

## روش هسته تبهگن اصلاح شده برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی

احمد ملبهرامی\*

دانشگاه ایلام، گروه ریاضی

دریافت ۹۵/۱۲/۲۶ پذیرش ۹۷/۱۲/۱۱

### چکیده

در این مقاله برای تحقیق روی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چند بعدی از روش هسته تبهگن اصلاح شده استفاده می‌شود. اصلاح یاد شده، از اعمال تقریب به کار رفته برای جداسازی هسته برای تابع منبع حاصل می‌شود. برای حصول تقریب‌های مورد نیاز از روش درون‌یابی لاگرانژی استفاده می‌شود. آنالیز خطا و همگرایی روش به صورت دقیق ارائه می‌شود. کارایی روش با اعمال آن روی چند مثال نشان داده شده و مقایسه‌ای نیز با برخی روش‌ها انجام می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی، روش درونیابی لاگرانژی چندبعدی، روش هسته تبهگن، روش محاسبه مستقیم، روش هسته تبهگن اصلاح شده.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۴۵B۰۵

### مقدمه و معرفی مدل معادلات انتگرال فردهلم

پدیده‌های طبیعی معمولاً در قالب یک معادله دیفرانسیل (معمولی یا جزئی)، معادله انتگرال، معادله انتگرال-دیفرانسیل و یا دستگاهی از اینها مدل‌بندی می‌شوند. از این‌رو، یافتن جواب‌های معادلات انتگرال نقش مهمی در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی ایفا می‌کند [۱]. از کاربردهای معادلات انتگرال می‌توان به فیزیک پلاسما، مسئله اصلاح تصویر و تنظیم آن، نظریه پراش و رفتارهای الکتروشیمیایی الکتروود میکروبانند مشتق شده اشاره کرد [۲].

یک معادله انتگرال فردهلم  $n$ -بعدی به صورت (۱) است

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_B k(x,t)F(u(t))dt, x \in A, \quad (1)$$

که در آن  $\phi, f$  (تابع منبع)،  $k$  (هسته) و  $F$  توابعی معلوم،  $\lambda$  یک پارامتر، و  $u$  تابع مجهول است که باید معین شود. همچنین  $A, B \subseteq R^n$ ،  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  و  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ . برای  $\phi(x) \equiv 0$ ،  $\phi(x) \equiv 1$ ، و  $\phi(x) \not\equiv 0$  معادله (۱) به ترتیب به نوع اول، دوم و سوم معروف است. در این پژوهش برای نواحی  $A$  و  $B$  فرم مستطیلی  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  مورد نظر است. اگر  $F(u(t)) = u(t)$  آن‌گاه معادله (۱) را خطی گوئیم. نمایش دیگری از معادله انتگرال فردهلم  $n$ -بعدی از جای‌گزینی  $k(x,t)F(u(t))$  با  $K(x,t,u(t))$  در معادله (۱) حاصل می‌شود که به معادله غیرخطی اریسون<sup>۱</sup> معروف است [۳].

تا کنون روش‌های زیادی برای حل معادلات انتگرال به کار رفته است که به دو دسته تحلیلی و عددی تقسیم می‌شود. از روش‌های تحلیلی می‌توان به روش‌های هموتویی و دیگر روش‌هایی که جواب را به صورت دنباله یا سری حاصل می‌کنند اشاره کرد. روش‌های عددی برای معادلات انتگرال شامل دو گروه عمده روش‌های تصویری<sup>۲</sup> و نیسترتم<sup>۳</sup>

\* نویسنده مسئول a.molabahrani@ilam.ac.ir

1. Urysohn  
2. Projection methods  
3. Nyström methods

هستند [۳]. همچنین اخیراً روش‌های سودمندی برای حل معادلات انتگرال ولترا، معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری و معادلات دیفرانسیل کسری توسعه یافته است [۴]، [۵]، [۶]. در این پژوهش یک اصلاح از روش هسته تبهگن برای حل معادلات انتگرال فردهلم  $n$ -بعدی نوع دوم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_B k(x,t)F(u(t))dt, x \in A, \quad (2)$$

به کار می‌رود. در [۷]، یک اصلاح از روش هسته تبهگن برای حل یک دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم یک بعدی استفاده شده است.

