int_0^1 \theta^x (1-\theta)^{n-x} (\int_1^C \frac{d((1-\theta)^b)}{d(1-\theta)} db) d\theta =$$
$$\int_0^1 \theta^x (1-\theta)^{n-x} (\frac{d}{d(1-\theta)} \int_1^c (1-\theta)^b\, db) d\theta =$$
$$\int_0^1 \theta^x (1-\theta)^{n-x} (\frac{d}{d(1-\theta)} [\frac{(1-\theta)^c-(1-\theta)}{\log(1-\theta)}]) d\theta =$$
$$\int_0^1 \theta^x (1-\theta)^{n-x} (\frac{(c(1-\theta)^{c-1}-1)\log(1-\theta)-(1-\theta)^{c-1}+1}{(\log(1-\theta))^2}) d\theta \qquad (۹)$$

با استفاده از روش انتگرال جزءبه‌جزء و انتخاب

$$u=\theta^x (1-\theta)^{n-x} \qquad , \qquad v=\frac{(1-\theta)-(1-\theta)^c}{\log(1-\theta)}$$

که نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1 \theta^x (1-\theta)^{n-x} (\frac{(c(1-\theta)^{c-1}-1)\log(1-\theta)-(1-\theta)^{c-1}+1}{(\log(1-\theta))^2}) d\theta =$$
$$\int_0^1 (-\log(1-\theta))^{-1}\,((1-\theta)-(1-\theta)^c)((x\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x}-(n-x)\theta^x(1-\theta)^{n-x-1})d\theta \quad (۱۰)$$

مقدار uv در انتگرال جزءبه‌جزء فوق به‌ازای حدود انتگرال و با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، برابر صفر می‌شود . بر طبق [۱۴]، مقدار $(-\log(1-\theta))^{-1}$ بدین‌صورت قابل بسط است:

$$(-\log(1-\theta))^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(-1)\theta^{m-1} \qquad (۱۱)$$

که چندجمله‌ای‌های $\rho_0(-1)=1$ و برای m≥1،(m-2)$\rho_m(-1)=n\psi_{m-1}$ که درآن $\psi_n(.)$ها،ضرایب استرلینگ نام دارند و دررابطهٔ (۱۲) صدق می‌کنند.

$$\psi_{n-1}(w) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\Big[H_n^{n-1} - \frac{w+2}{(n+2)}H_n^{n-2} + \frac{(w+2)(w+3)}{(n+2)(n+3)}H_n^{n-3} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{(w+2)(w+3)\ldots(w+n)}{(n+2)(n+3)\ldots(2n)}H_n^0\Big] \qquad (۱۲)$$

به‌طوری‌که H_n^m ها اعداد صحیح مثبت و دررابطهٔ بازگشتی (۱۳) صدق می‌کنند.

$$H_{n+1}^m = (2n+1-m)H_n^m + (n-m+1)H_n^{m-1}. \qquad (۱۳)$$

به‌طوری‌که $H_0^0 = H_{n+1}^n = 1, H_{n+1}^0 = 1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n+1)$.

به‌کمک روابط (۱۲) و(۱۳) می‌توان $\psi_n(.)$ها را به‌دست آورد. کاستلارس در[۱۴] شش $\psi_n(.)$ اول را محاسبه و بدین‌صورت ارائه کرده است.

$$\psi_0(w)=\frac{1}{2},\qquad \psi_1(w)=\frac{2+3w}{24}\ ,\qquad \psi_2(w)=\frac{w+w^2}{48},$$

$$\psi_3(w)=\frac{-8-10w+15w^2+15w^3}{5760}\ ,\qquad \psi_4(w)=\frac{-6w-7w^2+2w^3+3w^4}{11520}$$

$$\psi_5(w)=\frac{96+140w-224w^2-315w^3+63w^5}{2903040}$$

برای مشاهده جزییات بیش‌تر می‌توان به [۱۴] مراجعه کرد. با جای‌گذاری رابطۀ (۱۱) در رابطۀ (۱۰) داریم:

$$\int_0^1 (\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(-1)\theta^{m-1})((1-\theta)-(1-\theta)^c)(x\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x}-(n-x)\theta^x(1-\theta)^{n-x-1}))d\theta$$

