

## صورت بهنجار مداری خانواده‌ای از دستگاه‌های تکین هایف - صفر

مجید گازر، نسرین صدری\*؛

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی

پذیرش ۹۴/۷/۲۲

دریافت ۹۳/۵/۲۶

### چکیده

نظریه صورت بهنجار کوتاه شده و تجزیه و تحلیل دستگاه‌های تکین (منفرد)، ابزاری بسیار قوی برای درک مناسب از رفتارها و انشعاب‌ها موضعی دستگاه‌های تکین هستند. در عین حال دینامیک صورت بهنجار کوتاه شده و دینامیک دستگاه اصلی همیشه هم‌ارز نیستند و آگاهی نداشتن نسبت به این موضوع، می‌تواند گمراه کننده باشد. در ابتدای پژوهش این موضوع را به تفصیل توضیح می‌دهیم و ابزارهای مفیدی به منظور بررسی آگاهانه انشعاب‌ها صورت بهنجار دستگاه‌های تکین هایف-صفر عرضه می‌کنیم. دستگاه دینامیکی  $\dot{X}=F(X, \mu)$  را در نظر گرفته به طوری که قسمت خطی آن دارای یک جفت مقدار ویژه موهومی و مقدار ویژه صفر باشد (تکینی (انفراد) هایف صفر). اخیراً ساده‌ترین صورت بهنجار این دستگاه تکین، از طریق نظریه نمایش جبر لی  $sl(2)$  و تجزیه فضا به زیر فضاهای پایستار و ناپایستار به دست آمده است. صورت بهنجار این دستگاه تکین، به سه حالت کلی تقسیم می‌شود. در این مقاله به یکی از این سه حالت می‌پردازیم و نتایج به دست آمده به صورت بهنجار مداری توسعه می‌دهیم. هم‌چنین صرف نظر از تکنیک‌های محاسباتی، روابطی به منظور محاسبه ضرایب صورت بهنجار تا مرتبه چهار که در مسئله‌های کاربردی حائز اهمیت هستند، عرضه می‌کنیم. در نهایت با استفاده از نتایج به دست آمده توضیح می‌دهیم که با استفاده از محاسبه صورت بهنجار دستگاه‌های تکین هایف-صفر و نظریه نمایش  $sl(2)$  می‌توان تابع انرژی احتمالی چنین دستگاه‌هایی را تقریب زد.

**واژه‌های کلیدی:** دستگاه‌های دینامیکی، صورت بهنجار، صورت بهنجار مداری، تکینی هایف - صفر.

### مقدمه

پژوهش و بررسی انشعاب‌های دستگاه‌های دینامیکی از مسائل روز تحقیقاتی است. اما تجزیه و تحلیل دستگاه‌های غیرخطی کار دشواری است. از جمله ابزارهای مهم در ساده کردن دستگاه‌های دینامیکی، نظریه صورت بهنجار و خمینه مرکزی است. با استفاده از خمینه مرکزی، می‌توان بعد مسئله را کاهش داد. اما دشواری تجزیه و تحلیل دستگاه غیرخطی هم‌چنان باقی می‌ماند. نظریه صورت بهنجار از مؤثرترین راه‌ها برای تجزیه و تحلیل موضعی دستگاه‌های دینامیکی در اطراف نقاط تعادل و یا جواب‌های تناوبی است. از مزیت‌های مهم این روش، حفظ برخی خواص کیفی دستگاه است. صورت‌های بهنجار زمانی اهمیت بیش‌تری دارند که تقارن‌های احتمالی دستگاه اصلی را آشکار و حفظ کنند. این حقیقت از نظر ریاضی‌دانان برای بررسی انشعاب‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد [۱۷].

\*نویسنده مسئول n.sadri@math.iut.ac.ir

صورت بهنجار مرتبه اول که غالباً در کتب تخصصی مطرح می‌شوند، ساده‌ترین صورت بهنجار نیست از این‌رو، مفهوم صورت بهنجار مداری مطرح می‌شود. بسیاری از خواص کیفی و دینامیکی دستگاه جدید حاصل از محاسبه‌های صورت بهنجار با دستگاه اولیه یک‌سان هستند. بنابراین می‌توان با تجزیه و تحلیل صورت بهنجار، در مورد دستگاه اولیه نتیجه‌گیری کرد [۱۱]. در صورت بهنجار مداری علاوه بر تغییرمتغیر حالت از تغییر متغیر زمان مناسب نیز استفاده می‌شود، از این رو صورت بهنجار ساده‌تری نسبت به صورت بهنجار مرتبه اول به دست می‌آید. همین امر سبب تسهیل در فرآیند بررسی انشعاب‌ها و کم شدن هزینه محاسباتی می‌شود.

محاسبه صورت بهنجار و تجزیه و تحلیل انشعاب‌ها آن به صورت متداول در کتاب‌ها و بدون آگاهی لازم از تقارن‌های پنهان دستگاه، منجر به نتیجه‌گیری‌های گمراه کننده می‌شود. در صورتی که محاسبه صورت بهنجار بر اساس نظریه نمایش معرفی شده در این مقاله و [۷]، [۱۰] به طور کامل و درست انشعاب‌ها را پیش‌بینی می‌کند. به عنوان مثال در بخش مزیت‌ها نشان می‌دهیم که خمینه‌های پایدار از جواب‌های متناوب حدی وجود دارد که تمام جواب‌های دستگاه به این جواب متناوب حدی، همگرا هستند. همچنین با استفاده از نرم‌افزار متلب و حل عددی معادلات دیفرانسیل نشان می‌دهیم که رفتار صورت بهنجار و دستگاه اصلی، هماهنگ و معادل است. در صورتی که تجزیه و تحلیل به روش متداول در کتاب‌ها، رفتارها و پدیده‌هایی از خود نشان می‌دهد که در دستگاه اصلی وجود ندارند.

در حالتی خاص در سال ۱۹۹۸، الگابا و گامرو صورت بهنجار یک میدان برداری هاف- صفر را با شرطی عام روی قسمت مرتبه دوم و مرتبه سوم به دست آوردند. این مسئله را، یو و یوان (۲۰۰۱) به کمک نرم‌افزار میپل و با استفاده از روش کار آمد محاسباتی بررسی کردند [۲۴]. و در سال ۲۰۰۵ چن، ونگ و یانگ صورت بهنجارمداری این میدان برداری را در حالتی خاص با شرطی عام روی قسمت مرتبه دوم بررسی کردند [۴].

