فضای مداری حاصل از عمل‌های طولپا روی فضاهای هذلولوی

رضا میرزایی*، مجتبی حیدری؛ دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، گروه ریاضی

دریافت ۹۵/۱۱/۱۱ پذیرش ۹۶/۰۷/۱۷

چکیده

فرض کنیم $G\times M\to M$ یک عمل دیفرانسیل‌پذیر گروه لی G بر خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر M و $\frac{M}{G}$ فضای مداری حاصل با توپولوژی خارج قسمتی است. بعد $\frac{M}{G}$ نقص همگنی عمل G بر M نامیده می‌شود. اگر M یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر است و تحت عمل گروه لی همبند و فشرده G از نقص همگنی یک باشد، آن‌گاه $\frac{M}{G}$ با یکی از فضاهای $[0,1]$، $(0,1]$، S^1 یا R همانریخت است. در این مقاله فرض می‌کنیم که فضای هذلولوی H^n تحت عمل زیرگروه بسته و همبند G از $Iso(H^n)$ نقص همگنی دو دارد. آن‌گاه ثابت می‌کنیم فضای مداری آن با R^2 یا $[0,\infty)\times R$ همانریخت است. هم‌چنین ثابت می‌کنیم همهٔ مدارها با R^{n-2} وابریخت هستند، یا اعداد صحیح و نامنفی m و e وجود دارند چنان‌که بعضی از مدارها با R^e و سایر مدارها با $B\times R^m$ وابریخت هستند که B یک کره یا یک ابررویه همگن از کره و یا یک مارپیچ در فضای اقلیدسی است.

واژه های کلیدی: خمینه، فضای هذلولوی، نقص همگنی، فضای مداری، طولپایی.

مقدمه

فرض کنیم $G\times M\to M$ یک عمل دیفرانسیل‌پذیر گروه لی G بر خمینه[1] دیفرانسیل‌پذیر M و $\frac{M}{G}$ فضای مداری[2] حاصل با توپولوژی خارج قسمتی است. بعد $\frac{M}{G}$ نقص همگنی[3] عمل G بر M نامیده می‌شود. بررسی فضاهای مداری کاربردهای زیادی در نظریه توابع پایا و مسائل گوناگون مربوط به G- پایایی[4] روی M دارد. اشیاء G- پایا روی M می‌توانند به اشیاء مشابه روی فضای مداری نسبت داده شوند. بنا براین، اگر بعد فضای مداری به اندازهٔ کافی کوچک باشد (نقص همگنی عمل G بر M کوچک باشد) می‌توانیم بسیاری از مسائل درباره اشیاء G- پایا روی M را به مسائل آسان‌تری روی $\frac{M}{G}$ تبدیل کنیم. با این انگیزه، ریاضی‌دانان خواص توپولوژیکی فضای مداری

---

*نویسنده مسئول r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir

1. Manifold
2. Orbit space
3. Cohomogeneity
4. G-invariance

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.2.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.147]

حاصل از عمل‌های گروه‌های لی بر خمینه‌ها را بررسی کرده‌اند. یک قضیهٔ مهم در این زمینه، قضیهٔ زیر است که موسترت[1] در سال ۱۹۵۷([14]) ثابت کرد:

اگر M یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر باشد و تحت عمل گروه لی همبند و فشرده G از نقص همگنی یک باشد، آن‌گاه $\frac{M}{G}$ با یکی از فضاهای $[0,1]$، $[0,1)$، S^1 یا R همانریخت[2] است.