از این رو، مخرج کسر رابطۀ (۸) بدین‌صورت است:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(-1)\{x\{B(m+x-1,n-x+2)-B(m+x-1,n-x+c+1)\}+ (n-x)\{B(m+x,n-x+c)-B(m+x,n-x+1)\}\} \qquad (۱۴)$$

که در آن($B(a,b$ تابع بتا است. با تکرار این روش و با جای‌گذاری θ^{x+1} به‌جای θ^x در رابطۀ (۹)، صورت کسر رابطۀ (۸) بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(-1)\{(x+1)\{B(m+x,n-x+2)-B(m+x,n-x+c+1)\}+ (n-x)\{B(m+x+1,n-x+c)-B(m+x+1,n-x+1)\}\} \qquad (۱۵)$$

در صورتی که

$$S_m=\{B(m+x,n-x+2)-B(m+x,n-x+c+1)$$

و

$$T_m=\{B(m+x,n-x+c)-B(m+x,n-x+1)\} \qquad (۱۴)$$

تعریف شوند, با جای‌گذاری آن‌ها در (۱۵) و سپس قرار دادن این روابط در (۸) داریم:

$$\hat{\theta}_{EB}=\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(-1)\{(x+1)S_m+(n-x)T_{m+1}\}}{\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(-1)\{xS_{m-1}+(n-x)T_m\}} \qquad (۱۶)$$

واضح است که برای محاسبۀ رابطه (۱۶) باید از روش‌های عددی استفاده کرد.از منظر دیگر، انتگرال

$$\int_1^C \int_0^1 b\theta^x (1-\theta)^{n-x+b-1}\, d\theta db$$

را می‌توان به‌صورت

$$\int_1^C bB(x+1, n-x+b)\, db$$

نیز نمایش داد که در آن $B(a\ ,b)$ تابع بتا است، به‌طوری‌که:

$$B(x+1, n-x+b) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-n+x-b)_k}{k!\,(x+1+k)}$$

که در آن نماد $(a)_n$ به‌صورت:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n-1)\,, \quad (a)_0 = 1$$

تعریف می‌شود. در نتیجه، رابط G (۸) را می‌توان به‌صورت

$$\hat{\theta}_{EB} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k!\,(x+2+k)}\int_1^c b(1-n+x-b)_k\, db)}{\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k!\,(x+1+k)}\int_1^c b(1-n+x-b)_k\, db)} \qquad (۱۷)$$

نیز نوشت. با توجه به این که برآوردگر شکل بسته‌ای ندارد، استفاده از روش‌های عددی برای محاسبهٔ مقدار آن ضروری است. برای مقایسهٔ کارایی برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی، بیز و E–بیز می‌توان میانگین توان دوم خطای آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{ML}) = \mathrm{E}\left(\frac{X}{n} - \theta\right)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_B) = \mathrm{E}\left(\frac{X+a}{n+a+b} - \theta\right)^2 = \frac{((a+b)^2-n)\theta^2 + \big(n-2a(a+b)\big)\theta + a^2}{(a+b+n)^2}$$

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{EB}) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k!\,(x+2+k)}\int_1^c b(1-n+x-b)_k\, db)}{\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k!\,(x+1+k)}\int_1^c b(1-n+x-b)_k\, db)} - \theta\right)^2, x \to X \qquad (۱۸)$$

اما چنان‌که رابطهٔ (۱۸) نشان می‌دهد میانگین توان دوم خطا برای برآورد E-بیز، تابعی صریح به‌دست نمی‌آید. درنتیجه مقایسهٔ این سه روش با روش‌های عددی و شبیه‌سازی انجام می‌گیرد که در بخش بعدی عرضه می‌شود.