با افزایش بعد دستگاه به دست آوردن صورت بهنجار نیز پیچیده‌تر می‌شود. به همین دلیل تا کنون نتایج بسیار کمی در زمینه صورت بهنجار دستگاه‌های تکین با بعد بیش‌تر از دو منتشر شده است. در این راستا در مقاله‌های [۸]، [۱۶]، [۲۱] نتایج بسیار جالبی در زمینه دستگاه‌های متقارن از بعد سه ارائه شده است.

از جمله ابزارهای قدرتمند در محاسبه صورت بهنجار، ساختار جبری  $sl(2)$  است. در این روش فضای تمام میدان‌های برداری که قسمت خطی آن‌ها پوچ توان هستند (تکینی بوگدانف تاکنز)، به زیر فضاهای تجزیه‌ناپذیر و ناوردا که از نظر دینامیکی معنادار هستند، تجزیه می‌شود [۱۰]، [۱۸] و به کمک این تجزیه یک پایه جدید برای فضا معرفی می‌شود. از مزیت‌های این روش تسهیل در به کارگیری ابزارهایی مانند تابع ملنیکوف برای بررسی انشعاب‌ها سراسری در دستگاه‌های غیرخطی، تسهیل در یافتن انتگرال اول دستگاه (در صورت وجود) و افزایش کارآمدی ابزارهای حل معادلات دیفرانسیل معمولی است [۷]. از طرف دیگر بررسی دینامیک هر یک از این زیرفضاها، بررسی دینامیک کل دستگاه را ساده‌تر می‌کند [۴]، [۶]، [۲۳].

محاسبه صورت بهنجار بدون نیاز به اعمال شرطی روی مسئله، ساده‌تر بودن محاسبات نسبت به روش متداول (با استفاده از تجزیه چند جمله‌ای) و آشکار کردن تقارن‌های دستگاه (در صورت وجود)، از دیگر فواید و مزیت‌هایی است که روش نظریه نمایش  $sl(2)$  نسبت به سایر روش‌های موجود در کتب تخصصی دارد [۱۱]، [۱۸]، [۲۰]. این ایده را

گازر و مختاری (۲۰۱۲) برای تکینی هاپف-صفر تعمیم دادند. آن‌ها در مقاله خود فضای میدان‌های برداری تکینی هاپف-صفر را به زیرفضاهای تجزیه‌ناپذیر و ناوردای شبه اویلری و همیلتونی تجزیه و به کمک این ساختار ساده‌ترین صورت بهنجار را برای آن محاسبه کردند [۷]، [۹]. اما تا کنون هیچ نتیجه تحقیقاتی در زمینه صورت بهنجار مداری تکینی هاپف-صفر منتشر نشده است. محاسبه صورت بهنجار تکینی هاپف-صفر با معرفی ساختار  $sl(2)$  به سه حالت تقسیم می‌شود. در این مقاله مبتنی بر ساختار  $sl(2)$  و با اعمال تغییرمتغیر زمان مناسب، صورت بهنجار مداری را برای خانواده‌ای از این دستگاه‌ها محاسبه، و صورت بهنجار ساده‌تری نسبت به صورت‌های بهنجار موجود ارائه می‌کنیم. نتایج حالت‌های دیگر از این تکینی را می‌توان در [۱۱]، [۱۲] ملاحظه کرد. از کاربردهای نتایج این پژوهش می‌توان کمک به تجزیه و تحلیل و همچنین کنترل انشعاب‌ها آن‌ها اشاره کرد [۱۱]، [۱۲]، [۱۵]. تمام برنامه‌هایی که تا کنون برای محاسبه صورت بهنجار پیشنهاد و ارایه شده‌اند، تنها قادر به محاسبه ضرایب صورت بهنجار با ضرایب عددی هستند. در این پژوهش به کمک نرم‌افزار میپل، برنامه‌ای تنظیم شد که صورت بهنجار کلاسیک، مرتبه دوم و مداری را برای دستگاه‌های تکین هاپف صفر با ضرایب نمادین تا هر مرتبه دل‌خواه محاسبه و همچنین نتایج به دست آمده را تأیید می‌کند. این نتایج بالاخص برای حالت نمادین، در کاربرد اهمیت ویژه‌ای دارد. این برنامه به منظور استفاده کاربران، به صورت بسته‌ای آماده می‌شود [۱۱]، [۱۳].

ابتدا در قسمت بیان مسئله ساختار جبری  $sl(2)$  را برای تکینی هاپف-صفر معرفی و ساختارهای جبری آن را یادآوری و سپس در قالب مثالی، یکی از مزیت‌های محاسبه صورت بهنجار از طریق ساختار جبری  $sl(2)$  را شرح می‌دهیم. در بخش صورت بهنجار مداری، ابتدا به قضایا و نتایجی که برای محاسبه صورتی نرمال مداری به دست آورده‌ایم اشاره می‌شود و سپس در قالب دو قضیه شکل کلی صورت بهنجار مداری و صورت بهنجار مداری هر دستگاه مختل شده پارامتریک تکینی هاپف-صفر را ارائه می‌کنیم. سپس ضرایب صورت بهنجار مداری را تا مرتبه چهار، صرف‌نظر از تکنیک‌های محاسباتی، در قالب یک نتیجه می‌آوریم که در مسائل کاربردی حائز اهمیت هستند. در بخش آخر اشاره مختصری به کاربرد روش جبری  $sl(2)$  در محاسبه تابع انرژی داریم.

### بیان مسئله

فرض کنید دستگاه بررسی شده پس از کاهش روی خمینه مرکزی از بعد ۳ و با مقادیر ویژه صفر و  $\pm iw$  باشد. از این رو، داریم:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(x, y, z) \\ G(x, y, z) \\ H(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (1)$$

به طوری که  $F(x, y, z)$ ,  $G(x, y, z)$ ,  $H(x, y, z)$  چند جمله‌ای‌های همگن از درجه دو به بالا هستند.