این قضیه برای عمل‌های طولپای گروه‌های لی غیرفشرده بر خمینه‌ها تعمیم داده شده است. علاوه بر آن اگر M یک متریک ریمانی داشته و G یک زیرگروه بسته و همبند از گروه طولپایی‌های[3] M باشد که با نقص همگنی یک بر M عمل می‌کند، نتایج جالب زیادی درباره فضای مداری و مدارها وجود دارند [14]، [17]، [18]، در [17] ثابت شده است که اگر M یک خمینه ریمانی با انحنای منفی و G یک زیرگروه همبند و بسته ازطولپایی‌های Mباشد که بر M با نقص همگنی یک عمل می‌کند، آن‌گاه فضای مداری با $[0,1]$ همانریخت نیست، بنا براین با استفاده از قضیه موسترت، با $[0,1)$، S^1 یا R همانریخت است. علاوه برآن اگر M همبند ساده باشد، فضای مداری با $[0,1)$ یا R همانریخت است. این قضیه در [14] به خمینه‌های ریمانی تخت تعمیم داده شد. در راستای توسیع قضیه موسترت این سوال پیش می‌آید که وقتی M نقص همگنی دو دارد، فضای مداری از نظر توپولوژیک چیست. عمل گروه‌های لی فشرده با نقص همگنی دو بر فضاهای اقلیدسی قطبی هستند و این عمل‌ها رده‌بندی شده‌اند [16]. واضح است که در این حالت فضای مداری با صفحه یا نیم صفحه همانریخت است. هم‌چنین در [13] ثابت شده است که اگر G یک زیرگروه از گروه طولپایی‌های همبند (فشرده یا غیر فشرده) باشد که بر R^n با نقص همگنی دو عمل می‌کند آن‌گاه فضای مداری با صفحه یا نیم صفحه همانریخت است. رده‌بندی فضای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو بر کره استاندارد S^n نیز توصیف شده است [6]، [19]، [20]. برای تکمیل رده‌بندی فضای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو بر فضاهای همبند ساده و با انحنای ثابت، حل مسئله برای فضاهای همبند ساده با انحنای منفی ثابت (فضاهای هذلولوی) باقی است. در ادامه کارهای نویسنده اول این مقاله درباره عمل‌های با نقص همگنی دو [8]-[14]، فرض می‌کنیم فضای هذلولوی تحت عمل یک زیرگروه همبند و بسته از گروه طولپایی‌ها نقص همگنی دو دارد، آن‌گاه فضای مداری را در قضیه ۹ الف رده‌بندی می‌کنیم. هم‌چنین یک توصیف توپولوژیکی از مدارها را در قضیه ۹ ب به‌دست می‌آوریم.

نتایج

یادآوری می‌شود که یک مدل از فضای هذلولوی H^n، $n \geq 2$، بدین‌صورت است که به‌صورت زیرخمینه‌ای ریمانی از فضای لورنتزی[4] R_1^{n+1} در نظر گرفته می‌شود:

$$H^n = \{(x_0, x_1, \ldots x_n) \in R_1^{n+1} : -x_0^2 + x_1^2 + \ldots x_n^2 = -1, x_0 > 0\}$$

1. Mostert
2 Homeomophic
3. Isometric
4. Lorentzian

گروه طولپاییِ‌های H^n با $O(1,n)$ برابر است که تحدید نگاشت‌های خطی و متعامد R_1^{n+1} به H^n است. مؤلفهٔ همانی $O(1,n)$ را با $SO_0(1,n)$ نشان می‌دهیم. $H^n(\infty)$ بیان‌گر رده‌های هم‌ارزی ژئودزیک‌های مجانبی در H^n است. برای هر $z \in H^n(\infty)$ و $p \in H^n$ یک ابررویه Q وجود دارد که شامل p است و بر همهٔ ژئودزیک‌های مجانبی موجود در ردهٔ z عمود است. Q یک ابرکره[1] با مرکز z نامیده می‌شود (تعاریف و جزییات را در [5] ببینید). ابرکره‌ها با متر ریمانی القایی از H^n با R^{n-1} طولپا هستند. اگر γ یک ژئودزیک در ردهٔ ژئودزیک‌های مجانبی z باشد، تابع $f_\gamma : H^n \to R$ که به‌صورت $f_\gamma(p) = \lim_{t\to\infty} d(p,\gamma(t)) - t$ تعریف می‌شود، تابع بوشمن[2] وابسته به z نامیده می‌شود.

تبصره ۱. آ) فرض کنیم Q یک ابرکره با مرکز $z \in H^n(\infty)$ باشد. برای هر نقطه $p \in H^n$ یک نقطه یکتای $\eta_Q(p)$ در Q وجود دارد که نزدیک‌ترین به p در Q است.

ب) اگر f یک تابع بوشمن وابسته به $z \in H^n(\infty)$ باشد، آن‌گاه نگاشت $\phi : H^n \to R \times Q$ که به‌صورت $\phi(p) = (f(p), \eta_Q(p))$ تعریف می‌شود، یک همانریختی است.

اثبات. [5]،گزاره‌های ۳. ۲ و ۴. ۳.

یادآوری می‌کنیم که عمل گروه G بر R_1^{n+1} تحویل‌ناپذیر است هرگاه هیچ زیرفضای سره از R_1^{n+1} را حفظ نکند. هم‌چنین یک بردار غیرصفر که بر خودش عمود است بردار هم‌سانگرد[3] نامیده می شود و جهت هم‌سانگردی جهتی است که با بردار هم‌سانگرد مشخص می‌شود.