شبیه‌سازی

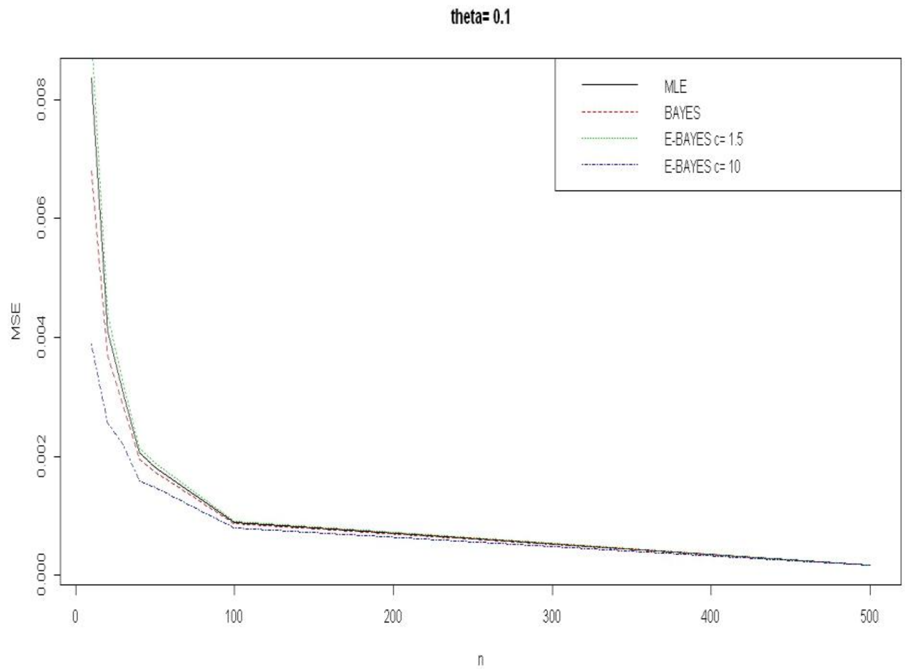
در این بخش برای برآورد پارامتر توزیع دوجمله‌ای به‌روش‌های مختلف، با استفاده ازنرم‌افزار R اقدام به شبیه‌سازی از توزیع دوجمله‌ای می‌شود و با تولید نمونه‌های به حجم ۵۰۰،۱۰۰،۵۰ (۱۰)۱۰=n از توزیع دوجمله‌ای و تکرار ۱۰۰۰

تایی این عمل برای هر حجم نمونه‌های مزبور، میانگین توان دوم خطای سه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی ، بیزوE-بیز مقایسه می‌شود. در این شبیه‌سازی مقادیر پارامتر ۰/۹ ، ۰/۵ ،۰/۱=θ و

$a = ۱$, $b = ۱/۰۰۱$ و همچنین $c = ۱/۵, ۱۰$ در نظر گرفته شده و نتایج آن در جدول‌های ۱ تا ۳ و شکل‌های ۱ تا ۳ آورده شده‌اند.

جدول ۱. میانگین توان دوم خطا براوردگرها برای ۰/۱= θ

n	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی		برآورد بیز		برآوردE-بیز		
	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	c
۱۰	۰/۰۹۷۳	۰/۰۰۸۶۵	۰/۰۹۶۶	۰/۰۰۷۰۲	۰/۱۶۰۹	۰/۰۰۹۴۶	۱/۵
					۰/۱۲۰۳	۰/۰۰۴۰۸	۱۰
۲۰	۰/۱۰۰۳	۰/۰۰۴۴۵	۰/۰۹۹۸	۰/۰۰۴۰۰	۰/۱۳۵۰	۰/۰۰۴۸۲	۱/۵
					۰/۱۱۲۸	۰/۰۰۲۸۴	۱۰
۳۰	۰/۱۰۰۱	۰/۰۰۲۶۵	۰/۰۹۹۸	۰/۰۰۲۴۷	۰/۱۲۴۱	۰/۰۰۲۸۸	۱/۵
					۰/۱۰۸۸	۰/۰۰۱۹۲	۱۰
۴۰	۰/۰۹۸۵	۰/۰۰۲۴۱	۰/۰۹۸۶	۰/۰۰۲۲۸	۰/۱۱۷۲	۰/۰۰۲۴۵	۱/۵
					۰/۱۰۵۷	۰/۰۰۱۸۴	۱۰۰
۵۰	۰/۱۰۰۵	۰/۰۰۱۷۵	۰/۱۰۰۳	۰/۰۰۱۶۸	۰/۱۱۵۳	۰/۰۰۱۸۴	۱/۵
					۰/۱۰۵۹	۰/۰۰۱۴۲	۱۰۰
۱۰۰	۰/۱۰۱۱	۰/۰۰۰۸۶	۰/۱۰۱۰	۰/۰۰۰۸۴	۰/۱۰۸۶	۰/۰۰۰۹۰	۱/۵
					۰/۱۰۳۳	۰/۰۰۰۷۸	۱۰
۵۰۰	۰/۱۰۰۴	۰/۰۰۰۱۸	۰/۱۰۰۴	۰/۰۰۰۱۸	۰/۱۰۲۰	۰/۰۰۰۱۸	۱/۵
					۰/۱۰۱۰	۰/۰۰۰۱۷	۱۰