صورت بهنجار مرتبه اول (کلاسیک) دستگاه (۱) در مختصات  $(x, \rho, \theta)$  بدین صورت است [۷]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+2j=2}^{\infty} a_{ij} x^i \rho^{2j}, \\ \frac{d\rho}{dt} = \sum_{i+2j=1}^{\infty} b_{ij} x^i \rho^{2j+1}, \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \sum_{i+2j=1}^{\infty} c_{ij} x^i \rho^{2j}. \end{cases}$$

خانواده همه میدان‌های برداری که در صورت بهنجار کلاسیک انشعاب هاپف- صفر قرار دارند، بر اساس ساختار  $sl(2)$

$$M := \frac{xy}{(y^2+z^2)} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{xz}{(y^2+z^2)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad N := (y^2+z^2) \frac{\partial}{\partial x}, \quad H := 2x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z}.$$

با سه عملگر  
که در این رابطه صدق می‌کنند:

$$[M, N] = H, \quad [H, M] = 2M, \quad [H, N] = -M.$$

به سه زیرفضای ناوردای تجزیه‌ناپذیر  $F_k^1$  و  $E_k^1$  و  $\Theta_k^1$  که در مختصات  $(x, \rho, \theta)$  بدین صورت تعریف می‌شوند، تجزیه می‌شوند:

$$\Theta_k^1 := x^l \rho^{2(k-l)} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$E_k^1 := x^{l+1} \rho^{2(k-l)} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} x^l \rho^{2(k-l)+1} \frac{\partial}{\partial \rho},$$

$$F_k^1 := (k-l+1) x^{l+1} \rho^{2(k-l)} \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{l+1}{2}\right) x^l \rho^{2(k-l)+1} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

**توجه:** عناصر زیرفضای  $F_k^1$ ، انتگرال اول دارند و پایستار هستند. در حالی که زیر فضای  $E_k^1$ ، شامل توابع شبه اویلرین و فاقد انتگرال اول هستند. از این پس محاسبه‌ها را بر اساس پایه جدید  $\{F_k^1, E_k^1, \Theta_k^1\}$  دنبال می‌کنیم.  
**یادآوری:** براساس لم ۲،۳ در [۹] این ساختارهای جبری برقرارند:

$$[F_k^1, E_n^m] = (n-k) E_{k+n}^{l+m}, \quad [F_k^1, F_n^m] = ((m+1)(k+2) - (l+1)(n+2)) F_{k+n}^{l+m},$$

$$[F_k^1, E_n^m] = \frac{(n+2)(m(k+2) - n(l+1))}{(k+n+2)} E_{k+n}^{l+m} - \frac{k(k+2)}{k+n+2} F_{k+n}^{l+m}.$$

## هماهنگ نبودن انشعاب‌ها صورت بهنجار کلاسیک با دستگاه اصلی

### و مزیت محاسبه صورت بهنجار از طریق نمایش $sl(2)$

در حالت کلی صورت بهنجار برای دستگاه دینامیکی یکتا نیست از این‌رو، تاکنون روش‌های زیادی برای محاسبه آن معرفی و برخی به‌صورت برنامه در اختیار محققان قرار گرفته است. هرکدام از این روش‌ها مزیت‌های خاص خود نسبت به نتایج و روش‌های پیشین را دارند. چنان‌که در قسمت مقدمه معرفی و توضیح داده شد، ایده اصلی در این مقاله براساس نمایش جبر لی  $sl(2)$  است.

در این بخش با مثالی به مزیت عمده این روش که در سایر روش‌های معرفی شده تاکنون به آن‌ها توجه کمی شده است، اشاره می‌کنیم.

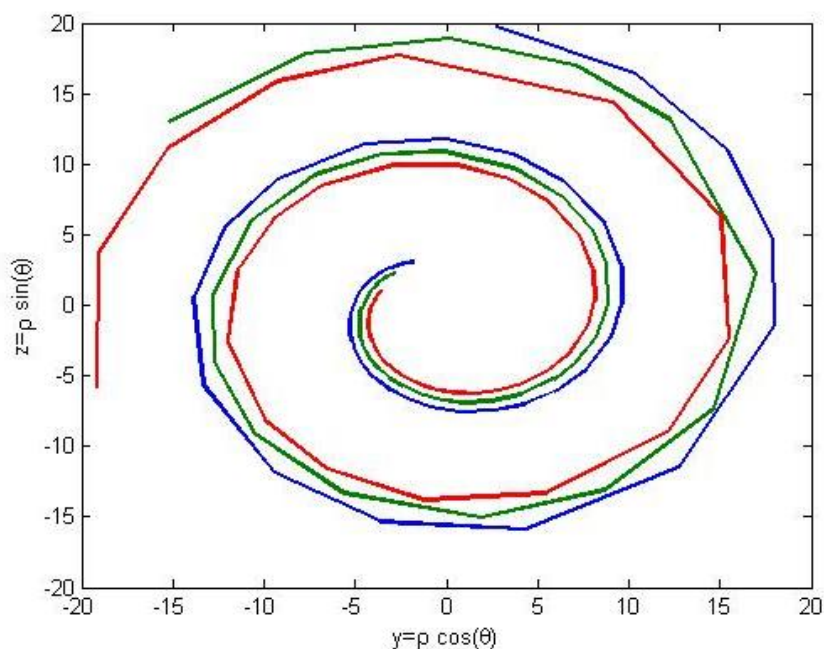
با توجه به این که استفاده از صورت بهنجار در حالت نامتناهی تقریباً غیرممکن است، اغلب در مسائل نظری صورت بهنجار را تا مرتبه دل‌خواهی بریده و جملات با درجه‌های بیش‌تر در نظر گرفته نمی‌شوند. طبیعی است که با این کار، مجموعه‌ای از خواص دستگاه اولیه را از دست می‌دهیم.

به‌طور طبیعی دستگاه‌های متقارن در بسیاری از مسائل کاربردی ظاهر می‌شوند. محاسبه صورت بهنجار برای دستگاهی دینامیکی در صورت وجود تقارن بسیار ساده‌تر است و حجم محاسبات به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد. بنابراین از جمله مزیت‌های مهمی که روش محاسباتی می‌تواند داشته باشد، حفظ تقارن‌های موجود در یک دستگاه دینامیکی است. در این مثال نشان می‌دهیم که محاسبه صورت بهنجار بر اساس معرفی پایه  $sl(2)$  که در این مقاله بررسی شده است، تقارن‌های دستگاه را حفظ می‌کند.