لم ۲. فرض کنیم G یک گروه لی همبند است که به‌طور طولپایی بر R_1^{n+1} عمل می‌کند و فرض کنیم عدد مثبت $p < n$ وجود دارد چنان‌که $G(R_1^{p+1}) = R_1^{p+1}$ و عمل G بر R_1^{p+1} تحویل‌ناپذیر است. آن‌گاه G به‌صورت $G = SO_0(1,p) \times K \subset Iso(R_1^{p+1}) \times Iso(R^{n-p})$ تجزیه می‌شود.

اثبات. نتیجه مستقیم از اثبات لم ۲. ۲ در [1].

لم ۳. اگر G یک زیرگروه بسته و همبند از $O(1,n)$ باشد، آن‌گاه یکی از گزاره‌های زیر درست است:

۱. G یک نقطه ثابت در H^n دارد.

۲. G یک نقطه ثابت در $H^n(\infty)$ دارد.

۳. عدد مثبت $1 \le p \le n$ و زیرگروه همبند و بستهٔ K از $Iso(R^{n-p})$ وجود دارد چنانکه G به‌صورت $G = SO_0(1,p) \times K \subset Iso(R_1^{p+1}) \times Iso(R^{n-p})$ تجزیه می‌شود.

اثبات. فرض کنیم (۱) و (۲) درست نیستند. آن‌گاه G غیرفشرده است و هیچ جهت هم‌سانگردی را حفظ نمی‌کند. بنا براین با استفاده از قضیهٔ ۱.۵ در [2]، G یک زیرفضا ی E از R_1^{n+1} را حفظ می کند. چون E با R_1^{p+1} طولپا

1. Horosphere
2. Bussman
3. Isotropic

است و تحدید عمل G بر E با $SO_0(1,p)$ یک‌ریخت[1] است، با استفاده از لم ۲، نتیجه می‌گیریم که (۳) درست است.

تبصره ۴. فرض کنیم M یک خمینه ریمانی همبند ساده با بعد n است که تحت عمل یک گروه لی فشرده و همبند G نقص همگنی دو دارد. آن‌گاه یک زیرگروه فشرده و همبند H از $O(n)$ وجود دارد چنان‌که $\frac{M}{G}=\frac{R^n}{H}$.

اثبات. نتیجه مستقیم از قضیه ۸. ۵ در [3].

تبصره ۵. [14] اگر R^n تحت عمل زیرگروه بسته و همبند G از طولپایی‌ها نقص همگنی یک داشته باشد آن‌گاه

۱. $\frac{R^n}{H}$ با R یا $[0,\infty)$ همانریخت است.

۲. یکی از عبارت‌های زیر درست است:

آ) همه مدارها با R^{n-1} طولپا هستند.

ب) یک عدد مثبت و ثابت k وجود دارد به‌طوری‌که هر مدار اصلی با $S^k(c)\times R^{n-k-1}$ طولپا است، $c>0$، و یک مدار تکین طولپا با R^{n-k-1} وجود دارد.

تبصره ۶. اگر R^n، $n>2$، تحت عمل زیرگروه بسته و همبند G از نقص همگنی دو باشد، آن‌گاه:

۱. $\frac{R^n}{G}$ با R^2 یا $[0,+\infty)\times R$ همانریخت است [13].

۲. همه مدارها با R^{n-2} طولپا هستند یا اعداد صحیح و نامنفی k,e وجود دارند به‌طوری‌که بعضی از مدارهای تکین با R^e و سایر مدارها (مدارهای اصلی) با $B\times R^k$ وابرریخت[2] هستند، که B یک مارپیچ در یک فضای اقلیدسی یا یک ابررویه دلخواه از کره است [14] اثبات لم ۶. ۳.