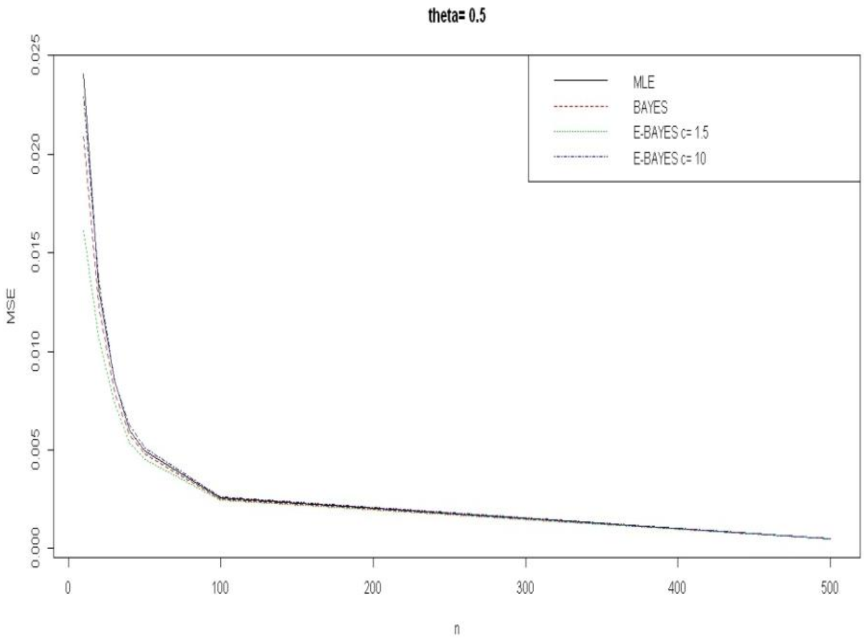


شکل۱. مقایسهٔ میانگین توان دوم خطا برای ۰/۱ = θ

نتایج جدول ۱ و نمایش هندسی شکل ۱ نشان می‌دهند که اگر نمونه کوچک باشد و مقدار اولیهٔ پارامتر به صفر نزدیک باشد، برآورد E-بیز، برای مقادیرنسبتا بزرگ c، دارای MSE کم‌تری است. این موضوع به‌لحاظ نظری درست به‌نظر می‌آید زیرا بحث E -بیز با نزولی بودن توزیع پیشین نسبت به پارامتر مرتبط است. در نتیجه، مقادیر ابتدایی پارامتر احتمال رخ‌دادن بیش‌تری دارد. با این حال، برای حجم نمونه‌های بزرگ تفاوت فاحشی بین سه روش برآورد نیست. بنابراین، توصیه می‌شود که در استنباط بیزی راجع به پارامتر توزیع دوجمله‌ای، وقتی اطلاعاتی در خصوص کوچک بودن مقدار پارامتر در دست است، از برآورد E-بیز با مقدار نسبتاً بزرگ c استفاده شود.