در این پژوهش، یک صورت اصلاح شده از روش هسته تبهگن برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چند بعدی بررسی می‌شود. صورت اصلاح شده مورد نظر قبلاً در [۷] و [۸] برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل نوع فردهلم تحت شرایط آمیخته و نیز دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم یک‌بعدی به کار رفته است که نتایج حاصل، نوید بخش آن است که توسعه این صورت اصلاح شده برای معادلات انتگرال فردهلم چندبعدی نیز می‌تواند نتایج امید بخشی را حاصل کند. اغلب مواجهه با معادلات انتگرال غیرخطی چالش‌هایی را پیش‌رو می‌گذارد که از مهم‌ترین آنها می‌توان به یافتن تمام جواب‌ها و یا تقریب مناسبی از آنها اشاره کرد. در این پژوهش نشان می‌دهیم که برای آن دسته از معادلات خطی و غیر خطی که امکان یافتن جواب دقیق آنها فراهم باشد، روش پیشنهادی این مهم را به خوبی و بدون نقص انجام می‌دهد. منظور از "امکان" در این جا این است جواب معادله بررسی شده متعلق به زیرفضای تولید شده توسط پایه باشد. همچنین روش پیشنهادی توانایی ارائه تقریب مناسب از جواب‌هایی را دارد که "امکان" اشاره شده مذکور در مورد آن مهیا نباشد.

### روش هسته تبهگن<sup>۱</sup>

روش هسته تبهگن روشی معمول برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم است. این روش معادله داده شده را به یک دستگاه جبری از معادلات تبدیل می‌کند که اگر معادله بررسی شده خطی باشد دستگاه جبری متناظر آن خطی در غیر این صورت غیرخطی است [۹] و [۱۰]. برای توصیف روش، فرض کنید یک تقریب تبهگن مرتبه  $m$  هسته معادله (۳) بدین صورت باشد

$$k_m(x,t) = \sum_{j=1}^m g_j(x)h_j(t), \quad (3)$$

که در آن توابع  $g_j$  و  $h_j$ ،  $j=1,2,\dots,m$ ، مستقل خطی‌اند. با نمایش تقریب مرتبه  $m$  جواب متناظر تقریب (۲) معادله (۳) به صورت  $u_m$ ، روش هسته تبهگن به صورت گام‌های ذیل قابل ذکر است:

۱. با جای گذاری (۳) در (۲) داریم:

$$u_m(x) = u_m(x; \alpha) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x), \quad (4)$$

که در آن

$$\alpha_j = \int_B h_j(t)F(u_m(t))dt, j=1,2,\dots,m. \quad (5)$$

۲. با جای گذاری (۴) در (۵) دستگاه جبری (۶) حاصل می‌شود:

$$\alpha_j = \int_B h_j(t)F(f(t) + \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_r g_r(t))dt, j=1,2,\dots,m. \quad (6)$$

۳. حل دستگاه معادلات جبری (۶) و محاسبه مقادیر  $\alpha_j$  و جای‌گذاری آن‌ها در (۴) و حصول جواب (جواب‌های) تقریبی معادله (۳). در این گام تقریبی از  $u_m$  حاصل می‌شود که آن‌را با  $\tilde{u}_m$  نشان می‌دهیم.

**ملاحظه ۱.** در حالت کلی دستگاه معادلات جبری (۶) غیرخطی است. برای حل آن، نخست سعی می‌شود جواب (جواب‌های) دقیق محاسبه شود در غیر این صورت از یک روش تکراری مانند نیوتن برای محاسبه جواب (جواب‌های) عددی آن استفاده می‌شود که در این حالت تقریبی از  $u_m$  حاصل می‌شود که آن‌را با  $\tilde{u}_m$  نشان می‌دهیم. باید توجه داشت که دستگاه (۶) یک دستگاه ساده برای حل نیست و گاهی لازم است انتگرال‌های موجود در آن به صورت تقریبی محاسبه شوند.

**ملاحظه ۲.** مطابق (۴) غیرخطی بودن معادله (۳) فقط بر مقادیر  $\alpha_j$  ها اثر می‌گذارد و فرم جواب را تغییر نمی‌دهد.

**ملاحظه ۳.** برای حالت خطی معادله (۲) دستگاه (۶) به صورت خطی (۷) ساده می‌شود

$$\alpha_j - \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_r \int_B h_j(t) g_r(t) dt = \int_B h_j(t) f(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

صورت ماتریسی دستگاه (۷) عبارت است از  $A\alpha = b$ ، که در آن  $A = I_m - \lambda \int_B H(t)G(t)dt$ ،  $b = \int_B H(t)f(t)dt$ ،  $H(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_m(t))^T$  و  $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$ ،  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$

**ملاحظه ۴.** اگر در معادله (۳) هسته تبهگن باشد، یعنی  $k(x, t) = \sum_{j=1}^m g_j(x)h_j(t)$ ، در این صورت از روش هسته تبهگن به عنوان روش محاسبه مستقیم<sup>۱</sup> یاد می‌شود [۸].