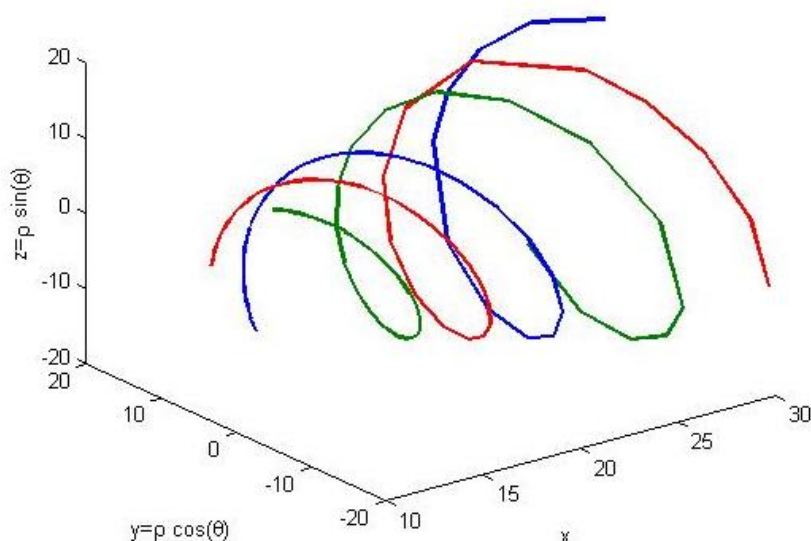
این دستگاه را در نظر بگیرید [مثال ۵.۵، ۹]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -7x^3 - 7xy^2 + 7xz^2 + \mu_1 xz + 6xz + \mu_1 x - y, \\ \dot{y} &= -7y^3 - 7x^2y + 7yz^2 + \mu_1 yz + 6yz + \mu_1 y + x, \\ \dot{z} &= 14z^3 - 14y^2z - 14zx^2 + 2\mu_1 z^2 + 12z^2 + 2\mu_1 z. \end{aligned} \quad (2)$$

رفتار کیفی این دستگاه به‌ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$  در دو مختصات متفاوت به کمک نرم‌افزار متلب رسم و در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است که نمایان‌گر سه مدار تناوبی است.



شکل ۱. نمای فاز سه بعدی دستگاه (۲) به‌ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$  و شرایط اولیه به ترتیب  $(30, 20, 18)$  و  $(30, 20, 16)$ ،  $(30, 20, 14)$



شکل ۲. نمای فاز دستگاه (۲) به ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$  و شرط اولیه  $(30, 20, 14)$  نشان‌دهنده سه مدار تناوبی است

صورت بهنجار مرتبه اول این دستگاه در مختصات قطبی بدین صورت است:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -14xp^2 + 14x^3 + 4(\mu_1 + 6)x^2 + 2\mu_1 x, \\ \dot{\rho} &= 7\rho x^2 - 7\rho^3 + 2(\mu_1 + 6)x\rho + \mu_1 \rho, \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\quad (3)$$

حال به بررسی انشعاب‌ها صورت بهنجار فوق می‌پردازیم.

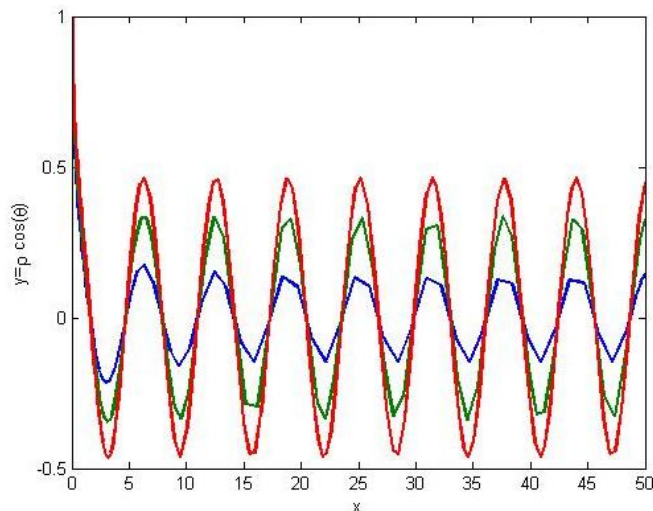
با برابر صفر قرار دادن معادلات مذکور نقاط تعادل دستگاه را به دست می‌آوریم که بدین صورت هستند:

$$(x_1, \rho_1) = (0, 0), \quad (x_2, \rho_2) = \left(0, \pm \sqrt{\frac{\mu_1}{7}}\right) \quad \text{for } \mu_1 > 0$$

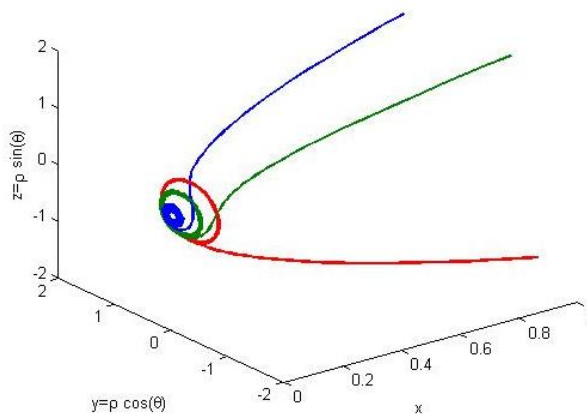
مقادیر ویژه و ویژه متناظر با ماترسی ژاکوبی نقطه تعادل  $(x_1, \rho_1)$  برابر با  $\lambda_{1,2} = \mu_1, 2\mu_1$  است. که به ازای  $\mu_1 > 0$  یک منبع و به ازای  $\mu_1 < 0$  یک چاه خواهد بود. و مقادیر ویژه متناظر با ماترسی ژاکوبی نقطه تعادل  $(x_2, \rho_2)$  برابر با  $\lambda_{1,2} = 0, -2\mu_1$  است. که به ازای  $\mu_1 = 0$  یک انشعاب گره‌زینی اتفاق می‌افتد.