جدول۲. میانگین توان دوم خطا براوردگرها برای ۰/۵= θ

n	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی		برآورد بیز		برآوردE-بیز		
	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	c
۱۰	۰/۵۰۳۹	۰/۰۲۴۰۷	۰/۴۶۲۹	۰/۰۲۰۸۹	۰/۴۹۳۰	۰/۰۱۶۱۴	۱/۵
					۰/۴۲۰۰	۰/۰۲۲۸۹	۱۰
۲۰	۰/۴۹۹۰	۰/۰۱۳۰۷	۰/۴۷۷۷	۰/۰۱۲۲۴	۰/۴۹۳۵	۰/۰۱۰۶۳	۱/۵
					۰/۴۵۱۱	۰/۰۱۳۴۵	۱۰
۳۰	۰/۵۰۵۸	۰/۰۰۸۵۴	۰/۴۹۱۱	۰/۰۰۷۹۹	۰/۵۰۱۵	۰/۰۰۷۳۷	۱/۵
					۰/۴۷۱۹	۰/۰۰۸۸۴	۱۰
۴۰	۰/۵۰۰۱	۰/۰۰۲۴۱	۰/۴۸۹۱	۰/۰۰۵۸۰	۰/۴۹۷۱	۰/۰۰۵۳۹	۱/۵
					۰/۴۷۴۲	۰/۰۰۶۲۵	۱۰
۵۰	۰/۵۰۰۳	۰/۰۰۴۹۴	۰/۴۹۱۵	۰/۰۰۴۸۰	۰/۴۹۷۹	۰/۰۰۴۵۳	۱/۵
					۰/۴۸۸۸	۰/۰۰۵۱۰	۱۰
۱۰۰	۰/۴۹۹۳	۰/۰۰۲۵۶	۰/۴۹۴۹	۰/۰۰۲۵۲	۰/۴۹۸۹	**۰/۰۰۰۹۰**	۱/۵
					۰/۴۸۸۶	**۰/۰۰۰۷۸**	۱۰
۵۰۰	۰/۴۹۹۴	۰/۰۰۰۵۱	۰/۴۹۸۵	۰/۰۰۰۵۱	۰/۴۹۹۲	**۰/۰۰۰۵۰**	۱/۵
					۰/۴۹۷۲	۰/۰۰۰۵۱	۱۰

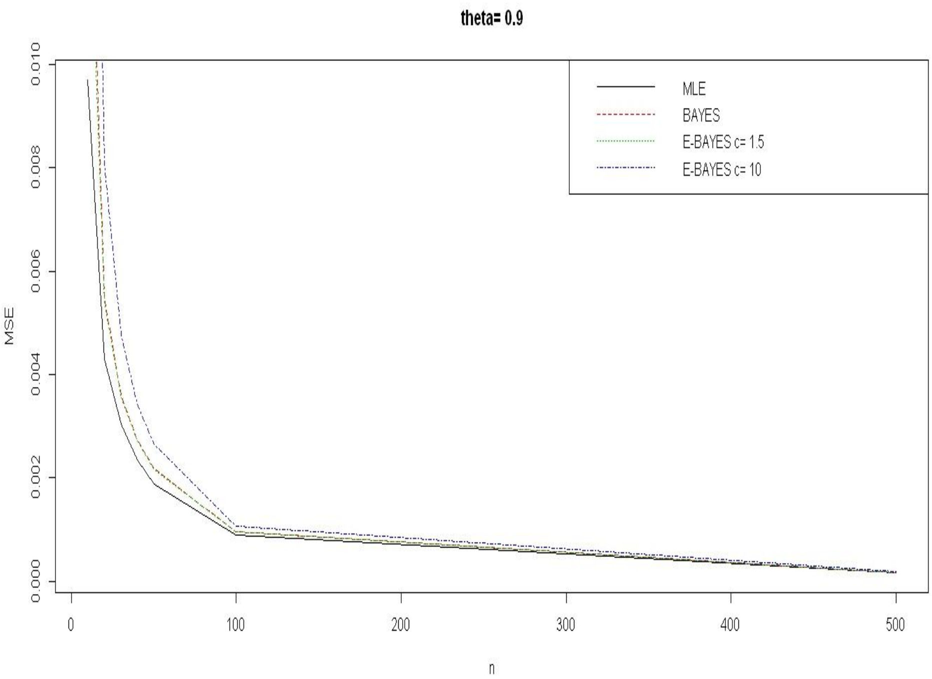


شکل۲. مقایسهٔ میانگین توان دوم خطا برای ۰/۵ = θ

مقادیر ارائه شده در جدول ۲ و نمودار شکل ۲ نشان می‌دهند که وقتی مقدار اولیهٔ پارامتر توزیع دوجمله‌ای به ۰/۵ نزدیک است، در نمونه‌های کوچک و مقادیر نزدیک به یک برای c، برآورد E- بیز دارای MSE کم‌تری است اما اگرc نسبتاً بزرگ باشد برآورد بیز بهتر عمل می‌کند. ضمن این‌که در صورت داشتن حجم زیاد نمونه، تمام روش‌های برآورد عملکرد تقریباً مشابهی دارند. بنابراین توصیه می‌شود که برای وقتی که مقدار پارامتر نسبت در توزیع دوجمله‌ای در همسایگی ۰/۵ است از برآورد E–بیز با مقادیر c نزدیک به یک استفاده شود.

