فشرده‌سازی برای قاب‌های کاملاً منظم بر اساس قسمت متمم‌صفرشان

مصطفی عابدی*؛ مجتمع آموزش عالی فنی مهندسی اسفراین، گروه ریاضی
علی اکبر استاجی؛ دانشگاه حکیم سبزواری، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۱/۰۷ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

فرض کنیم L قاب باشد. مجموعهٔ همهٔ ایده‌آل‌های منظم از قسمت متمم‌صفر L؛ یعنی $cozL$، را با $rId\left(cozL\right)$ نشان می‌دهیم. در این مقاله به بررسی این ایده‌آل‌ها می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که $rId\left(cozL\right)$ قابی کاملاً منظم و فشرده است و نگاشت $j_c : rId\left(cozL\right) \to L$ با ضابطهٔ $j_c(I) = \bigvee I$ فشرده‌سازی برای L است که با فشرده‌سازی استون- چک؛ یعنی βL، یکریخت است. هم‌چنین نشان داده شده است که j_c دارای الحاقی راست $r_c : L \to rId\left(cozL\right)$ با ضابطهٔ $r_c(a) = \left\{x \in cozL : x \prec\prec a\right\}$ است. علاوه بر این، عناصر اول و فشرده قاب $rId\left(cozL\right)$ را مشخص کرده و ارتباط بین ایده‌آل‌های منظم $cozL$ و P-قاب‌ها را بررسی می‌کنیم. افزون بر این‌ها نشان داده شده است که قاب L، P-قاب است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل $cozL$ منظم باشد.

واژه‌های کلیدی: فشرده‌سازی، قاب کاملاً منظم ، ایده‌آل منظم، قسمت متمم‌صفر قاب، فشرده‌سازی استون- چک.

رده‌بندی ریاضی(۲۰۱۰): ۰۶D۲۲، ۰۳F۵۵، ۱۸D۲۵، ۵۴D۳۰.

مقدمه

فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته (توابع پیوسته کراندار) از X به مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را با $C(X)$ ($C^*(X)$) نشان می‌دهیم. از آن‌جاکه فضاهای هاسدروف فشرده دارای خواص جالب و مهمی هستند و برخی از این خواص به زیرفضاهای آن‌ها، بخصوص زیرفضاهای چگال، منتقل می‌شوند، یکی از زمینه‌های پژوهش در مبحث توپولوژی این است که برای فضای توپولوژی X، فضای توپولوژی فشرده‌ای مانند T را چنان پیدا کنیم که $cl_T X = T$. در چنین شرایطی T را فشرده شده X می‌گوییم و این عمل را فشرده‌سازی X می‌نامیم. به راه‌های مختلفی می‌توان X را فشرده‌سازی کرد. در میان فشرده شده‌های مختلف X بیش از همه فشرده شده‌ای مانند T مدنظر است که علاوه بر این که X در آن چگال باشد، هر تابع $C^*(X)$ به تابعی در $C(T)$ قابل گسترش باشد؛ یعنی، X یک C^*-نشانده در T باشد. توجه شود که برای هر فضای کاملاً منظم X، فضای فشرده βX وجود دارد که X در βX چگال است و هم‌چنین X یک C^*-نشانده در βX است.

مفهوم قاب یا توپولوژی بدون نقطه به تعبیری تعمیم یافته مفهوم توپولوژی معمولی (توپولوژی با نقطه) است. به بیان ساده موضوع توپولوژی بدون نقطه مطالعه توپولوژی از آن دیدگاه است که مجموعه‌های باز فضای توپولوژی X به جای اعضای مشبکه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. جانستون از نخستین افرادی بود که رابطهٔ بین فضای توپولوژی و

*نویسنده مسئول: abedi@esfarayen.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

مشبکه‌ها را یافت و نشان داد که توپولوژی نه تنها دارای محتوای هندسی است بلکه محتوای جبری (مشبکه‌ای) نیز دارد. تلاش‌های ایشان منجر به این شد که در سال ۱۹۸۲ کتاب بی‌نظیر فضاهای استون را منتشر کرد [۱].

در سال ۱۹۹۰ بناشفسکی نشان داد که ایده‌آل‌های کاملاً منظم از قاب، تشکیل قابی کاملاً منظم فشرده می‌دهند. برای قاب L، ایده‌آل‌های کاملاً منظم را با βL نشان دادند و اثبات کرد در حالتی که قاب L کاملاً منظم است، βL فشرده‌سازی برای L است[۲]. توجه کنید که βL به‌عنوان نسخه توپولوژی بدون نقطهٔ βX شناخته شده است. وی هم‌چنین پژوهش‌های دیگر را در مورد فشرده‌سازی قاب‌ها انجام داده است (برای جزئیات بیش‌تر مراجع [۲-۵] را ببینید.)

در سال ۱۹۹۶ بناشفسکی حلقهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی قاب L، یعنی حلقهٔ $\mathcal{R}L$، را به‌عنوان نسخه توپولوژی بدون نقطهٔ حلقه $C(X)$ معرفی کرد و نشان داد که $\mathcal{R}L$، f-حلقه است. هم‌چنین عنصرهای متمم‌صفر را نیز به‌عنوان نسخه توپولوژی بدون نقطهٔ مجموعه‌های متمم‌صفر تعریف کرد و اثبات کرد که قسمت متمم‌صفر قاب، σ-قاب منظم است[۶]. نسخه توپولوژی بدون نقطهٔ مجموعه‌های صفر در[۷] معرفی شده است.

چون برای هر قاب L، $cozL$ یک σ-قاب منظم است و مفاهیم "به‌خوبی زیر" و "کاملاً زیر" در $cozL$ با هم معادل هستند، در این مقاله به‌دنبال آن هستیم که فشرده‌سازی برای قاب‌های کاملاً منظم با استفاده از قسمت متمم صفرشان بسازیم. برای این منظور، ایده‌آل‌های منظم $cozL$؛ یعنی $rId\left(cozL\right)$، را برای قاب L بررسی می‌کنیم. در گزارهٔ ۲ و نتیجهٔ ۲ نشان می‌دهیم که $rId\left(cozL\right)$ قابی فشرده است و در گزارهٔ ۳ اثبات شده است که برای نگاشت قابی بین قاب‌های می‌توانیم نگاشت قابی بین ایده‌آل‌های منظم از قسمت متمم صفرشان ایجاد کنیم. عناصر اول و عناصر فشرده قاب $rId\left(cozL\right)$ را به‌ترتیب در گزاره ۴ و قضیه ۲ مشخص و دسته‌بندی می‌کنیم.