از سوی دیگر با استناد به [قضیه ۴.۵، ۹] می‌توان از تقارن موجود در صورت بهنجار مثال مذکور استفاده کرد و خمینه‌ای ناوردا از دوره‌های حدی را برای آن معرفی و وقوع انشعاب دور حدی را تحقیق کنیم. که در صورت از بین رفتن تقارن دیگر قادر به هیچ‌گونه اظهارنظری در این رابطه نیستیم. این مطلب را می‌توان به سادگی در نماهای فاز شکل‌های ۱، ۲ و ۳ مشاهده کرد.

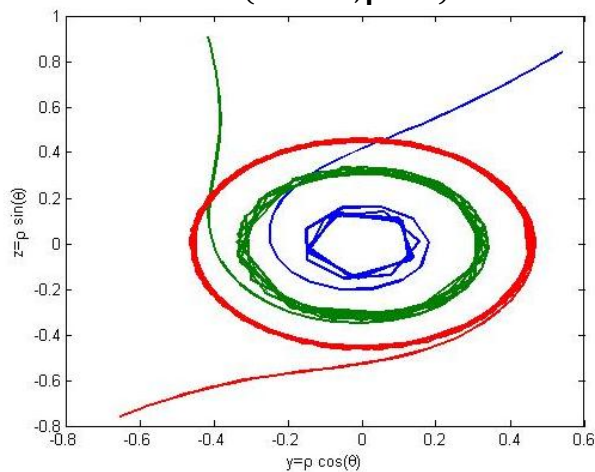
نماهای فاز در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب به ازای شروط اولیه  $(x = 0.2, \rho = 1)$ ،  $(x = 0.2, \rho = 1)$  و  $(x = 0.2, \rho = 5)$  رسم شده‌اند.



شکل ۳. نمای فاز دستگاه (۳) به‌ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$  و شرط اولیه  $(x = 0.2, \rho = 5)$



شکل ۴. نمای فاز سه بعدی دستگاه (۳) به‌ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$ . به‌ازای شرط اولیه  $(x = 0.2, \rho = 5)$



شکل ۵. نمای فاز دستگاه (۳) به‌ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$ . نشان‌دهنده سه مدار تناوبی است  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$

چنان‌که گفته شد صورت بهنجار در حالت کلی یکتا نیست. شکل دیگری از صورت بهنجار برای دستگاه مذکور

بدین صورت است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 14x\rho^4 + 14x^3\rho^2 + (-2\mu_1 - 14)x\rho^2 + 14x^3 + 2(\mu_1 + 6)x^2 + 2\mu_1 x, \\ \dot{\rho} &= 14x^2\rho^3 + 6x\rho^3 + 7\rho x^2 - 7\rho^3 + (\mu_1 + 6)x\rho + \mu_1\rho, \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \tag{۴}$$

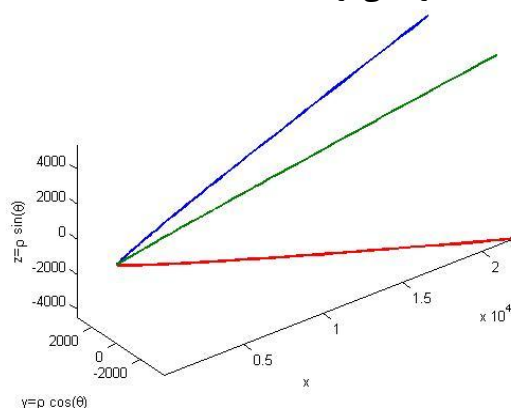
اکنون به بررسی انشعاب‌ها صورت بهنجار فوق می پردازیم.

با برابر صفر قرار دادن معادلات فوق نقاط تعادل دستگاه به دست می آید که بدین صورت هستند:

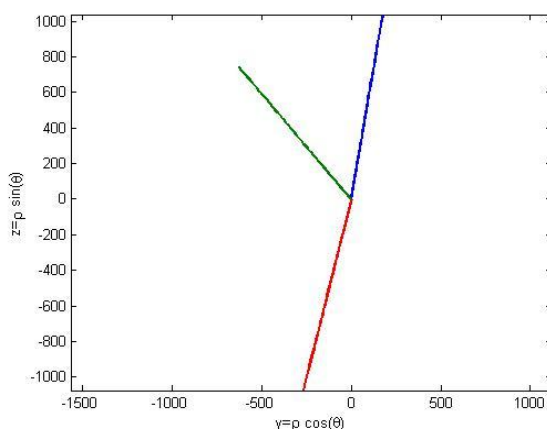
$$(x_1, \rho_1) = (0, 0), \quad (x_2, \rho_2) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{\mu_1}{7}}\right) \text{ for } \mu_1 > 0$$

مقادیر ویژه متناظر با ماترسی ژاکوبی نقطه تعادل  $(x_1, \rho_1)$  برابر با  $\lambda_{1,2} = \mu_1, 2\mu_1$  است. که به ازای  $\mu_1 > 0$  یک منبع و به ازای  $\mu_1 < 0$  یک چاه خواهد بود. و مقادیر ویژه متناظر با ماترسی ژاکوبی نقطه تعادل  $(x_2, \rho_2)$  برابر با  $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{7}\mu_1^2, -2\mu_1$  است که به دلیل مثبت بودن  $\mu_1$ ، این نقطه تعادل همواره یک چاه است. و به ازای  $\mu_1 = 0$  یک انشعاب گره‌زینی داریم.

نمای فاز صورت بهنجار اخیر به ازای سه پارامتر  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$  بدین صورت است: چنان که مشاهده می شود نماهای فاز اخیر هیچ گونه تعبیری از رفتار سیستم اولیه را انتقال نمی دهند. در صورتی که نماهای فاز پیشین به خوبی رفتار دستگاه اولیه را شبیه سازی می کردند.



شکل ۶. نمای فاز سه بعدی دستگاه (۴) به ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$  و شرط اولیه  $(x = 0.2, \rho = 1)$



شکل ۷. نمای فاز سه بعدی دستگاه (۴) به ازای سه مقدار متمایز  $\mu_1 = 0.1, 0.5, 0.012$  و شرط اولیه  $(x = 0.2, \rho = 1)$

چنان‌که گفته شد، ایده اصلی در محاسبه صورت بهنجار مداری استفاده از تغییر متغیر زمان نزدیک به همانی علاوه بر تغییر متغیر حالت است.