## یک اصلاح روش هسته تبهگن<sup>۲</sup>

برای به دست آوردن یک اصلاح از روش هسته تبهگن که از آن به MDKM یاد می‌کنیم [۱۱] و [۷]، تابع منبع را با همان تابع پایه‌ای که یک تقریب تبهگن هسته را حاصل کرده، تقریب می‌زنیم. مطابق (۳) توابع پایه برای تقریب هسته عبارت است از  $g_j$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$ ، بنابراین داریم

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^m c_j g_j(x), \quad (8)$$

که در آن  $c_j$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$ ، مقادیر معلومی‌اند. از (۴) و (۸) داریم:

$$u_m(x) = u_m(x; \alpha) = \sum_{j=1}^m (c_j + \lambda \alpha_j) g_j(x), \quad (9)$$

با استفاده از (۹) دستگاه معادلات جبری (۶) بدین صورت حاصل می‌شود:

$$\alpha_j = \int_B h_j(t) F \left( \sum_{r=1}^m (c_r + \lambda \alpha_r) g_r(t) \right) dt, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

**ملاحظه ۵.** مطابق (۵)، تقریب مرتبه  $m$  ام حاصل از MDKM، یعنی  $u_m$ ، همانند هسته و تابع منبع بر حسب توابع پایه‌ای  $g_j$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$ ، تقریب زده می‌شود. فرض کنید جواب معادله (۳) متعلق به یک فضای باناخ مانند  $V$  باشد و زیرفضای تولید شده توسط پایه  $\{g_j\}_{j=1}^m$  را با  $V_m$  نمایش دهیم آن‌گاه  $f_m, u_m, k_m[u_m] \in V_m$  که در آن عملگر انتگرالی  $k[u] = \lambda \int_B k(x, t) F(u(t)) dt$  به صورت  $k[u]$  تعریف می‌شود.

1. Direct Computation Method (DCM)

2. Modified Degenerate Kernel Method (MDKM)

**ملاحظه ۶.** ۲-۳. اگر تقریب حاصل از (۹) را به صورت عملگری  $P_m u = u_m$  نمایش دهیم، که در آن  $P_m: V \rightarrow V_m$ ، واضح است که عملگر  $P_m$  یک عملگر تصویری است و خاصیت  $P_m^2 = P_m$  را صدق می‌دهد. از این رو، اگر یک جواب دقیق معادله (۳) در  $V_m$  باشد آن‌گاه MDKM آن جواب را تولید می‌کند.

**ملاحظه ۷.** ۳-۳. فرم عملگری معادله (۳) عبارت است از  $u = f + k[u]$ . از اعمال عملگر  $P_m$  به طرفین معادله (۳) داریم  $P_m u = P_m f + P_m k[u]$  که معادل  $u_m = f_m + k_m[u_m]$  است و فرم غیرعملگری آن بدین صورت است:

$$u_m(x) = f_m(x) + \lambda \int_B k_m(x,t) F(u_m(t)) dt, \quad x \in A. \quad (11)$$

در این پژوهش، توابع پایه‌ای را توابع لاگرانژی در نقاط هم‌محلی  $\hat{x}_j$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$ ، در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم  $g_j(\hat{x}_r) = \delta_{jr}$  که در آن  $\delta_{jr}$  دلتای کرونکر است. بدیهی است که در این حالت MDKM به روش هم‌محلی لاگرانژی<sup>۱</sup> تبدیل می‌شود [۱۱]. ارتباط بین روش هسته تبهنگن و روش‌های تصویری (روش‌های هم‌محلی و گالرکین) در [۱۱] آمده است. بنابراین، مطابق ملاحظه ۶، اگر معادله بررسی شده دارای جوابی به صورت چندجمله‌ای باشد آن‌گاه روش حاضر آن جواب را حاصل می‌کند.

### آنالیز خطا و همگرایی MDKM

برای آنالیز خطا و همگرایی، شبیه آن‌چه در [۷] آمده است، به چند فرضیه<sup>۲</sup> نیاز داریم که نخست به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

۱. فرض کنید تابع  $F$  در شرط لیپشیتس<sup>۳</sup> بدین صورت صدق کند:

$$\|F(u) - F(\tilde{u}_m)\|_{\infty} \leq L_F \|u - \tilde{u}_m\|_{\infty},$$

که در آن  $L_F$  ثابت نامنفی است.