مفهوم σ-فشرده را برای مشبکه معرفی می‌کنیم. در قضیه ۳، دو گزاره معادل برای مفهوم σ-فشرده در قاب را ارائه می‌کنیم. برای قاب σ-فشرده، نشان می‌دهیم که نگاشت $\downarrow_{\prec_c}: cozL \to rId\left(cozL\right)$ با ضابطهٔ $a \mapsto \downarrow_{\prec_c}(a)$ نگاشت σ-قابی است (قضیه ۴).

نگاشت $r_c: L \to rId\left(cozL\right)$ با ضابطهٔ $r_c(a)=\left\{x \in cozL : x \prec\prec a\right\}$ در بخش پایانی معرفی شده است و ویژگی‌های این نگاشت را در لم ۴ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که r_c الحاقی راست برای j_c است. علاوه بر این در قضیهٔ ۵ اثبات می‌کنیم که $rId\left(cozL\right)$ قاب کاملاً منظم فشرده است و j_c فشرده‌سازی برای قاب کاملاً منظم L است. از این‌جا به بعد $rId\left(cozL\right)$ را با $\beta_c L$ نشان می‌دهیم و آن را فشرده‌سازی استون -چک بر حسب عناصر متمم‌صفر می‌نامیم. سپس نتایجی که از قضیه ۵ حاصل می‌شوند را بیان می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال در نتیجه ۷ نشان داده شده است که برای قاب کاملاً منظم L، $j_c: \beta_c L \to L$ یکریختی قابی است اگر و تنها اگر قاب L فشرده باشد. سرانجام در آخرین قضیه نشان می‌دهیم که قاب‌های $\beta_c L$ و βL در حالتی که L کاملاً منظم باشد، یکریخت هستند.

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این بخش بعضی از مفاهیم پایه‌ای را در مورد قاب‌ها و فضاهای توپولوی بیان می‌کنیم. برای اطلاعات بیش‌تر در مورد قاب‌ها و فضاهای توپولوژی به‌ترتیب به منابع [۸] و [۹] مراجعه شود. هم‌چنین برای مفاهیم رسته‌ای مورد نیاز در این مقاله، به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

مجموعهٔ مرتب جزئی $(A, \le)$ را مشبکه می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in A$، $x \wedge y$ و $x \vee y$ وجود داشته باشند و آن‌ها را به‌ترتیب رسند و وست x و y می‌نامیم. مشبکه‌ای که دارای بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عنصر است را مشبکهٔ کراندار می‌گوییم. مشبکهٔ A را توزیع‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in A$، $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. در سرتاسر این نوشتار، A نشان‌دهندهٔ مشبکهٔ توزیع‌پذیر و کراندار است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عنصر مشبکهٔ A را به‌ترتیب با نمادهای $\top_A$ و $\bot_A$ نشان می‌دهیم و در صورتی که ابهامی وجود نداشته باشد از نوشتن A در اندیس صرف‌نظر می‌کنیم. رسند و وست دلخواه زیرمجموعه S از مشبکهٔ A را با نمادهای $\bigwedge S$ و $\bigvee S$ نشان می‌دهیم. مشبکهٔ A را کامل می‌گوییم هرگاه برای هر $S \subseteq A$، $\bigvee S$ وجود داشته باشد. $a \in A$ را می‌گوییم.

۱. **اول** (نقطه) است، اگر $a \ne \top$ و از $x \wedge y \le a$ نتیجه شود که $x \le a$ یا $y \le a$؛
۲. **شبه متمم‌دار** است، اگر مجموعهٔ $\{x \in A : x \wedge a = \bot\}$ دارای بزرگ‌ترین عضو باشد و آن را با نماد a^* نشان می‌دهیم؛
۳. **چگال** است، هرگاه $a^* = \bot$.

زیرمجموعهٔ ناتهی I از A را **ایده‌آل** A می‌گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in L$، $a \in I,\ b \in I \Leftrightarrow a \vee b \in I$. برای $a \in A$، مجموعهٔ $\downarrow a = \{x \in A : x \le a\}$ ایده‌آل A است. ایده‌آل I از A را اول می‌گوییم، هرگاه $I \ne A$ و برای هر $x, y \in L$، $x \wedge y \in I$ ایجاب کند که $x \in I$ یا $y \in I$. بنا به توزیع‌پذیری می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای هر ایده‌آل I در A، $I^* = \{x \in A : x \wedge a = \bot,\ \forall a \in I\}$.

قاب (به‌ترتیب σ**-قاب**) مشبکه کراندار کامل (به‌ترتیب شمارای کامل) L با بزرگ‌ترین عنصر $\top$ و کوچک‌ترین عنصر $\bot$ است که برای هر زیر مجموعهٔ دلخواه S از L (به‌ترتیب زیرمجموعه شمارای S از L) و به‌ازای هر $a \in L$ در شرط توزیع‌پذیری $a \wedge \bigvee S = \bigvee_{s \in S} (a \wedge s)$ صدق کند. قاب مجموعه‌های باز فضای توپولوژی X را با نماد $\mathfrak{O}X$ نشان می‌دهیم. توجه شود که اگر L قاب باشد، برای هر $a \in L$، a^* وجود دارد و $a^* = \bigvee \{x \in A : x \wedge a = \bot\}$.

هم‌ریختی قابی یا **نگاشت قابی** (به‌ترتیب σ**-هم‌ریختی قابی** یا σ**-نگاشت قابی**) نگاشت بین قاب‌ها (به‌ترتیب σ-قاب‌ها) است که رسندهای متناهی، به‌ویژه بزرگ‌ترین عنصر $\top$، وست دلخواه (به‌ترتیب وست شمارا)، به‌ویژه کوچک‌ترین عنصر $\bot$، را حفظ می‌کند. قاب L را فشرده می‌گوییم هرگاه برای $S \subseteq L$ از $\top = \bigvee S$ نتیجه بگیریم زیرمجموعه متناهی F از S به قسمی وجود دارد که $\top = \bigvee F$.