تبصره ۷. [5] آ) فرض کنیم Q_1 و Q_2 ابرکره‌هایی با مرکز $z\in H^n(\infty)$، $p_1\in Q_1$، $p_2\in Q_2$ و f_γ تابع بوشمن وابسته به z است. آن‌گاه

$$d(Q_1,Q_2)=d(p_1,Q_2)=d(p_2,Q_1)=\left|f_\gamma(p_1)-f_\gamma(p_2)\right|$$

ب) اگر γ متعلق به ردهٔ مجانبی ژئودزیک‌های وابسته به نقطه $z\in H^n(\infty)$ باشد، آن‌گاه همه ابرکره‌های با مرکز z ابررویه‌های تراز f_γ هستند. برای یک ابرکره مفروض Q با مرکز z، یک ژئودزیک γ وجود دارد که $Q=f_\gamma^{-1}(0)$ فرض کنیم I_z زیرگروهی از $Iso(H^n)$ است که برگ‌بندی[3] ابرکره‌ها با مرکز z را پایا نگه می‌دارد. برای هر $g\in I_z$ فاصله علامت‌دار بین Q و gQ را با $T(g)$ نشان می‌دهیم (که مثبت است اگر $f_\gamma(gQ)>0$ و منفی است اگر $f_\gamma(gQ)<0$). در این صورت نگاشت $T:I_z\to R$ با گروه جمعی اعداد حقیقی همانریخت است.

1. Isomorphic

2 . Diffeomorphic
3 . Folliation

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.2.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.147]

لم ۸. فرض کنیم $z \in H^n(\infty)$ و $g \in Iso(H^n)$، چنانکه برگ‌بندی ابرکره‌ها با مرکز z تحت g ناورداست. فرض کنیم Q' یک ابرکره با مرکز z باشد به‌طوری‌که $gQ' \neq Q'$ و f تابع بوشمن باشد چنان‌که $Q' = f^{-1}(0)$. هرگاه r_1 و r_2 اعداد حقیقی باشند و $r_1 < 0 < r_2$، آن‌گاه اعداد صحیح m_1 و m_2 وجود دارند که $f(g^{m_1}(p)) < r_1$ و $f(g^{m_2}(p)) > r_2$.

اثبات. قرار می‌دهیم $d(g(p), Q') = a$. چون $g(p) \notin Q'$ آن‌گاه $a > 0$ و $f(g(p)) \neq 0$. فرض کنیم $f(g(p)) > 0$ (حالت $f(g(p)) < 0$ به‌روش مشابه بررسی می‌شود). اگر k یک عددصحیح مثبت باشد آن‌گاه :

$$d(g^k(p), g^{k-1}Q') = d(g(p), Q') = a \qquad (۱)$$

با استفاده از تبصره ۷ داریم:

$$d(g^k Q', Q') = T(g^k) = kT(g) = kd(gQ', Q') \qquad (۲)$$

چون $d(g^k(p), Q') = d(g^k Q', Q')$ آن‌گاه بنابه (۱) و (۲) داریم:

$$d(g^k(p), Q') = ka$$

حال اگر عدد k را به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب کنیم، $d(g^k(p), Q') > r_2$. در غیر این‌صورت:

$$f(g^k(p)) = f(g^k(p)) - 0 = f(g^k(p)) - f(p) = d(g^k(p), Q')$$

از این رو، $f(g^k(p)) > r_2$. با روش مشابه و قراردادن g^{-1} به جای g و انتخاب مناسب k به $f(g^{-k}(p)) < r_1$ می‌رسیم.

قضیه ۹. اگر H^n تحت عمل زیرگروه بسته و همبند G از $Iso(H^n)$ نقص همگنی دو داشته باشد، آن‌گاه

آ) $\frac{H^n}{G}$ با R^2 یا $[0, \infty) \times R$ همانریخت است.

ب) همهٔ مدارها با R^{n-2} وابرریخت هستند یا اعداد صحیح و نامنفی m و e وجود دارند چنان‌که بعضی از مدارها با R^e و سایر مدارها با $B \times R^m$ وابرریخت هستند که B یکی از فضاهای زیر است:

کره، ابررویه همگن از کره، مارپیچ در فضای اقلیدسی.

اثبات. آ) حالت‌های (۱)، (۲) و (۳) در لم ۳ به‌طور جداگانه بررسی می‌شود.

۱. چون G نقطه ثابت دارد فشرده است. بنا براین با استفاده از تبصرهٔ ۴، عمل G بر H^n با عمل یک گروه لی همبند فشرده از طولپایی‌های R^n هم‌ارز مداری است. از این رو، بنابه تبصرهٔ ۶ ، $\frac{H^n}{G}$ با R^2 یا $[0, \infty) \times R$ همانریخت است.