۲. ثابت مثبتی مانند  $\tilde{k}$  یافت شود به طوری که

$$\|k\|_{\infty} \leq \tilde{k}.$$

۳. ثابت نامنفی  $\tilde{F}_m$  یافت شود به طوری که

$$\|F(\tilde{u}_m)\|_{\infty} \leq \tilde{F}_m.$$

۴. این نامساوی برقرار باشد:

$$|\lambda| \tilde{k} L_F \prod_{r=1}^n (b_r - a_r) < 1.$$

قضیه ۸. ۴-۱. فرض کنید که فرضیه‌های ۱ تا ۴ برقرار باشند. در این صورت برای تقریب مرتبه  $m$  ام حاصل از MDKM، یعنی  $\tilde{u}_m$ ، داریم:

$$\|u - \tilde{u}_m\|_{\infty} \leq \frac{e_m(f) + |\lambda| \tilde{F}_m e_m(k) \prod_{r=1}^n (b_r - a_r)}{1 - |\lambda| \tilde{k} L_F \prod_{r=1}^n (b_r - a_r)}, \quad (12)$$

که در آن  $e_m(k) = \|k - k_m\|_{\infty}$  و  $e_m(f) = \|f - f_m\|_{\infty}$

برهان. از معادله (۲) و (۱۱) داریم:

1. Lagrange Collocation Method  
2. Hypothesis  
3. Lipschitz

$$u(x) - \tilde{u}_m(x) = f(x) - f_m(x) + \lambda \int_B (k(x,t)F(u(t)) - k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(t)))dt,$$

پس

$$\|u(x) - \tilde{u}_m\|_\infty \leq \|f - f_m\|_\infty + |\lambda| \int_B \|k(x,t)F(u(t)) - k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(t))\|_\infty dt. \quad (۱۳)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\begin{aligned} & \|k(x,t)F(u(x)) - k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(x))\|_\infty \\ &= \|k(x,t)F(u(x)) - k(x,t)F(\tilde{u}_m(x)) + k(x,t)F(\tilde{u}_m(x)) - k_m(x,t)F(\tilde{u}_m(x))\|_\infty \\ &\leq \tilde{k}L_F \|u - \tilde{u}_m\|_\infty + e_m(k)\tilde{F}_m. \end{aligned} \quad (۱۴)$$

از (۱۲) و (۱۴) کران خطا بدین صورت حاصل می‌شود:

$$e_m(u) \leq \frac{e_m(f) + |\lambda| \tilde{F}_m e_m(k) \prod_{r=1}^n (b_r - a_r)}{1 - |\lambda| \tilde{k}L_F \prod_{r=1}^n (b_r - a_r)}, \quad (۱۵)$$

که در آن  $e_m(u) = \|u - \tilde{u}_m\|_\infty$  و این برهان را کامل می‌کند.

همگرایی روش از (۱۵) حاصل می‌شود که در نتیجه ذیل آمده است.

نتیجه ۹. مطابق (۱۵) اگر  $e_m(k) \rightarrow 0$  و  $e_m(f) \rightarrow 0$  وقتی که  $m \rightarrow \infty$  آن گاه  $e_m(u) \rightarrow 0$  وقتی که  $m \rightarrow \infty$ .

### بررسی چند مثال

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش آن را روی چند مثال از مراجع مختلف اجرا می‌کنیم. برای مقایسه جواب حاصل از با جواب دقیق از نرم بیشینه خطا  $e_m(u) = \max_{x \in A} |u(x) - u_m(x)|$  استفاده می‌کنیم. در مثال‌های ذیل فرض می‌کنیم  $A = B$ . هم‌چنین در مثال‌های ذیل از شکل معمول متغیرهای مستقل برای توابع استفاده شده است.

مثال ۱. معادله انتگرال فردهلم دوبعدی ۱۶ را در نظر بگیرید [۱۲]:

$$u(x, y) = 1 - \frac{\sin(\sqrt{\pi}x)\sin(\sqrt{\pi}y)}{5xy} + \frac{1}{5} \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(xs)\cos(yt)u(s, t)dsdt. \quad (۱۶)$$

با انتخاب دو نقطه هم‌محلی چبیشف یا متساوی‌فاصله، جواب دقیق (۱۶) را حاصل می‌کند. برای نقاط هم‌محلی متساوی‌فاصله داریم:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{5}, \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

و

$$\begin{aligned} u(x; \alpha) &= \frac{1}{5}(5\alpha_1 - \pi + 5) + \frac{1}{5\sqrt{\pi}}(-5\alpha_1 + 5\alpha_3 + \pi)y \\ &+ \frac{1}{5\pi}(\sqrt{\pi}(-5\alpha_1 + 5\alpha_2 + \pi) - (-5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4 + \pi))x, \end{aligned}$$

پس جواب دقیق (۱۶) بدین صورت حاصل می‌شود:

$$u(x, y) = u_2(x, y) = 1.$$

ملاحظه می‌شود که تقریب مرتبه دوم حاصل از MDKM جواب دقیق (۱۶) را تولید می‌کند و داریم  $e_2(u) = 0$  که مطابق ملاحظه ۶ دور از انتظار نیست.