می‌گوییم عنصر a از مشبکه A، **به‌خوبی زیر** عنصر b از A است، می‌نویسیم $a \prec_A b$، در حالتی که ابهامی وجود نداشته باشد می‌نویسیم $a \prec b$، در صورتی که عنصر $s \in L$ به‌قسمی وجود داشته باشد که $a \wedge s = \bot$ و $s \vee b = \top$. وقتی که L قاب باشد $a \prec_L b$ اگر و تنها اگر $a^* \vee b = \top$. از طرفی دیگر می‌گوییم a **کاملاً زیر** b است، و می‌نویسیم $a \prec\!\!\prec_A b$، در صورتی‌که دنبالهٔ $k = ۰, ۱, \ldots ۲^n$, $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ (c_{nk}) بین a و b وجود دارد به‌طوری‌که $c_{nk} \prec c_{n(k+۱)}$, $c_{nk} = c_{(n+۱)۲k}$, $c_{۰۱} = b$, $c_{۰۰} = a$. قاب L را **منظم** می‌گوییم هرگاه برای هر $a \in L$، $a = \bigvee \{x \in L : x \prec a\}$. هم‌چنین L را **کاملاً منظم** می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \in L$، $a = \bigvee \{x \in L : x \prec\!\!\prec a\}$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

از مرجع [۶] یادآوری می‌کنیم که قاب اعداد حقیقی؛ یعنی $\mathcal{L}(\mathbb{R})$، قابی است که به‌وسیلهٔ زوج‌های مرتب (p,q) از اعداد گویا به‌عنوان مولدها تولید می‌شود که در این روابط صدق می‌کنند:

$$(R۱)\text{: } (p,q)\wedge(r,s)=(p\vee r,q\wedge s) \qquad (R۲)\text{: } (p,q)\vee(r,s)=(p,s) \quad , \quad p\le r\le q\le s$$

$$(R۳)\text{: } (p,q)=\bigvee\{(r,s): p<r<s<q\} \qquad (R۴)\text{: } \top=\bigvee\{(p,q): p,q\in\mathbb{Q}\}.$$

روشن است که زوج‌های (p,q) در $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ و بازه‌های باز $\langle p,q\rangle=\{x\in\mathbb{R}: p<x<q\}$ در قاب $\mathfrak{O}\mathbb{R}$ داری نقش یک‌سانی هستند. در حقیقت یکریختی قابی $\lambda:\mathcal{L}(\mathbb{R})\to\mathfrak{O}\mathbb{R}$ به‌قسمی وجود دارد که $\lambda(p,q)=\langle p,q\rangle$. مجموعهٔ همهٔ هم‌ریختی‌های قابی از $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ به L را با نماد $\mathcal{R}L$ نشان می‌دهیم و نشان داده شده است که f-حلقه است [۶]. هم‌چنین نگاشت متمم‌صفر، نگاشت $coz: \mathcal{R}L\to L$ است که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$coz(\alpha)=\bigvee\{\alpha(p,\cdot)\vee\alpha(\cdot,q): p,q\in\mathbb{Q}\}.$$

عنصر a از قاب L را **متمم‌صفر** می‌گوییم هرگاه $\alpha\in\mathcal{R}L$ موجود باشد به‌طوری‌که $a=coz\,(\alpha)$. مجموعهٔ همهٔ عناصر متمم‌صفر L؛ یعنی $coz\,(\mathcal{R}L)$، را با نماد $cozL$ نشان می‌دهیم. ثابت شده است که قاب L کاملاً منظم است اگر و تنها اگر L به‌وسیلهٔ $cozL$ تولید شود. در [۱۱] گزارهٔ مفید زیر برای عناصر متمم‌صفر اثبات شده است.

گزارهٔ ۱: برای قاب L گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱. $a\in cozL$.

۲. $a=\bigvee x_n$ که در آن برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\prec\!\prec a$.

۳. $a=\bigvee a_n$ که در آن برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n\prec\!\prec a_{n+1}$.

با استفاده از گزارهٔ مذکور داریم:

نتیجهٔ ۱: فرض کنیم L قاب است و $a,b\in L$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. اگر $a\prec\!\prec b$، آن‌گاه $c\in cozL$ به‌قسمی وجود دارد که $a\prec\!\prec c\prec\!\prec b$.

۲. $cozL$ زیر σ- قاب منظم L است.

۳. $a\prec\!\prec b$ اگر وتنها اگر $c,d\in cozL$ به قسمی موجود باشند که $a\le c,\ d\le b$ و $c\prec_{cozL} d$.

توجه کنیم که از قسمت (۳) نتیجه قبلی این حکم به‌دست می‌آید که برای هر $a,b\in cozL$،

$$a\prec_{cozL} b \Leftrightarrow a\prec\!\prec_{cozL} b \Leftrightarrow a\prec\!\prec b.$$

هم‌چنین به‌علت استفاده زیاد از گزارهٔ ۱ و نتیجه ۱، در این مقاله آن‌ها را بدون استناد به‌کار می‌گیریم.

قاب $rId(cozL)$

فرض کنیم A مشبکهٔ توزیع‌پذیر کراندار باشد. مجموعه همهٔ ایده‌آل‌های A، یعنی $Id(A)$، قاب فشرده است که در آن ایده‌آل تولیده شده به‌وسیلهٔ $\bigcup I_\lambda$ برابر $\bigvee I_\lambda$ است و $\bigwedge I_\lambda=\bigcap I_\lambda$. ایده‌آل‌های $\{\perp\}$ و A به‌ترتیب برابرند با $\perp_{Id(A)}$ و $\top_{Id(A)}$. به‌ویژه، $\downarrow a\vee\downarrow b=\downarrow(a\vee b)$, $\downarrow a\wedge\downarrow b=\downarrow(a\wedge b)$. هم‌چنین توجه شود که توزیع‌پذیر بودن A ایجاب می‌کند که برای هر دو ایده‌آل I و J در A، $I\vee J=\{a\vee b: a\in I,\ b\in J\}$.

اکنون چون برای هر قاب L، $cozL$ مشبکهٔ توزیع‌پذیر کرندار است، پس $Id(cozL)$ قاب فشرده است. عنصر a از قاب L را منظم می‌گوییم، هرگاه $a = \bigvee_{b \prec a} b$. بنابراین $J \in Id(cozL)$ عنصر منظم است هرگاه $J = \bigcup_{I \prec J} I$. هم‌چنین فرض کنیم که A مشبکه باشد. $I \in Id(A)$ را ایده‌آل منظم می‌نامیم، اگر برای $x \in I$ وجود داشته باشد $y \in I$ به‌طوری‌که $x \prec y$. اکنون ارتباط بین عناصر منظم قاب $Id(cozL)$ و ایده‌آل‌های منظم $cozL$ را توصیف می‌کنیم. برای قاب L، ادعا می‌کنیم که عنصر J از قاب $Id(cozL)$ عنصر منظم است اگر و تنها اگر ایده‌آل منظم $cozL$ باشد. مجموعه همهٔ ایده‌آل‌های منظم قاب $Id(cozL)$ را با $rId(cozL)$ نشان می‌دهیم. در ادامه این بخش به خواص و ویژگی این ایده‌آل‌ها می‌پردازیم.

برای عنصر a از قاب L قرار می‌دهیم $\downarrow_c a = \downarrow a \bigcap cozL = \{x \in cozL \ : \ x \le a\}$. واضح است که $\downarrow_c a$ ایده‌آل در $cozL$ است.

قضیهٔ ۱: اگر L قاب باشد، آن‌گاه ایده‌آل‌های منظم $cozL$ دقیقا عناصر منظم $Id(cozL)$ هستند.