۲. نخست توجه کنید که اگر $z \in H^n(\infty)$ یک نقطهٔ ثابت G و $g \in G$ چنان باشد که برای ابرکره Q با مرکز z، $gQ = Q$ آن‌گاه همه ابرکره‌ها با مرکز z، g پایا هستند. قرار می‌دهیم:

$$L = \{g \in G : gQ = Q \quad \text{برای یک ابرکره دلخواه } Q \text{ با مرکز } z\}$$

دو حالت $G=L$ و $G \neq L$ به‌طور مجزا بررسی می‌شود. اگر $G=L$ آن‌گاه همه ابرکره‌ها با مرکز z، G ناوردا هستند. هرگاه Q یک ابرکره با مرکز z باشد، نگاشت $\eta_Q : H^n \to Q$ را که در تبصرهٔ ۱ معرفی شد در نظر می‌گیریم. اگر $g \in G$ و $p \in H$، آن‌گاه $d(gp, g\eta_Q(p)) = d(p, \eta_Q(p))$. بنا براین، از یکتایی در تبصرهٔ ۱ آ به این نتیجه می‌رسیم که $\eta_Q(gp) = g(\eta_Q(p))$. لذا η_Q، G- مدارهای H^n را روی G- مدارهای Q می‌نگارد. به این ترتیب بنا به تبصره ۱ ب، نگاشت زیر یک همانریختی است:

$$\psi(G(p)) = (f(p), \eta_Q(G(p)))\ \psi : \frac{H^n}{G} \to R \times \frac{Q}{G}$$

چون عمل G بر H^n نقص همگنی دو دارد، Q یک G- خمینه با نقص همگنی یک است. حال از این حقیقت که ابرکره‌ها با R^{n-1} طولپا هستند، با استفاده از تبصره ۵ نتیجه می‌شود که $\frac{Q}{G}$ با R یا $[0,\infty)$ همانریخت است. بنا براین $\frac{H^n}{G}$ با R^2 یا $R \times [0,\infty)$ همانریخت است.

فرض کنیم L یک زیرگروه سره از G است. Q را یک ابرکره با مرکز z در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم Q' یک ابرکره دلخواه دیگر با مرکز z و متمایز از Q و f تابع بوشمن وابسته به z است، به‌طوری‌که $Q' = f^{-1}(0)$. L یک زیرگروه نرمال (بسته و همبند) از G است. هرگاه X یک میدان برداری کیلینگ[1] در جبر لی G باشد که متعلق به جبر لی L نیست و $K = \{\phi_t^X\}$ گروه یک پارامتری از طولپایی‌های H^n تولید شده به‌کمک X باشد، آن‌گاه K یک زیرگروه از G است. اگر $p \in Q'$ آن‌گاه $X(p)$ بر Q' مماس نیست. بنا برین عدد حقیقی $t_0 > 0$ را چنان در نظر می‌گیریم که $\phi_{t_0}^X(Q')$ و $\phi_{-t_0}^X(Q')$ برابر Q نباشند. اگر $r > 0$ آن‌گاه بنابه لم ۸، عدد صحیح m وجود دارد چنان‌که $f(\phi_{mt_0}^X(p)) > r$. این به معنای آن است که خم $\gamma(t) = \phi_t^X(p)$، Q را قطع می‌کند. با روش مشابه می‌توان نشان داد که اگر $r < 0$ آن‌گاه $\gamma(t)$، Q را قطع می‌کند. بنا براین همهٔ K- مدارها، Q را قطع می‌کنند. چون $K \subset G$، همهٔ G- مدارها Q را قطع می‌کنند. در حقیقت اگر D یک G- مدار در H^n و $x \in D \bigcap Q$ آن‌گاه $D \bigcap Q = L(x)$، به سادگی می‌توان نشان داد که نگاشت زیر همانریختی است:

$$\varphi(D) = D \bigcap Q\ \varphi : \frac{H^n}{G} \to \frac{Q}{L},$$

چون H^n یک G- خمینه با نقص همگنی دو است، Q باید یک L- خمینه با نقص همگنی دو باشد. بنا براین با استفاده از تبصرهٔ ۶ نتیجه به‌دست می‌آید.

۳. H^n برابر است با اجتماع همهٔ نقاط $(x_0, x_1, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_{n-p})$ متعلق به $R_1^{p+1} \times R^{n-p}$ با این خاصیت که $x_0 > 0$ و $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_p^2 = -y_1^2 - \dots - y_{n-p}^2 - 1$. نگاشت $\sigma : H^n \to R^{n-p}$ با ضابطهٔ را

$$\sigma(x_0, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{n-p}) = (y_1, \dots, y_{n-p})$$

در نظر می‌گیریم. به‌سادگی می‌توان نشان داد که σ یک همانریختی $\hat{\sigma} : \frac{H^n}{G} \to \frac{R^{n-p}}{K}$ القاء می‌کند، چنان‌که $\hat{\sigma}(G(x)) = K(\sigma(x))$. بنابه تبصره ۶، داریم

1. Kiling vector field

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.2.2]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.147]

$\frac{R^{n-p}}{K}$ با R^2 یا $R\times[0,\infty)$ همانریخت است. بنا براین نتیجه موردنظر به‌دست می‌آید.