مثال ۲. معادله انتگرال فردهلم دوبعدی (۱۷) را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_0^1 \int_0^1 \left( e^{\left(\frac{x}{5}\right)^5} - 1 \right) u(s, t) ds dt, \quad (17)$$

$$f(x, y) = xy - \frac{3125}{2x^{10}} \left( e^{\frac{x^5}{3125}} (x^5 - 3125) + 3125 \right) + \frac{1}{4}$$

مشابه مثال قبل، با انتخاب دو نقطه هم‌محلی چبیشف یا متساوی‌فاصله، MDKM جواب دقیق (۱۷) به دست می‌آید. برای نقاط هم‌محلی متساوی‌فاصله داریم:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = \frac{19531249}{4} - 4881250 \sqrt[3]{e}, \end{cases}$$

و

$$u(x; \alpha) = \alpha_1 + x(-\alpha_1 + \alpha_3 + y + 4881250 \sqrt[3]{e} - \frac{19531249}{4}),$$

پس جواب دقیق (۱۷) بدین صورت حاصل می‌شود:

$$u(x, y) = u_2(x, y) = xy.$$

ملاحظه می‌شود که تقریب مرتبه دوم حاصل از MDKM جواب دقیق (۱۷) را تولید می‌کند و داریم  $e_2(u) = 0$  که مطابق ملاحظه ۶ دور از انتظار نیست.

مثال ۳. معادله انتگرال فردهلم سه‌بعدی (۱۸) را در نظر بگیرید

$$u(x, y, z) = xyz^2 - \frac{2 + xy + e^{xy}(-2 + xy)}{2x^3} + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y^3 e^{xyr} u(s, t, r) ds dt dr. \quad (18)$$

با انتخاب سه نقطه هم‌محلی متساوی‌فاصله، MDKM جواب دقیق (۱۸) را حاصل می‌کند. برای نقاط هم‌محلی متساوی‌فاصله داریم

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \frac{1}{96}, \alpha_5 = 9 - 7\sqrt[4]{e}, \\ \alpha_6 = \frac{1}{4}(5 - 3\sqrt{e}), \alpha_7 = \frac{1}{12}, \alpha_8 = 10 - 6\sqrt{e}, \alpha_9 = \frac{3 - e}{2}. \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر  $\alpha_j$  ها در  $u_3(x, y, z; \alpha)$  متناظر (که به دلیل طولانی بودن از ذکر آن خوداری شده است)، جواب دقیق (۱۸) بدین صورت حاصل می‌شود:

$$u(x, y, z) = u_3(x, y, z) = xyz^2.$$

ملاحظه می‌شود که تقریب مرتبه سوم حاصل از MDKM جواب دقیق (۱۸) را تولید می‌کند و داریم  $e_3(u) = 0$  که مطابق ملاحظه ۶ دور از انتظار نیست. هم‌چنین با انتخاب دو نقطه هم‌محلی چبیشف و متساوی‌فاصله به ترتیب داریم:

$$e_2(u) = 0.402132 \text{ و } e_2(u) = 0.141500$$

مثال ۴. معادله انتگرال فردهلم دوبعدی غیرخطی (۱۹) را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u(x, y) = x \cos(y) + \frac{1}{20} (\cos^4(1) - 1) - \frac{1}{12} (\cos^2(1) + 2) \sin(1) + \int_0^1 \int_0^1 (s \sin(t) + 1) u^3(s, t) ds dt. \quad (19)$$

برای معادله (۱۹) با توجه به تبه‌گن بودن هسته معادله، نیازی به تقریب تابع منبع،  $f$ ، نیست. در این حالت MDKM معادل DCM می‌شود. بنابراین از معادله جبری متناظر (۱۳) با  $m = 1$  (از معادله (۱۰) با  $m = 1$  و  $c_r = 0$ )، با جای‌گزینی  $\alpha$  به جای  $\alpha_1$ ، داریم:

$$\alpha = \frac{1}{480}(15 + 90\sin(1) + 15\sin(3) - 12\sin(2) - 3\cos(4)),$$

$$\frac{150 + 900\sin(1) + 100\sin(2) - 60\sin(3) + 10\sin(4) + 18\cos(1) - 168\cos(2) - 15\cos(3) + 18\cos(4) - 3\cos(5) \pm 120\beta}{960(\cos(1) - 3)},$$