برهان: فرض کنیم که I ایده‌آلی منظم در $cozL$ است. اگر $x \in I$، آن‌گاه وجود دارد $y \in I$ به‌قسمی‌که $x \prec_{cozL} y$. از این‌رو، $c \in cozL$ به‌قسمی‌که $c \wedge x = \perp$, $c \vee y = \top$. اکنون چون $c \in \left(\downarrow_c x\right)^* = \{a \in cozL : a \wedge x = \perp\}$، پس $\top = c \vee y \in \left(\downarrow_c x\right)^* \vee I$ و درنتیجه $\left(\downarrow_c x\right)^* \vee I = cozL$ که این هم یعنی $\downarrow_c x \prec_{Id(cozL)} I$. از طرفی دیگر چون $x \in I \subseteq cozL$، پس بدیهی است که $x \in \downarrow_c x$ و در نتیجه $I \subseteq \bigcup\{J \in Id(cozL) : J \prec I\}$. روشن است که عکس شمول نیز برقرار است. بنابراین نشان دادیم که I عنصر منظم در $cozL$ است. برعکس، فرض کنیم I عنصر منظم در $Id(cozL)$ باشد و $x \in I$. چون $I = \bigcup\{J \in Id(cozL) \ : \ J \prec I\}$، پس وجود دارد $J \in Id(cozL)$ به قسمی که $J \prec_{Id(cozL)} I$ و $x \in J$. لذا $J^* \vee I = cozL$. فرض کنیم $y \in J^* = \{c \in cozL : c \wedge z = \perp \forall z \in J\}$ و $a \in I$. لذا $y \vee a = \top$ و $y \wedge x = \perp$ و در نتیجه $x \prec_{cozL} a$. بنابراین I ایده‌آلی منظم در $cozL$ است و برهان کامل است.

گزارهٔ ۲: برای هر قاب L، مجموعهٔ $rId(cozL)$ با رابطهٔ شمول، زیر قاب $Id(cozL)$ است.

برهان: برای زیرقاب بودن $rId(cozL)$، کافی است که بسته بودن تحت وست دلخواه و رسند متناهی را بررسی کنیم. اگر $I, J \in rId(cozL)$ و $a \in I \bigcap J$، آن‌گاه $x \in I$ و $y \in J$ وجود دارند که $a \prec_{cozL} x$ و $a \prec_{cozL} y$ و در نتیجه $a \prec_{cozL} x \wedge y$. از این‌رو، $I \wedge J = I \bigcap J \in rId(cozL)$. اکنون فرض کنیم $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq rId(cozL)$. ادعا می‌کنیم که ایده‌آل تولید شده به‌وسیلهٔ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ در $cozL$ برابر است با $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$. برای اثبات ادعا، فرض کنیم $a \in \langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \rangle$ در این‌صورت $a_{\lambda_1} \in I_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_n} \in I_{\lambda_n}$ وجود دارند که $a \le \bigvee_{i=1}^{n} a_{\lambda_i}$. ازاین‌رو برای هر $1 \le i \le n$ وجود دارد x_{λ_i} به‌طوری‌که $a_{\lambda_i} \prec_{cozL} x_{\lambda_i}$ و در نتیجه $a \prec_{cozL} \bigvee x_{\lambda_i}$. ازاین‌رو $rId(cozL)$ قاب است.

چون $Id(cozL)$ قاب فشرده است و هر زیرقاب از قاب فشرده به‌طور بدیهی فشرده است، پس داریم:

نتیجهٔ ۲: فرض کنیم L قاب باشد. در این صورت $rId(cozL)$ قاب فشرده است.

توجه شود که اگر $f : L \to M$ هم‌ریختی قابی (مشبکه‌ای) باشد، آن‌گاه به آسانی می‌توان نشان داد که نگاشت $Idf : Id(L) \to Id(M)$ با ضابطهٔ $Idf(I) = \langle f(I) \rangle$ هم‌ریختی قابی (مشبکه‌ای) است. اکنون بررسی می‌کنیم

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

که از هم‌ریختی قابی بین قاب‌های می‌توانیم هم‌ریختی قابی بین ایده‌آل‌های منظم از قسمت متمم‌صفرشان به دست آوریم. برای این منظور ابتدا، لم ۱ را ثابت می‌کنیم.

لم ۱: فرض کنیم $f: L \to M$ نگاشت قابی باشد. اگر $a \in cozL$، آن‌گاه $f(a) \in cozM$.

برهان: چون $a \in cozL$، پس $\alpha \in \mathcal{R}L$ به قسمی وجود دارد که $a = coz\alpha$. لذا داریم:

$$f(a) = f(coz\alpha) = f\left(\alpha\left((-,0) \vee (0,-)\right)\right) = f\alpha\left((-,0) \vee (0,-)\right).$$

قرار می‌دهیم $\beta = f\alpha$. ازاین‌رو $\beta \in \mathcal{R}M$ و $f(a) = coz\beta$ و برهان کامل است.

گزارهٔ ۳: فرض کنیم L و M دو قاب هستند و $f: L \to M$ هم‌ریختی قابی باشد. در این صورت نگاشت $rIdf : rId(cozL) \to rId(cozM)$ با ضابطه‌ی $rIdf(I) = \langle f(I) \rangle$؛ یعنی ایده‌آل منظم تولیده شده توسط $f(I)$، هم‌ریختی قابی است.

برهان: چون $f: L \to M$ هم‌ریختی مشبکه‌ای است، پس f به‌عنوان نگاشتی از $cozL$ به $cozM$ هم‌ریختی است. در نتیجه بنابر لم ۱، *(rIdf : rId(cozL)--->rId(cozM))* هم‌ریختی قابی است. پس تنها کافی است که نشان دهیم برای هر ایده‌آل منظم I در $cozL$، $\downarrow f(I)$ ایده‌آل منظم در $cozM$ است، که این هم بدیهی است.

اگر A مشبکه باشد و $I \in Id(A)$، آن‌گاه I ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر I به‌عنوان عنصر در مشبکه $I \in Id(A)$ اول باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم L قاب است. مجموعهٔ همهٔ عنصرهای اول L را با نماد $Pt(L)$ نشان می‌دهیم.

اکنون به‌طور بدیهی گزاره بعدی را می‌توانیم نتیجه بگیریم.

گزارهٔ ۴: اگر L قاب باشد، آن‌گاه عناصر اول $rId(cozL)$ دقیقا ایده‌آل‌های اول منظم در $cozL$ هستند. از این‌رو،

$$Pt(rId(cozL)) = \{I \in cozL : \text{ایده‌آل اول منظم در } cozL \text{ است } I\}.$$

عنصر a از قاب L را فشرده می‌گوییم، هرگاه برای $S \subseteq L$ از $a = \bigvee S$ بتوانیم نتیجه بگیریم که زیرمجموعه متناهی F از S به قسمی وجود دارد که $a = \bigvee F$.