دوباره حالت‌های (۱)، (۲) و (۳) در لم ۳ را درنظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم در هر کدام از این حالت‌ها مدارهای G- عمل بر H^n با مدارهای عمل‌هایی با نقص همگنی یک یا نقص همگنی دو بر فضای اقلیدسی وابرریخت هستند. آن‌گاه به آسانی بنابر تبصره ۵ و تبصره ۶ حکم به‌دست می‌آید. در حالت (۱) بنابه تبصرهٔ ۴، همهٔ مدارها با مدارهای یک عمل با نقص همگنی دو بر R^n وابرریخت هستند. در حالت (۲)، هر مدار G- عمل بر H^n با نقص همگنی دو با یک مدار G- عمل روی ابرکرهٔ Q با نقص همگنی یک معادل است و می‌دانیم که Q با R^{n-1} طولپا است. در حالت (۳)، هر G- مدار در H^n با $H^p\times K(x)$ که $x\in R^{n-p}$، همانریخت است. بنا براین K بر R^{n-p} با نقص همگنی دو عمل می‌کند. چون H^p با R^p وابرریخت است، حکم به‌دست می‌آید.

منابع

1. Arouche A., Deffaf M., Zeghib A., "On lorentze dynamics: from group actions to warped products via homogeneous spaces", Trans. Am. Math. Soc, 359 (2007) 1253-1263.
2. Boubel C., Zeghib A., "Isometric actions of Lie subgroups of the Moebius group", Nonlinearity 17 (2004) 1677-1688.
3. Bredon. G. E., "Introduction to compact transformation groups", Acad. Press, New York, London (1972).
4. Di Scala A. J., Olmos C., "The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space", Math. Z, 237 (2001) 199-209.
5. Eberlin P., O'Neil B., "Visibility manifolds", Pasific J. Math, 46, 1 (1973) 45-109.
6. Hsiang W. Y., Lawson H. B., "Minimal submanifolds of low Cohomogeneity", J. Diff. Geometry, 5 (1971) 1-38.
7. Michor P. W., "Isometric actions of Lie groups and invariants", Lecture course at the university of Vienna (1996) 97.
8. Mirzaie R., "Cohomogeneity two actions on flat Riemannian manifolds", Acta Mathematica Sinica, 23 (2007) 1587-1592.
9. Mirzaie R., "On negatively curved Riemannian manifold of low cohomogeneity", Hokkaido mathematical journal, 38 (2009) 797-803.
10. Mirzaie R., "On orbits of isometric actions on flat Riemannian manifolds", Kyushu J. Math, 65 (2011) 383-393.
11. Mirzaie R., "On Riemannian manifolds of constant negative curvature", J. Korean Math. Soc, 48 (2011) 23-31.

12. Mirzaie R., "On topology of some Riemannian manifolds of negative curvature with a compact Lie group of isometries", Hokkaido Math. J. (2015).

13. Mirzaie R., "On Euclidean G-manifolds which have two dimensional orbit spaces", International J. Math, 22, 3 (2011) 399-406.

14. Mirzaie R., Kashani S. M. B., "On cohomogeneity one flat Riemannian manifolds", GlasgwMath. J, 44 (2002) 185-190.

15. Mostert P., "On a compact Lie group action on manifolds", Ann. Math, 65 (1957) 447.

16. Palais R. S., Terrg CH. L., "A general theory of canonical forms", Trans. Am. Math.Soc, 300 (1987) 771-789.

17. Podesta F., Spiro A., "Some topological properties of cohomogeneity one manifolds with negative curvature" Ann. Global. Anal. Geom, 14 (1966) 69-79.

18. Searle C., "Cohomogeneity and positive curvature in low dimensions", Math. Z, 214 (1993) 491-498.

19. Straume E., "Compact connected Lie transformation groups on spheres with low cohomogeneity. I", Memoris of the AMS, Vol. 119, 569 (1996).

20. Straume E., "Compact connected Lie transformation groups on spheres with low cohomogeneity. II", Memoirs of the AMS, Vol. 125, 595 (1997)