که در آن  $\beta = \sqrt{2(81 + 44\sin(1) - 48\sin(2) - 4\sin(3) + 20\cos(1) - 48\cos(2) + 12\cos(3) - \cos(4))}$  هم چنین مطابق (۴) با  $m = 1$  (مطابق (۵) با  $m = 1$  و  $c_r = 0$ ) داریم

$$u(x, y; \alpha) = x \cos(y) + \frac{1}{20}(\cos^4(1) - 1) - \frac{1}{24}(\cos^2(2) + 5)\sin(1) + \alpha.$$

با جای گذاری مقادیر  $\alpha$  در  $u(x, y; \alpha)$  سه جواب دقیق (۱۹) به کمک DCM بدین صورت حاصل می شود:

$$u(x, y) = x \cos(y), x \cos(y) + \frac{2 + 12\sin(1) - 2\cos(2) \pm \beta}{8(\cos(1) - 3)}.$$

ملاحظه ۱۰. برای بررسی شرط  $|\lambda| \tilde{k} L_F \prod_{r=1}^n (b_r - a_r) < 1$  (شرط ۴ در بخش ۴) برای مثال های مذکور، قرار

می دهیم  $\gamma = |\lambda| \tilde{k} L_F \prod_{r=1}^n (b_r - a_r)$  در این صورت برای مثال های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب داریم  $\gamma = \frac{\pi}{5}$

و  $\gamma = |e^{(0.2)^5} - 1| \cong 0.000320051$  و  $\gamma = e$  بنابرین برای دو مثال اول و دوم  $\gamma < 1$  و برای مثال سوم  $\gamma > 1$

حاصل می شود. از طرفی نتایج حاصل برای مثال ۵ همگرایی روش را تأیید می کند از این رو، شرایط داده شده در قضیه ۸ شرایط کافی برای همگرایی MDKM هستند.

ملاحظه ۱۱. برای مثال های مذکور زمان محاسبات و اطلاعات مربوط در جدول ۱ آمده است. با دقت در جدول ۱ ملاحظه می شود که MDKM از نظر هزینه و پیچیدگی محاسبات قابل قبول و مناسب است. برای حصول نتایج جدول ۱ رایانه استفاده شده یک لب تاب اپل (Apple MacBook Pro) است.

مشخصات نرم افزاری: نرم افزار استفاده شده برای پیاده سازی متمتیکای ۹ و سیستم عامل ویندوز ۸، و مشخصات سخت افزاری عبارت است از: Intel® Core™ 2 Duo CPU, P8600@2.40 GHz, 1.58 GHz, 2.74GB Of RAM. واضح است که با جای گزینی سیستم عامل لینوکس به جای ویندوز هزینه محاسباتی جدول ۱ را می توان تا سطح قابل ملاحظه ای کاهش داد.

جدول ۱. زمان محاسبات مورد نیاز (بر حسب ثانیه) برای مثال های ۱، ۲، ۳ و ۴

مثال	مرتبه تقریب	CPU time (in seconds)	ماکسیمم خطا
۱-۵	۲	۲۰	۰
۲-۵	۲	۲	۰
۳-۵	۳	۸۸	۰
۴-۵	-	۳۵	۰

## مقایسه و بحث

در این بخش، مقایسه ای بین الگوریتم های عنوان شده در این پژوهش و الگوریتم های [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، برای نشان دادن دقت الگوریتم های اشاره شده بررسی حاضر، انجام می شود. در این جا نخست به چگونگی امکان یافتن تمام جواب های یک معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می پردازیم. حالت اول فرض کنید هسته معادله (۳) تبهگن باشد آن گاه این امکان وجود دارد که بتوان تمام جواب های دقیق آن را یافت. اگر بتوان دستگاه (معادله) جبری (۶) را به صورت

دقیق حل کرد آن‌گاه با جای‌گذاری مقادیر حاصل در (۴) تمام جواب‌های معادله (۳) به‌صورت دقیق حاصل می‌شوند (مثال ۴ را ببینید). ممکن است یافتن تمام جواب‌های (۶) به‌صورت دقیق مقدور نباشد، در این حالت متناظر جواب‌های دقیق (۶) جواب‌های دقیق معادله (۳) و متناظر جواب‌های تقریبی (۶) جواب‌های تقریبی معادله (۳) حاصل می‌شود (معادله (۱۹)). برای حالت دوم فرض کنید هسته معادله (۳) غیرتبهگن باشد، در این حالت جواب‌های دقیق (۱۰) ممکن است جواب‌های دقیق متناظر معادله (۳) را توسط (۵) حاصل کند (مثال‌های ۱، ۲ و ۳). به‌طور خلاصه، جواب‌های دقیق (۶) و (۱۰) می‌توانند جواب‌های دقیق متناظر معادله انتگرال (۳) را به‌ترتیب به‌کمک (۴) و (۵) حاصل کنند. جواب‌های تقریبی (۶) و (۱۰) جواب‌های تقریبی متناظر معادله انتگرال (۳) را به‌دست می‌دهد.