گزارهٔ ۵: اگر L قاب باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل $I \in rId(cozL)$ در $Id(cozL)$ فشرده است اگر و تنها اگر $a \in cozL$ موجود باشد که a در $cozL$ متمم‌دار است و $I = \downarrow_c a$.

برهان: فرض کنیم $I \in rId(cozL)$ عنصر فشرده در $Id(cozL)$ است. چون برای هر $a \in I$، عنصر b از I به‌قسمی وجود دارد که $a \prec b$، ازاین‌رو $a \in \downarrow_c b$ و درنتیجه $I = \bigvee_{x \in I} \downarrow_c x$. بنابراین عدد طبیعی n وجود دارد به‌قسمی که $I = \downarrow_c a_1 \vee \ldots \vee \downarrow_c a_n = \downarrow_c (a_1 \vee \ldots \vee a_n)$، که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in I$. قرار می‌دهیم $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ و درنتیجه $a \in cozL$ و هم‌چنین $I = \downarrow_c a$. اکنون چون $a \in I$، پس $y \in I = \downarrow_c a$ به‌طوری که $a \prec_{cozL} y$. بنابراین $a \prec_{cozL} a$ و این هم یعنی a در $cozL$ متمم‌دار است. برعکس، واضح است.

برای $a \in cozL$ قرار می‌دهیم $\downarrow_{\prec_c} a = \{x \in cozL : x \prec_{cozL} a\}$. به آسانی می‌توانیم بررسی کنیم که $\downarrow_{\prec_c} a$ ایده‌آلی در $cozL$ است. اکنون بررسی می‌کنیم که در چه حالتی، $\downarrow_{\prec_c} a$ ایده‌آل منظم است.

گزارهٔ ۶: اگر L قاب باشد، آن‌گاه برای هر $a \in cozL$، $\downarrow_{\prec_c} a \in rId(cozL)$.

برهان: فرض می‌کنیم $x \in \downarrow_{\prec_c} a$، در این صورت $x \prec_{cozL} a$ و در نتیجه $x \prec\prec_L a$. پس $y \in cozL$ به‌طوری وجود دارد که $x \prec\prec_L y \prec\prec_L a$. بنابراین $y \in \downarrow_{\prec_c} a$، $x \prec_{cozL} y$ و برهان کامل است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

از گزارهٔ قبلی و گزاره ۵، به‌راحتی می‌توانیم قضیهٔ ۲ را به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۲: اگر L قاب باشد، آن‌گاه عنصر $I \in rId(cozL)$ در $Id(cozL)$ فشرده است اگر و تنها اگر $a \in cozL$ موجود باشد که a در $cozL$ متمم‌دار است و $I = \downarrow_{\prec_c} a$.

حلقه‌های منظم در جبر نقش مهمی را ایفا می‌کنند و هر ایده‌آل اول در حلقهٔ منظم ماکسیمال است. فضای کاملاً منظم X را P-فضا گوییم، هرگاه هر ایده‌آل اول در $C(X)$، ایده‌آل ماکسیمال باشد. تا الان شرط‌های معادل زیادی برای P-فضاها داده شده است؛ به‌عنوان مثال در هر P-فضا، برای هر $f \in C(X)$، $coz(f)$ یک C-نشانده در X است (برای جزئیات بیش‌تر در مورد P-فضاها، مراجع [۱۳،۱۲،۹] را ببینید).

قاب L را P-قاب می‌گوییم، هرگاه هر عضو $cozL$ در L متمم‌دار باشد. دّبه در سال ۲۰۰۹ نسخه توپولوژی بدون نقطه از P-فضاها، یعنی P-قاب‌ها، را بررسی و شرط‌های معادل با آن‌ها را مشابه با P-فضاها تعیین کرد. به عنوان مثال؛ قاب کاملاً منظم L، P-قاب است اگر و تنها اگر حلقهٔ $\mathcal{R}L$منظم باشد[۱۴]. در اینجا به‌دنبال این هستیم که ارتباط بین P-قاب‌ها و ایده‌آل‌های منظم از قسمت متمم‌صفرشان را تعیین کنیم.

گزارهٔ ۷: فرض کنیم Lقاب باشد. در این صورت هر عنصر $cozL$ دارای متمم در خودش است اگر و تنها اگر $Id(cozL) = rId(cozL)$.

برهان: هر $a \in cozL$ در $cozL$ دارای متمم است اگر و تنها اگر $a \prec_{cozL} a$. این هم به‌وضوح معادل با این است که برای هر $a \in cozL$، $\downarrow_c a$ ایدآل منظم است، که این هم یعنی، $Id(cozL) = rId(cozL)$ و برهان کامل است.
توجه شود که اگر L، P- قاب باشد، آن‌گاه برای هر $a \in cozL$، $a \vee a^* = \top$. از طرفی چون $a \wedge a^* = \bot$، پس $a' = a^*$. بنابراین داریم:

نتیجهٔ ۳: فرض کنیم L قاب باشد. در این‌صورت L، P-قاب است اگر و تنها اگر $Id(cozL) = rId(cozL)$.

چون برای هر فضای کاملاً منظم X، $C(X) \cong \mathcal{R}(\mathfrak{O}X)$. بنابراین نتیجه زیر بدیهی است.

نتیجهٔ ۴: هر فضای کاملاً منظم X، P- فضا است اگر و تنها اگر $Id(coz(\mathfrak{O}X)) = rId(coz(\mathfrak{O}X))$.

از [۱۰] یا مشابه با اثبات قضیه ۴ که در ادامه می‌آید به‌آسانی می‌توانیم نتیجه بگیریم هنگامی که L قاب منظم فشرده است در این‌صورت نگاشت $\downarrow_{\prec} : L \to rId(L)$ با ضابطهٔ $a \mapsto \downarrow_{\prec} a = \{x \in L : x \prec_L a\}$ نگاشت قابی است. در این‌جا به دنبال این موضوع هستیم که نگاشت σ-قابی بین $cozL$ و $rId(cozL)$ بسازیم. برای این منظور ابتدا مفهوم σ-فشرده را برای مشبکه‌ها تعریف می‌کنیم.

عنصر a از مشبکه توزیع‌پذیر A را σ-فشرده می‌گوییم، هرگاه برای هر زیر مجموعه شمارای S در L از $a = \bigvee S$ نتیجه بگیریم زیرمجموعه متناهی F از S وجود دارد که $a = \bigvee F$. مشبکه توزیع‌پذیر A را σ-فشرده گوییم هرگاه بزرگ‌ترین عنصرش، یعنی $\top$، σ-فشرده باشد. برای قاب‌ها این مفهوم دارای شرط‌های معادل دیگری است که استفاده از آن‌ها سبب راحت‌تر بیان کردن برهان‌ها می‌شود. در قضیهٔ ۳ به بیان این شرط‌ها می‌پردازیم.