تغییر متغیر زمان ساختاری مدولی تولید می‌کند که آن را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$Z_n^m := x^m (y^2 + z^2)^{n-m}, \quad m \leq n.$$

لم ۱ ساختارهای ثابت مورد نیاز متناظر با تغییر متغیر زمان را بیان می‌کند.

لم ۱: (ساختارهای ثابت) این روابط برقرارند:

$$Z_n^m E_k^1 = E_{n+k}^{m+1}, \quad Z_n^m F_k^1 = \frac{k+2}{k+n+2} F_{k+n}^{1+m} + \frac{m(k+2)-n(1+1)}{k+n+2} E_{k+n}^{1+m}.$$

بنا بر لم ۳، ۱ در [۹]، فرم مرتبه دوم دستگاه (۲) در پایه  $\{F_k^1, E_k^1\}$  بدین صورت است:

$$V^{(2)} := a_0^{-1} F_0^{-1} + \sum a_i F_i^1 + \sum b_i E_i^1. \quad (5)$$

بر اساس رابطه ۵  $s, r$  بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$r := \min \{i \mid a_i \neq 0, i \geq 1\}, \quad s := \min \{i \mid b_i \neq 0, i \geq 1\}.$$

طبق [۹] به منظور دستیابی به ساده‌ترین صورت بهنجار دستگاه‌های تکین هاپف- صفر، این مسئله به سه حالت تقسیم می‌شود. در حالت اول جمله‌های پیش‌رو تشکیل سیم اولیه<sup>۱</sup> می‌دهند که نتایج مربوط به آن را می‌توان در [۱۱] مشاهده کرد. در این مقاله صورت بهنجار مداری خانواده‌ای از دستگاه‌های تکین هاپف- صفر را که در حالت دوم یعنی  $s < r$  قرار دارند محاسبه می‌کنیم. نتایج مربوط به حالت سوم در حال بررسی هستند [۱۲]. برای آشنایی با مقدمات و مفاهیم پایه نظریه صورت بهنجار می‌توان به [۱۴]، [۱۷] مراجعه کرد.

قرارداد: در ادامه میدان برداری  $T_s$  نقش اصلی در محاسبات صورت بهنجار را دارد که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$T_s := F_0^{-1} + b_s E_s^s.$$

تعریف (نماد پوچهمر): برای هر عدد طبیعی  $k$  و عدد حقیقی  $b$  نماد  $(a)_b^k$  بدین صورت معرفی می‌شود:

$$(a)_b^k := a(a+b)(a+2b) \dots (a+(k-1)b).$$

لم ۲: برای هر عدد صحیح مثبت  $m$ ، تغییر متغیر حالت  $\tau_m^m$  چنان وجود دارد که

$$Z_m^m E_s + [\tau_m^m, T_s] = \frac{-m}{(m+1)_{s+1}^2} F_{m+s}^{m+s} + \frac{(s+2)(m+s+1)b_s}{(m+s+2)(m+1)} E_{m+s}^{m+s}$$

اثبات: طبق لم ۱ داریم:

$$Z_m^m F_0^{-1} = \frac{2}{m+2} F_m^{m-1} + \frac{2m}{m+2} E_m^{m-1},$$

$$Z_m^m E_s^s = E_{m+s}^{m+s}.$$

از طرف دیگر تغییر متغیر  $\tau_m^m$  را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tau_m^m := \frac{1}{(m+1)_1^2} F_m^m + \frac{1}{(m+2)} E_m^m.$$

حال با به‌کارگیری لم ۴.۲ در [۹] اثبات کامل می‌شود.

بدین ترتیب با اعمال تغییر متغیر زمان  $Z_m^m$  همراه با تغییر متغیر حالت  $\tau_m^m$  می‌توان در روش اول تمام  $F_k^k$ هایی که  $k$

$\geq r + 1$  است را از دستگاه حذف کرد.

لم ۳: فرض کنید  $k \in \mathbb{N}$ . با اعمال هم زمان دو تغییر متغیر حالت متناظر با  $\varepsilon_k^0$  و تغییر متغیر زمان متناظر با  $Z_{k(s+1)}^k$ ، می‌توان  $F_k^k$  و  $E_k^k$  های  $k \equiv s+1$  را از دستگاه حذف کرد.

اثبات: طبق [۱۶] تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_k^0 := \sum_{m=0}^k \frac{a_r^{m(k+2)} (k)_{-2}^m}{m! 2^m (mr+k+2)} E_{mr+k}^{m(r+1)} - \sum_{m=0}^k a_r^m e_{k,m} F_{mr+1}^{m(r+1)},$$

و داریم:

$$[\varepsilon_k^0, T_s] = \frac{(b_s)^{k+1} (k-s)_s^{k+1}}{2^{k(s+1)} k!} E_{k(s+1)+s}^{k(s+1)+s}.$$

از طرف دیگر

$$Z_{k(s+1)}^k T_{s+1} [\tau_{k(s+1)}^k, T_s] = \frac{-b_s k(s+1)}{(ks+k+1)((k+1)(s+1)+1)} F_{k(s+1)+s}^{k(s+1)+s} + \frac{b_s (s+1)_1^2 (k+1)}{(k(s+1)+1)_1^2} E_{k(s+1)+1}^{k(s+1)+1}.$$

با توجه به مخالف صفر بودن دترمینان ضرایب در دو رابطه مذکور، لم نتیجه می‌شود.

حال با در نظر گرفتن نتایج و قضایای موجود، می‌توان به قضیه اساسی ۱ اشاره کرد.

قضیه ۱: صورت بهنجار مداری از مرتبه  $(s+1)$  دستگاه (4) بدین صورت است:

$$v^{(s+1)} := \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2\rho^2 + b_s x^{s+1} + \sum_{k=1}^s a_k x^{k+1} + \sum_{k=s+1}^{\infty} b_k x^{k+1}, \\ \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} b_s x^s \rho - \sum_{k=1}^s \left(\frac{k+1}{2}\right) a_k x^k \rho + \sum_{k=s+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) b_k x^k \rho, \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases}$$

به طوری که به ازای  $k \equiv s+1$ ،  $k \neq s^2 + 2s$  ضرایب  $a_k$  و  $b_k$  صفر است.