در [۱۲] معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم دوبعدی با توابع پایه‌ای شعاعی<sup>۱</sup> گاوسی بررسی شده است که در آن برای معادله (۱۶) برای تقریب مرتبه نهم  $e_9(u) = 2.3 \times 10^{-10}$  حاصل شده است، در حالی که مطابق مثال ۱ تقریب مرتبه دوم حاصل از MDKM جواب دقیق آن معادله را به‌دست می‌دهد، یعنی  $e_2(u) = 0$ . هم‌چنین در [۱۳] و مراجع استفاده شده آن برای معادله انتگرال

$$u(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{x}{6(1+y)} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1+y} (1+t+s) u^2(s, t) ds dt,$$

فقط یک جواب دقیق گزارش شده است، در حالی که با به‌کارگیری DCM به‌راحتی می‌توان نشان داد که معادله ذکر شده دارای دو جواب دقیق بدین‌صورت است:

$$u(x, y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}, \frac{1}{(x+y+1)^2} + \frac{24x(1-\frac{8}{3}\ln\frac{2}{3})}{(y+1)(3+7\ln 2)}.$$

در [۱۳] نویسندگان مقاله، روش مقدار میانگین انتگرال<sup>۲</sup> را برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی توسعه داده‌اند. لیکن به‌دلیل اجرای نامناسب آن روش نتوانسته‌اند تمام جواب‌های معادلات بررسی شده را ارائه دهند. به‌عنوان نمونه، برای معادله (۴-۵) در [۱۳] و مرجع استفاده شده آن فقط یک جواب دقیق گزارش شده است در حالی که به‌کمک DCM سه جواب دقیق برای آن معادله حاصل می‌شود (مثال ۴). هم‌چنین در [۱۳] با اجرای IMVM برای معادله (۱۷) جواب مناسبی فراهم نشده است، در حالی که مطابق نتایج مثال ۲، تقریب مرتبه دوم حاصل از MDKM جواب دقیق آن را به‌دست می‌دهد. حال معادله انتگرال فردهلم نوع دوم دوبعدی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱۴] و [۱۳]:

$$u(x, y) = \frac{x}{16(1+y)} - \ln\left(\frac{xy}{1+y^2} + 1\right) + \int_0^1 \int_0^1 \frac{x(1-s^2)}{(y+1)(t^2+1)} (1-e^{-u(s,t)}) ds dt, \quad (20)$$

در [۱۳] و [۱۴] تنها یک جواب دقیق برای معادله (۲۰) گزارش شده است که عبارت است از:

$$u(x, y) = -\ln\left(\frac{xy}{1+y^2} + 1\right).$$

در ادامه نشان می‌دهیم که معادله (۲۰) حداقل یک جواب دقیق دیگری هم دارد. با اجرای DCM روی معادله (۲۰)، داریم:

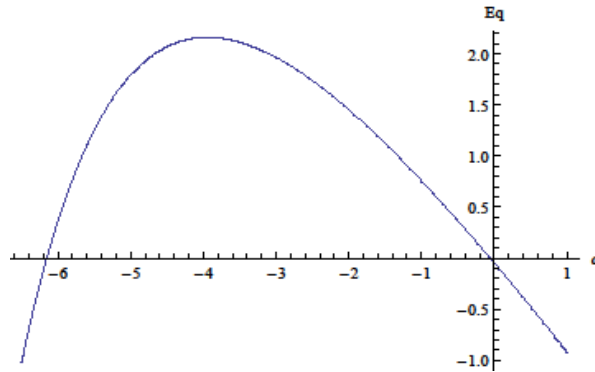
$$u(x, y; \alpha) = \frac{x(16\alpha+1)}{16(1+y)} - \ln\left(\frac{xy}{1+y^2} + 1\right), \quad (21)$$

1. Radial Basis Functions (RBF)  
2. Integral Mean Value Method (IMVM)

که در آن  $\alpha$  جوابی برای معادله (۲۲) است (معادله متناظر معادله (۴-۲))

$$-\alpha + \frac{\pi}{6} + \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{st(s^2-1)}{(t^2+1)^2} + \frac{s^2-1}{t^2+1} \right) e^{-\frac{s(\alpha+1)}{t+1}} ds dt = 0, \quad (22)$$