قضیهٔ ۳: فرض کنیم L قاب است. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱. L، σ-فشرده است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

۲. برای هر زیرمجموعهٔ جهت‌دار شمارای D از L، اگر $\top=\bigvee D$، آن‌گاه $\top\in D$.

۳. برای هر ایده‌آل به‌طور شمارا تولیده شدهٔ I از L، اگر $\top=\bigvee I$، آن‌گاه $I=L$.

برهان: (۱)$\Leftarrow$(۲). فرض کنیم $D\subseteq L$ مجموعهٔ جهت‌دار شمارا باشد و $\top=\bigvee D$. در این صورت $\top=\bigvee D=\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n$ که در این‌جا $D=\{x_1,x_2,...\}$. چون L، σ-فشرده است، پس مجموعه متناهی $F\subseteq D$ به قسمی وجود دارد که $\top=\bigvee F$. حال با توجه به این‌که D جهت‌دار است، هر زیرمجموعهٔ متناهی آن دارای کران بالا در D است و از این‌رو F کران بالا مانند $d\in D$ دارد. بنابراین $\top=d\in D$.

(۲)$\Leftarrow$(۳). بدیهی است.

(۳)$\Leftarrow$(۱). فرض کنیم برای زیرمجموعهٔ شمارای S در L، $\top=\bigvee S$. در این صورت $\langle S\rangle$ ایده‌آل به‌طور شمارا تولیده شده است. چون $\bigvee S=\bigvee\langle S\rangle$، پس با توجه به (۳)، $\langle S\rangle=L$ و درنتیجه $\top\in\langle S\rangle$. لذا $s_1,s_2,...,s_n\in S$ وجود دارند به‌طوری‌که $\top\leq s_1\vee s_2\vee...\vee s_n$. از این‌رو $\top=\bigvee F$ که در این‌جا $F=\{s_1,s_2,...,s_n\}$. بنابراین برهان کامل است.

لم ۲: فرض کنیم L قاب σ-فشرده باشد و $x,a,b\in cozL$. در این‌صورت اگر $x\prec_{cozL} a\vee b$، آن‌گاه $c\in cozL$ وجود دارد به‌طوری‌که $x\prec_{cozL} a\vee c$ و $c\prec_{cozL} b$.

برهان: چون $x\prec_{cozL} a\vee b$، پس $y\in cozL$ وجود دارد به‌طوری‌که $y\vee(a\vee b)=\top$ و $x\wedge y=\bot$. اکنون بنا به گزارهٔ ۱ و نتیجه ۱ داریم $b=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\{b_n : b_n \prec\prec_L b,\ b_n\in cozL\}$. از این‌رو داریم:

$$\begin{aligned}\top&=y\vee(a\vee b)\\&=(y\vee a)\vee b\\&=(y\vee a)\bigvee_{n\in\mathbb{N}} b_n\\&=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(y\vee a)\vee b_n\end{aligned}$$

اما L قاب σ-فشرده است، از این‌رو، $b_{i_1},...,b_{i_k}$ به قسمی که برای هر $1\leq j\leq k$، $b_{i_j}\prec\prec_L b$ بنابراین

$$\begin{aligned}\top&=(y\vee a\vee b_{i_1})\vee...\vee(y\vee a\vee b_{i_k})\\&=y\vee a\vee(b_{i_1}\vee...\vee b_{i_k})\end{aligned}$$

اکنون قرار می‌دهیم $c=b_{i_1}\vee...\vee b_{i_k}\in cozL$ و در نتیجه $y\vee(a\vee c)=\top$. از این‌رو $x\prec_{cozL} a\vee c$ از طرفی دیگر واضح است که $c\prec\prec_L b$ و در پی آن $c\prec_{cozL} b$. بنابراین برهان کامل است.

لم ۳: نگاشت $f:L\to M$ بین σ-قاب‌ها، نگاشت σ-قابی است اگر و تنها اگر f هم‌ریختی مشبکه‌ای باشد که وست‌های زیرمجموعه‌های جهت‌دار شمارا (ایده‌آل‌ها به‌طور شمار تولید شده) را حفظ می‌کند.

برهان: فقط قسمت غیربدیهی را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $S=\{s_1,s_2,...\}$ زیرمجموعه شمارای L باشد. برای هر $n\in\mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $a_n=\bigvee_{i=1}^n s_i$. بنابراین $D=\{a_1,a_2,...\}$ زیرمجموعه جهت‌دار شمارای L است و $\bigvee D=\bigvee S$. چون D زیرمجموعهٔ جهت‌دار شمارا در L است، پس، بنا بر فرض، $f\left(\bigvee D\right)=\bigvee f\left(D\right)$. اما $\bigvee D=\bigvee S$ و هم‌چنین $\bigvee f\left(D\right)=\bigvee f\left(S\right)$. بنابراین $f\left(\bigvee S\right)=\bigvee f\left(S\right)$ و برهان کامل است.

قضیهٔ ۴: فرض کنیم L قاب σ-فشرده باشد. در این‌صورت نگاشت $\downarrow_{\prec_c}: cozL\to rId(cozL)$ با ضابطهٔ $a\mapsto\downarrow_{\prec_c} a$ نگاشت σ-قابی است.

برهان: بنا بر گزارهٔ ۶، نگاشت $\downarrow_{\prec_c}$ به وضوح خوش‌تعریف است. فرض کنیم $a,b \in cozL$. در این صورت

$$\begin{aligned}(\downarrow_{\prec_c} a)\wedge(\downarrow_{\prec_c} b) &= (\downarrow_{\prec} a \bigcap cozL)\wedge(\downarrow_{\prec} b\bigcap cozL)\\ &= (\downarrow_{\prec} a \wedge \downarrow_{\prec} b)\bigcap cozL \qquad (\wedge=\bigcap)\\ &= (\downarrow_{\prec}(a\wedge b))\bigcap cozL\\ &= \downarrow_{\prec_c}(a\wedge b)\end{aligned}$$