اثبات: چنان که قبلاً گفته شد طبق لم ۲ و لم ۳، با اعمال تغییر متغیر زمان متناظر با  $Z_m^m$  می‌توان  $F_k^k$  های  $k \geq r+1$  هستند را از دستگاه حذف کرد. از طرف دیگر طبق لم ۴ با ادغام تغییر متغیرهای  $F_k^k$  و  $E_k^k$ ،  $\varepsilon_k^0$  و  $Z_{k(s+1)}^k$  های  $k \equiv s+1$ ،  $k \neq s^2 + 2s$  هستند، هم‌زمان قابل حذف از دستگاه هستند.

حال دستگاه پارامتریک زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \dot{x} &:= f_1(x, y, z, \mu), \\ \dot{y} &:= z + f_2(x, y, z, \mu), \\ \dot{z} &:= -y + f_3(x, y, z, \mu), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{۶}$$

که  $f_1, f_2, f_3$  توابع غیرخطی در مختصات  $(x, y, z, \mu)$  و هم‌چنین غیرخطی در مختصات  $(x, y, z)$  پس از اعمال شرط  $\mu = 0$  هستند. این دستگاه اختلال غیرخطی پارامتری دستگاه‌های تکین هاف-صفر را نشان می‌دهد. بنابراین

$$f_1(0, 0, 0, \mu) = f_2(0, 0, 0, \mu) = f_3(0, 0, 0, \mu) = 0.$$

با در نظر گرفتن شکل کلی صورت بهنجار مرتبه دوم در حالت پارامتری و به کارگیری ابزارهایی مانند ادغام تغییر متغیر حالت و زمان مناسب و اعمال تغییر مختصات انتقالی ثانویه<sup>۲</sup>، مشابه آنچه در [بخش ۴، ۱۱] انجام شده است قضیه ۳ به دست می‌آید:

**قضیه ۳:** دستگاه پارامتریک (۶) را در نظر بگیرید به طوری که در شرط  $s=1, r=2$  صدق کند. در این صورت توابع پارامتری  $v_1(\mu_j)$  و  $v_2(\mu_j)$  وجود دارند به طوری که دستگاه (۶) را به این دستگاه تبدیل می‌کنند:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_1 + v_2 x + 2\rho^2 + b_1 x^2 + a_2 x^3, \\ \dot{\rho} &= \frac{1}{2} v_2 \rho + \frac{b_1}{2} x \rho - \frac{3 a_2}{2} x^2 \rho, \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

**مثال ۱:** دستگاه ۷ را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_1 x z, \\ \dot{y} = x + a_1 y z, \\ \dot{z} = 2a_1 z^2 + b_2 y^2 + a_3 z^3 + \mu_1 + \mu_2 x + \mu_4 z. \end{cases} \quad (7)$$

با محاسبه ماتریس ژاکوبی در مبدأ مختصات مشاهده می‌شود مقادیر ویژه دستگاه صفر و  $\pm i$  هستند.

ساده‌ترین صورت بهنجار مداری کوتاه شده تا درجه ۳ دستگاه (۷) بدین صورت است:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\rho^2 + 4 \frac{\mu_1}{b_2} - 4 \frac{\mu_4}{b_2} x + 8 \frac{a_1}{b_2} x^2 + 12 \frac{a_3}{b_2} x^3, \\ \dot{\rho} = -2 \frac{\mu_4}{b_2} \rho + 4 \frac{a_1}{b_2} x \rho - 6 \frac{a_3}{b_2} x^2 \rho, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

### ضرایب صورت بهنجار

در این قسمت ضرایب صورت بهنجار مداری برای دستگاه (۱) تا مرتبه ۳ را بر حسب ضرایب دستگاه اولیه در قالب یک نتیجه کلی مطرح می‌کنیم. این نتایج صرف نظر از تکنیک‌های محاسباتی آورده شده‌اند، از این رو، در مسایل کاربردی و به خصوص علوم مهندسی از اهمیت خاص و ویژه‌ای برخوردارند [۱۱]، [۲۲].

**نتیجه ۱:** معادلات دامنه ۳ صورت بهنجار مداری کوتاه شده تا مرتبه ۴ برای دستگاه (۱) بدین صورت است:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= b_{1,1} x^2 + (b_{2,2} + 9a_{2,2}) x^3 + (6a_{3,3} + b_{3,3} + 8 \frac{a_{2,2} b_{2,2}}{b_{1,1}} + 72 \frac{a_{2,2}^2}{b_{1,1}}) x^4 + 2\rho^2, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{2} b_{1,1} x \rho + \left( \frac{1}{2} b_{2,2} + \frac{9}{2} a_{2,2} \right) x^2 \rho + (6a_{3,3} + b_{3,3} + 8 \frac{a_{2,2} b_{2,2}}{b_{1,1}} + 72 \frac{a_{2,2}^2}{b_{1,1}}) x^3 \rho. \end{aligned} \quad (8)$$

اثبات: این نتایج به کمک برنامه میپل آماده شده برای محاسبات صورت‌های نرمال مداری با ضرایب نمادین به دست آمده است.

### کاربرد صورت نمایشی (2) sl در محاسبه تابع انرژی

یکی از روش‌های بررسی مدل‌های ریاضی غیرخطی، بررسی رفتار کیفی آن‌ها است. در این راستا انتگرال اول دستگاه در این بررسی نقش مؤثری دارد. انتگرال‌های اول یک دستگاه، مجموعه توابعی هستند که دستگاه در طول

مدارهای آن، ثابت باقی می‌ماند. از دیگر کاربردهای انتگرال اول می‌توان به افزایش دقت و سرعت نرم‌افزارهای عددی و امکان به‌کارگیری روش‌های تجزیه و تحلیل انشعاب‌ها سراسری اشاره کرد.

چنان‌که در قسمت مقدمه توضیح داده شد نظریهٔ صورت بهنجار یکی از مهم‌ترین ابزارها برای تجزیه و تحلیل رفتارهای موضعی دستگاه‌های تکین غیرخطی است. از مهم‌ترین کاربردهای نظریهٔ صورت بهنجار، تحقیق و بررسی وجود و یا وجود نداشتن و محاسبهٔ انتگرال‌های اول معادلات دیفرانسیل غیرخطی است. از این رو، معرفی روشی برای صورت بهنجار که ما را قادر به محاسبهٔ انتگرال اول کند، اهمیت ویژه‌ای دارد. در این مثال نشان می‌دهیم که محاسبهٔ صورت بهنجار بر اساس ساختار  $sl(2)$  این مزیت را دارد.