به راحتی می توان نشان داد که  $\alpha = -\frac{1}{16}$  ریشه معادله (۳-۶) است که با جای گذاری آن در (۲۱) جواب گزارش شده در [۱۳] و [۱۴] حاصل می شود. حال نشان می دهیم که معادله (۲۲) ریشه دیگری در فاصله  $[-6.2, -6]$  دارد. با رسم طرف اول معادله (۲۲) نسبت به  $\alpha$  ملاحظه می شود که منحنی حاصل محور  $x$  ها را در فاصله  $[-6.2, -6]$  نیز قطع می کند (نمودار ۱). پس معادله انتگرال (۲۰) جواب دقیق دیگری به فرم (۲۱) دارد که در آن  $\alpha$  در فاصله  $(-6.2, -6)$  قرار دارد. با محاسبه مقدار تقریبی ریشه یاد شده به کمک روش نیوتن با شروع از نقطه  $\alpha_0 = -6.2$  به عنوان نقطه آغازین، مقدار تقریبی ریشه به صورت  $\alpha = -6.15035$  حاصل می شود.



شکل ۱. منحنی نمایش نمودار طرف اول معادله (۳-۶)

بنابراین صورت تقریبی جواب دقیق دیگر معادله (۲۰) بدین صورت است که به ازای آن خطای مانده متناظر برابر صفر می شود:

$$u(x, y) = -\frac{6.08785x}{1+y} - \ln\left(\frac{xy}{1+y^2} + 1\right).$$

### نتیجه

در این مقاله، یک اصلاح از روش هسته تبهگن برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم چندبعدی به کار رفت. برای ساخت تقریب تبهگن هسته و نیز تابع منبع از درون یابی لاگرانژی استفاده شد. روش های دیگر تقریب ساز نیز، برای تقریب هسته و تابع منبع، می توانند به کار روند. نتایج حاصل نشان می دهند که برای حصول جواب های دقیق به کمک MDKM، انتخاب توابع پایه برای تقریب هسته و تابع منبع نقش اساسی دارند که گاهی این مهم از فیزیک معادله بررسی شده دست یافتنی است. واضح است که روش حاضر برای حالت های دیگر معادلات فردهلم از جمله معادلات با هسته های منفرد و نیز دستگاه معادلات فردهلم چند بعدی قابل توسعه است. در پایان خاطر نشان می شود که الگوریتم های ارائه شده در این پژوهش در محیط نرم افزار متمتیکا در قالب یک برنامه پیاده سازی و اجرا شده است.

### منابع

1. Molabrahmi A., "An algorithm based on the regularization and integral mean value methods for the Fredholm integral equation of the first kind", Appl. Math. Modelling, 37 (2013) 9634-9642.

2. Assari P., Adibi H., Dehghan M., "A meshless method for solving nonlinear two dimensional integral equations of the second kind on non-rectangular domains using radial basis functions with error analysis", *J. Comput. Appl. Math.*, 239 (2013) 72-92.
3. Atkinson K., Han W., "Theoretical Numerical Analysis (A Functional Analysis Framework)", Springer-Verlag, New York, Third Edition (2009).
4. Nemati S., Lima P.M., Ordokhani Y., "Numerical solution of a class of two-dimensional nonlinear Volterra integral equations using Legendre polynomials", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 242 (2013) 53-69.
5. Rahimkhani Parisa, Ordokhani Yadollah, Babolian Esmail, "Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholm-Volterra integro-differential equations", *Applied Numerical Mathematics*, 122 (2017) 66-81.
6. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations", *Numer. Algor.*, 74 (2017) 223-245.
7. Molabahrani Ahmad, "A modified degenerate kernel method for the system of Fredholm integral equations of the second kind", *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, (2017) In press.
8. Molabahrani Ahmad, "Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions: Degenerate and non-degenerate kernels", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 282 (2015) 34-43.
9. Atkinson K., "The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind", Cambridge University Press, UK, 1997.
10. Kanwal R. P., "Linear Integral Equations, Theory and Technique", Academic Press, New York, 1971.
11. Molabahrani Ahmad., "The relationship of degenerate kernel and projection methods on Fredholm integral equations of the second kind", *Commun. Numer. Anal.* 1 (2017) 34-39.
12. Alipanah Amjad., Esmaili Shahrokh., "Numerical solution of the two-dimensional Fredholm integral equations using Gaussian radial basis function", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (2011) 5342-5347.
13. Heydari M., Avazzadeh Z., Navabpour H., Loghmani G. B., "Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using integral mean value theorem II. High dimensional problems", *Appl. Math. Modelling*, 37 (2013) 432-442.
14. Han G. Q., Wang R., "Richardson extrapolation of iterated discrete Galerkin solution for two-dimensional Fredholm integral equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 139 (2002) 49-63