از این‌رو، $\downarrow_{\prec_c}$ رسندهای دوتایی را حفظ می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم $\downarrow_{\prec_c}$ وست‌های دوتایی را حفظ می‌کند. فرض کنیم $a,b \in cozL$ و $x \in (\downarrow_{\prec_c} a)\vee(\downarrow_{\prec_c} b)$، از این‌رو $x=y\vee z$ که در آن $y \prec_{cozL} a$ و $z \prec_{cozL} b$. در نتیجه $x=y\vee z \prec_{cozL} a\vee b$، پس $x \in \downarrow_{\prec_c}(a\vee b)$. برعکس، فرض کنیم $x \in \downarrow_{\prec_c}(a\vee b)$. در این صورت $x \prec_{cozL} a\vee b$. لذا بنا به لم ۲، $c \in cozL$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \prec_{cozL} a\vee c$ و $c \prec_{cozL} b$ و در نتیجه $d \in cozL$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \prec_{cozL} d\vee c$ و $d \prec_{cozL} a$. از این‌رو $x \le d\vee c$ که در این‌جا $d \in \downarrow_{\prec_c} a$ و $c \in \downarrow_{\prec_c} b$. بنابراین $x \in (\downarrow_{\prec_c} a)\vee(\downarrow_{\prec_c} b)$. توجه شود که به‌وضوح نگاشت $\downarrow_{\prec_c}$ عناصر $\perp$ و $\top$ را حفظ می‌کند. بنابراین برای این‌که برهان کامل شود، با توجه به لم قبل، کافی است، نشان دهیم که نگاشت $\downarrow_{\prec_c}$ وست‌های زیرمجموعه‌های جهت‌دار شمارا را حفظ می‌کند. فرض کنیم $D \subseteq cozL$ مجموعه جهت‌دار شمارا باشد. در این صورت واضح است که $\{\downarrow_{\prec_c} a : a\in D\}$ زیرمجموعهٔ جهت‌دار $rId(cozL)$ است. از این‌رو، $\bigvee_{a\in D}\downarrow_{\prec_c} a=\bigcup_{a\in D}\downarrow_{\prec_c} a$. از این‌رو کافی است، اثبات کنیم $\downarrow_{\prec_c}\left(\bigvee D\right)=\bigcup_{a\in D}\downarrow_{\prec_c} a$. چون برای هر $a\in D$، $a\le\bigvee D$، پس $\downarrow_{\prec_c} a\subseteq\downarrow_{\prec_c}\left(\bigvee D\right)$ و درنتیجه $\bigcup_{a\in D}\downarrow_{\prec_c} a\subseteq\downarrow_{\prec_c}\left(\bigvee D\right)$.

برعکس، فرض کنیم $x \in\downarrow_{\prec_c}\left(\bigvee D\right)$، پس $x\prec_{cozL}\bigvee D$. لذا $y\in cozL$ وجود دارد به‌طوری‌که $x\wedge y=\perp$ و هم‌چنین $\top=y\vee\bigvee D=\bigvee_{a\in D} y\vee a$. اما با توجه به σ-فشرده بودن L، وجود دارند $a_1,\ldots,a_n\in D$ به طوری‌که $\top=y\vee(a_1\vee\ldots\vee a_n)$. چون D مجموعه جهت‌دار است، پس $d\in D$ وجود دارد که $a_1\vee\ldots\vee a_n\le d$ و در نتیجه $\top=y\vee d$ از این‌رو $x\prec d$ که در آن $d\in D$. بنابراین $x\in\bigcup_{a\in D}\downarrow_{\prec_c} a$ و برهان کامل است

نگاشت وست j_c

نگاشت قابی $f: M\to L$ را چگال می‌گوییم، هرگاه $f(x)=\perp$ ایجاب کند که $x=\perp$. فشرده‌سازی از قاب L نگاشت قابی برو و چگالی مانند $h:M\to L$ است که در آن M قاب منظم فشرده است. هر قاب که داری فشرده‌سازی باشد را فشرده‌پذیر می‌گوییم. توجه شود که قاب‌های کاملاً منظم، فشرده‌پذیر هستند (برای جزئیات بیش‌تر؛ مراجع [۲] و [۳] را ببینید).

ایده‌آل J از قاب L را کاملاً منظم می‌نامیم، اگر برای هر $x\in J$ وجود داشته باشد $y\in J$ به قسمی که $x\prec\prec y$. در صورتی که قاب L کاملاً منظم باشد، مجموعهٔ ایده‌آل‌های کاملاً منظم L، یعنی $crId(L)$، قاب کاملاً منظم فشرده است این قاب را با βL نشان می‌دهیم. توجه کنید که نگاشت $j_L:\beta L\to L$ با ضابطهٔ $j_L(I)=\bigvee I$ فشرده‌سازی برای L است که به فشرده‌سازی استون- چک، معروف است و j_L دارای الحاقی راست $r_L: L\to\beta L$ با ضابطهٔ $r_L(a)=\{x\in L : x\prec\prec a\}$ است (برای جزئیات بیش‌تر؛ مراجع [۲] و [۳] را ببینید). در این‌جا

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

فشرده‌سازی برای قاب‌های کاملاً منظم با استفاده از ایده‌آل‌های منظم قسمت متمم‌صفرشان می‌سازیم و نشان می‌دهیم که این فشرده‌سازی با βL یکریخت است.

لم ۴: فرض کنیم L قاب کاملاً منظم باشد. در این صورت انتقال

$$a \mapsto \{x \in cozL : x \prec\prec_L a\}$$

نگاشت $r_c : L \to rId(cozL)$ را تعریف می‌کند به طوری که برای هر $a \in L$ و $I \in rId(cozL)$ داریم:

۱. $r_c(a)$ ایده‌آل منظم در $cozL$ است.

۲. برای هر $x, y \in L$، $x \prec\prec y$ اگر و تنها اگر $r_c(x) \prec_{rId(cozL)} r_c(y)$.

۳. $r_c(a) = \bigvee\{r_c(x) : x \in cozL \ , \ x \prec\prec a\}$ و $\bigvee r_c(a) = a$.

۴. $r_c(a) = \bigvee\{I : I \in rId(cozL) \ , \ I \prec r_c(a)\}$.

۵. نگاشت $j_c : rId(cozL) \to L$ با ضابطه‌ی $j_c(I) = \bigvee I$ دارای الحاقی راست r_c است.

۶. $r_c(a^*) = (r_c(a))^*$.

۷. $I^* = r_c((\bigvee I)^*)$.

برهان: (۱) بدیهی است که $r_c(a)$ ایده‌آل در $cozL$ است. از این‌رو فقط منظم بودن $r_c(a)$ را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنیم $x \in r_c(a)$. لذا $x \prec\prec a$ و در نتیجه $b \in cozL$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \prec\prec b \prec\prec a$، پس $b \in r_c(a)$. چون $x \prec\prec b$، پس $t \in cozL$ وجود دارد که $x \prec\prec t \prec\prec b$ و از این‌رو $t^* \prec\prec x^*$. لذا $z \in cozL$ وجود دارد به قسمی که $t^* \prec\prec z \prec\prec x^*$. از این روابط نتیجه می‌شود که $x \wedge z = \bot$ و $b \vee z = \top$. بنابراین $x \prec_{cozL} b$.