جدول۳.میانگین توان دوم خطا براوردگرها برای θ =۰/۹

n	برآورد ماکسیمم درست نمایی		برآورد بیز		برآوردE-بیز		
	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	برآورد پارامتر	میانگین توان دوم خطا	c
۱۰	۰/۸۹۴۴	۰/۰۰۹۷۰	۰/۸۱۴۷	۰/۰۱۵۱۲	۰/۸۱۳۵	۰/۰۱۴۰۵	۱/۵
					۰/۷۶۹۷	۰/۰۲۵۷۳	۱۰
۲۰	۰/۹۰۱۸	۰/۰۰۴۲۹	۰/۸۵۹۵	۰/۰۰۵۴۹	۰/۸۵۶۷	۰/۰۰۵۳۹	۱/۵
					۰/۸۳۷۷	۰/۰۰۸۰۷	۱۰
۳۰	۰/۹۰۱۰	۰/۰۰۳۰۳	۰/۸۷۲۳	۰/۰۰۳۵۸	۰/۸۷۰۰	۰/۰۰۳۵۵	۱/۵
					۰/۸۵۸۰	۰/۰۰۴۷۶	۱۰
۴۰	۰/۸۹۹۴	۰/۰۰۲۳۶	۰/۸۷۷۷	۰/۰۰۲۷۳	۰/۸۷۵۸	۰/۰۰۲۷۲	۱۰
					۰/۸۶۷۰	۰/۰۰۳۴۳	۱۰
۵۰	۰/۸۹۸۳	۰/۰۰۱۸۸	۰/۸۸۰۹	۰/۰/۰۰۲۱۷	۰/۸۷۹۲	۰/۰۰۲۱۶	۱/۵
					۰/۸۷۲۳	۰/۰۰۲۶۴	۱۰
۱۰۰	۰/۹۰۰۱	۰/۰۰۰۸۹	۰/۸۹۱۳	۰/۰۰۰۵۹	۰/۸۹۰۳	۰/۰۰۰۹۵	۱/۵
					۰/۸۸۷۰	۰/۰۰۰۱۰	۱۰
۵۰۰	۰/۸۹۹۵	۰/۰۰۰۱۷	۰/۸۹۷۷	۰/۰۰۰۱۷	۰/۸۹۷۵	۰/۰۰۰۱۷	۱/۵
					۰/۸۹۶۹	**۰/۰۰۰۱۸**	۱۰



شکل۳. مقایسه میانگین توان دوم خطا برای۰/۹= θ

[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.1.4]
[DOI: 10.29252/mmr.2.2.1]

مقادیر ارائه شده در جدول ۳ و نمودار شکل ۳ نشان می‌دهند که وقتی مقداراولیهٔ پارامتر توزیع دوجمله‌ای به یک نزدیک است، در نمونه‌های کوچک، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی دارای MSE کم‌تری است. وهمانند دو حالت قبل در صورت داشتن حجم زیاد نمونه، عملکرد تمام روش‌های برآورد تقریباً مشابهند. بنابراین بهتر است که برای وقتی که مقدار پارامتر نسبت در توزیع دوجمله‌ای نزدیک به یک است ، از برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی استفاده شود.

تحلیل کاربردی یک مثال واقعی

تعداد مراجعه کننده به کلینک پزشکی بدین‌صورت ثبت شده است [۱۵]:

۳	۲	۴	۲	۳	۰	۲	۱	۴	۵
۳	۲	۳	۵	۵	۰	۳	۲	۱	۲
۴	۴	۶	۵	۴	۰	۲	۳	۶	۳

انتظار بر این است که تعداد افراد مراجعه کننده کم‌تر یا مساوی ۲ با تعداد افراد بیش‌تر یا مساوی ۳ برابر است. برای برآورد نسبت، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، بیز و E- بیز به‌همراه میانگین توان دوم خطا به‌صورت جدول ۴ به‌دست آمده است.