دستگاه تغییر یافته راسلر (۹) را در نظر می‌گیریم [مثال ۲.۵، ۸].

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + d y^2, \\ \dot{y} = x + a y + e z^3, \\ \dot{z} = b x - c z + x z + r z^3. \end{cases} \quad (9)$$

با اختیار کردن  $a=1$  و با توجه به رابطه [۸، ۵، ۵] صورت بهنجار مرتبهٔ اول برای این دستگاه بدین صورت است:

$$v^1 := -F_0^{-1} + \frac{1}{2} F_1^1 + \frac{113}{830} F_1^0 + \frac{62}{415} F_2^2 + \Theta_0^0 - \frac{11719}{19920} \Theta_1^0 + \frac{18939}{26560} \Theta_1^1.$$

اکنون قادر هستیم با استفاده از گزاره [۸، ۲، ۲] انتگرال اول میدان برداری  $v^1$  را محاسبه کنیم که بدین صورت است:

$$f := -(y^2 + z^2)^2 + \frac{1}{2} x^2 (y^2 + z^2)^2 + \frac{113}{830} x (y^2 + z^2)$$

### نتیجه‌گیری

در این مقاله صورت بهنجار مداری خانواده‌ای از دستگاه‌های دینامیکی تکین هاپف-صفر بررسی شد. نتایج به‌دست آمده بر اساس تجزیهٔ صورت بهنجار به جملات پایستار و ناپایستار است و به کمک نظریه نمایش  $sl(2)$  به‌دست آمده‌اند. این ابزار، ابزار مفیدی برای محاسبه آگاهانه صورت بهنجار است. محاسبه و تحلیل غیرآگاهانه صورت بهنجار کلاسیک بسیاری از دستگاه‌های تکین، ممکن است موجب نتیجه‌گیری‌های گمراه‌کننده برای این دستگاه‌ها شود. این موضوع با استفاده از بررسی انشعاب‌ها خانواده‌ای از دستگاه‌های تکینی هاپف-صفر به تفصیل تشریح شد. هم‌چنین صورت بهنجار مداری را برای هر اختلال پارامتریک از این تکینی به‌دست آوردیم. برای دو حالت کلی دیگر به [۵]، [۱۱]، [۲۲] مراجعه شود.

### منابع

1. M. Ashkenazi, Chow S.N., "Normal forms near critical points for differential equations and maps", IEEE Trans. Circ. and Syst. 35 (1988) 850-862 .
2. Algaba A. , Freire E., Gamero E., "Hypernormal form for the Hopf-zero bifurcation", Internat. J. Bifur. Chaos 8 (1998) 1857-1887.

3. Baider A., Sanders J.A., "Further reductions of the Takens-Bogdanov normal form", *J. Differential Equations*, 99 (1992) 205-244.
4. Chen G., Wang D., Yang J., "Unique orbital normal form for vector fields of Hopf-zero singularity", *J. Dynam. Differential Equations* 17 (2005) 3-20.
5. Chow S.N., Li C., Wang D., "Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields", Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1994).
6. Dumortier F., Ibáñez S., Kokubu H., Simó C., "About the unfolding of a Hopf-zero singularity", *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 33 (2013) 4435-4471.
7. Gazor M., Moazeni M., "Parametric normal forms for Bogdanov-Takens singularity", *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 35 (2015) 205-224.
8. Gazor M., Mokhtari F., "Volume -preserving normal forms of Hopf - zero singularity", *Nonlinearity* 26 (2013) 2809-2832.
9. Gazor M., Mokhtari F., Sanders J.A., "Normal forms for Hopf-zero singularities with nonconservative nonlinear part", *J. Differential Equations* 254 (2013) 1571-1581.
10. Gazor M., Mokhtari F., "Normal forms of Hopf -zero singularity", *Nonlinearity* 28 (2015) 330-311.
11. Gazor M., Sadri N., "Bifurcation control and universal unfolding for Hopf-zero singularities with leading solenoidal terms", *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 15 (2016) 870-903.
12. Gazor M., Sadri N., " Bifurcation controller designs for the generalized cusp plants of bogdanov tokens singularity", *ArXiv*. 1704.07668 (2017).
13. Gazor M., Yu P., "Spectral sequences and parametric normal forms", *J. Differential Equations*, 252 (2012) 1003-1031.
14. Gazor M., Yu P., "Infinite order parametric normal form of Hopf singularity", *Internat. J. Bifur. Chaos*, 18 (2008) 3393-3408.
15. Kang W., Xiao M., Tall I.A., "Controllability and local accessibility: A normal form approach", *IEEE Transaction on Automatic Control* 48 (2003) 1724-1736.
16. Li J., Zhang L., Wang D., "Unique normal form of a class of 3 dimensional vector fields with symmetries", *J. Differential Equations* 257 (2014) 2341-2359.
17. Murdock J., Malonza D., "An improved theory of asymptotic unfolding", *J. Differential Equations* 247 (2009) 685-709.

18. Murdock J. , "Hypnormal form theory: foundations and algorithms", J. Differential Equations, 205 (2004) 424-465.
19. Murdock J., "Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems", Springer-Verlag, New York (2003).
20. Murdock J., "Asymptotic unfoldings of dynamical systems by normalizing beyond the normal form", J. Differential Equations 143 (1998) 151-190.
21. Rink B., Sanders J., "Coupled cell networks: semigroups, Lie algebras and normal forms", Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015) 3509-3548.
22. Sadri N., "Normal form computations of Hopf and Hopf-zero singularities and applications in dynamics analysis of an HIV model, Master Thesis, Isfahan University of Technology, 1393.
23. Vutha A., Golubitsky M., "Normal forms and unfoldings of singular strategy functions", Dynamic Games and Applications (2014) DOI 10. 1007/s13235-014-0116-0.
24. Yu P., Yuan Y., "The simplest normal form for the singularity of a pure imaginary pair and a zero eigenvalue", Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms 8 (2001) 219-249.
25. Gazor M., Sadri N., "Extensioin of input –state and back-stepping methods for linearly controllable and uncontrollable singular systems", in progress.