جدول۴. برآورد نسبت و میانگین توان دوم خطا

روش ماکسیمم درست نمایی		روش بیز		روش E-بیز		
برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	برآورد	میانگین توان دوم خطا	c
۰/۶	۰/۰۱	۰/۵۹۳۷۳۱۴	۰/۰۰۸۷۸	۰/۵۶۱۷۴۴۴	۰/۰۰۳۸۱	۱/۵
				۰/۵۸۹۱۹۹	۰/۰۰۷۹۵	۱۰

چنان‌که جدول نشان می‌دهد برای مواقعی که انتظار می رود پارامتر نسبت به ۰/۵ نزدیک باشد برآوردگر E– بیز با مقادیر c نزدیک به یک میانگین توان دوم خطای کم‌تری دارد و نسبت برآورد شده به مقدار واقعی و مورد انتظار، نزدیک‌تر است.

نتیجه‌گیری

چنان‌که جدول‌های ۱ تا ۳ و نمودارهای مربوط نشان می‌دهد، بسته به این‌که مقادیر پارامتر نسبت در چه محدوده‌ای باشد و به صفر یا یک نزدیک باشد، برآوردگر مناسب تغییر می‌کند. در این مقاله معیار بررسی و مقایسه این برآورد کننده‌ها، معیار میانگین توان دوم خطاست. در واقع کارایی این برآوردگرها با معیار توان دوم خطا بررسی می‌شود و به‌علت این‌که میانگین توان دوم خطا برای برآورد E-بیز، تابع صریح از پارامترها نبود و فرم بسته‌ای نداشت از روش‌های شبیه‌سازی و نرم‌افزاری استفاده شد. نتیجه به‌دست آمده بیان‌کننده این موضوع است که با افزایش حجم نمونه سه برآوردگر معرفی شده، کارایی مشابهی دارند ولی در نمونه‌های کوچک برای مقادیر نزدیک به یک پارامتر نسبت، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی عملکرد بهتری دارد و هر اندازه مقدار پارامتر نسبت، به مقادیر کم و متوسط

نزدیک باشد برآوردگرهای بیزی و E-بیز دارای میانگین توان دوم خطای کم‌تری هستند. بنابراین روش‌های مبتنی بر نگرش بیزی در مواردی که احتمال می رود پارامتر نسبت، بزرگ نباشد توصیه می شود.

منابع

1. Lindley D.V., Smith A.F.M., "Bayes estimates for the linear model، Journal of the Royal Statistical Society", Series B، 34 (1)(1972) 1-41.
2. Han M., "The structure of hierarchical prior distribution and its application", Chines Operations research and management science، 6 (3) (1997) 31-40.
3. Han M. , Ding Y., "Synthesized expected Bayesian method of parametric estimate", Journal of systems science and systems engineering، 13 (1) (2004) 98-111.
4. Han M., "Expected Bayes method for forecast of security investment J., Research and management science, 14 (5) (2005) 98-102.
5. Han M., "E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of Estate probability J.", operations research and management science, 15 (5) (2006) 70-74.
6. Han M., "E-Bayesian estimation of failure probability and its application", Mathematical and computer modeling, 45 (2007) 1272-1279.
7. Han M., "E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of rate", Applied mathematical modeling, 33 (2009) 1915-1922.
8. Han M., "E-Bayesian estimation of the reliability derived from binomial distribution", Applied mathematical modeling, 35 (2011) 2419-2424.
9. Wang J., Li D., Chen D., "E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of system reliability parameter", System engineering, 3 (2012) 282-28.9
10. Li D., Wang J., Chen D., "E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation for Estate probability in engineering", System engineering, 5 (2012) 349-354.
11. Jaheen Z. F., Okasha H. M., "E-Bayesian estimation for Burr type XII model based on type-2 censoring", Applied mathematical modeling, 35 (2011) 4730-4737.
12. Okasha H. M., "E-Bayesian estimation for the Lomax distribution based on type-II censored data", Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22 (2014)489-495.
13. Berger J. O., "Statistical decision theory and Bayesian analysis (second Ed)", New York, springer-verlag (1985).

14. Castellares F., Lemonte A. J., "A new generalized Weibull distribution generated by gamma random variables", Journal of the Egyptian Mathematical Society, In press, accepted 31 March (2014).

15. Hogg R. V., Tanis E. A., "Probability and statistical inference, prentice Hall, Upper Saddle River", NJ 07458 (2001).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1395.2.2.1.4]

[DOI: 10.29252/mmr.2.2.1]