(۲) فرض کنیم $x \prec\prec y$. در این صورت $u, v \in cozL$ وجود دارند به‌طوری‌که $x \prec\prec u \prec\prec v \prec\prec y$. چون $x \prec\prec u$، پس $u^* \prec\prec x^*$ و در نتیجه $u_1 \in cozL$ وجود دارد که $u^* \prec\prec u_1 \prec\prec x^*$، لذا $u_1 \in r_c(x^*) \bigcap cozL$. هم‌چنین، چون $u \prec\prec v$، پس $\top = u^* \vee v \le u_1 \vee v$. از این‌رو $\top = u_1 \vee v \in r_c(x^*) \vee r_c(y)$ و در پی آن

$$\top = r_c(x^*) \vee r_c(y) \subseteq (r_c(x))^* \vee r_c(y).$$

بنابراین $r_c(x) \prec_{rId(cozL)} r_c(y)$. برعکس، فرض کنیم $r_c(x) \prec_{rId(cozL)} r_c(y)$. در این صورت $J \in rId(cozL)$ وجود دارد به‌قسمی که $r_c(y) \vee J = cozL$ و $r_c(x) \wedge J = \{\bot\}$. از این‌رو، $\bigvee\left(r_c(x) \wedge J\right) = \bot$ و در نتیجه $x \wedge \bigvee J = \bot$. اکنون چون $r_c(y) \vee J = cozL$، پس $z \in r_c(y)$ و $t \in J$ وجود دارند که $z \vee t = \top$. از این‌رو:

$$x = x \wedge \top = x \wedge (z \vee t) = (x \wedge z) \vee (x \wedge t) \overset{x \wedge t = \bot}{=} x \wedge z$$

در نتیجه $x \le z$. بنابراین $x \prec\prec y$.

(۳) برای هر $x \in cozL$ که $x \prec\prec a$، بنا بر (۲)، $r_c(x) \prec r_c(a)$، پس $r_c(x) \subseteq r_c(a)$. از این‌رو،

$$\bigvee\{r_c(x) : x \in cozL \ , \ x \prec\prec a\} \subseteq r_c(a).$$

از طرفی دیگر، برای هر $z \in r_c(a)$، $z \prec\prec a$. از این‌رو، $y \in cozL$ وجود دارد که $z \prec\prec y \prec\prec a$. از این‌رو

$$z \in r_c(y) \subseteq \bigvee\{r_c(x) : x \in cozL \ , \ x \prec\prec a\}$$

و در نتیجه $r_c(a) \subseteq \bigvee\{r_c(x) : x \in cozL\ ,\ x \prec\prec a\}$. بنابراین $r_c(a) = \bigvee\{r_c(x) : x \in cozL\ ,\ x \prec\prec a\}$.

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنیم $x \in L$ و $x \prec\prec a$. چون L کاملاً منظم است، پس $x = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} coz\,\alpha_\lambda$. از این‌رو، برای هر $\lambda \in \Lambda$، $coz\,\alpha_\lambda \le x \prec\prec a$ و در نتیجه $coz\,\alpha_\lambda \prec\prec a$. از این‌رو برای هر $\lambda \in \Lambda$، $coz\,\alpha_\lambda \in r_c(a)$. از طرفی دیگر $r_c(a) \subseteq \{x \in L : x \prec\prec a\}$. لذا $\bigvee r_c(a) = \bigvee\{x \in L : x \prec\prec a\}$. حال چون $\bigvee\{x \in L : x \prec\prec a\} = a$، پس $\bigvee r_c(a) = a$.

(۴) با توجه به دو قسمت قبلی داریم:

$$\begin{aligned} r_c(a) &= \bigvee\{r_c(x) : x \in cozL\ ,\ x \prec\prec a\} \\ &= \bigvee\{r_c(x) :\ r_c(x) \prec r_c(a)\} \\ &\subseteq \bigvee\{I : I \in rId(cozL)\ ,\ I \prec r_c(a)\}. \end{aligned}$$

حال چون $I \prec r_c(a)$ ایجاب می‌کند که $I \subseteq r_c(a)$، پس $\bigvee\{I : I \in rId(cozL)$ و $I \prec r_c(a)\} \subseteq r_c(a)$. بنابراین $r_c(a) = \bigvee\{I : I \in rId(cozL)\ ,\ I \prec r_c(a)\}$.

(۵) برای این‌که r_c الحاقی راست j_c باشد، کافی است نشان دهیم که برای هر $J \in rId(cozL)$ و $a \in L$،

$$\bigvee J \le a \Leftrightarrow J \subseteq r_c(a).$$

فرض کنیم $\bigvee J \le a$. اگر $x \in J$، آن‌گاه $z \in J$ وجود دارد که $x \prec_{cozL} z$ و درنتیجه $x \prec\prec z$. لذا $x \prec\prec \bigvee J \le a$، که ایجاب می‌کند $x \prec\prec a$. بنابراین $J \subseteq r_c(a)$. برعکس، اگر $J \subseteq r_c(a)$، آن‌گاه $\bigvee J \le \bigvee r_c(a)$. از این‌رو، با توجه به (۳)، $\bigvee J \le \bigvee r_c(a) = a$.

(۶) چون r_c الحاقی راست است، پس رسند دلخواه را حفظ می‌کند. از این‌رو،

$$r_c(a) \wedge r_c(a^*) = r_c(a \wedge a^*) = r_c(\perp) = \{\perp\}$$

از این‌رو $r_c(a^*) \le \left(r_c(a)\right)^*$. برعکس این نامساوی درست است، زیرا

$$\perp = \bigvee\{\perp\} = \bigvee\left(r_c(a) \wedge \left(r_c(a)\right)^*\right) = \left(\bigvee r_c(a)\right) \wedge \left(\bigvee\left(r_c(a)\right)^*\right) = a \wedge \bigvee\left(r_c(a)\right)^*$$

و در نتیجه $\bigvee\left(r_c(a)\right)^* \le a^*$. از این‌رو بنا بر قسمت قبلی، $\left(r_c(a)\right)^* \le r_c(a^*)$. بنابراین $r_c(a^*) = \left(r_c(a)\right)^*$.

(۷) اگر $x \in I$، آن‌گاه $z \in I$ وجود دارد که $x \prec\prec z$، در نتیجه $x \prec\prec \bigvee I$. از این‌رو $I \subseteq r_c(\bigvee I)$، پس $(r_c(\bigvee I))^* \subseteq I^*$. به سادگی می‌توان نشان داد که برعکس شمول نیز درست است. ازاین‌رو $I^* = (r_c(\bigvee I))^*$. بنابراین از قسمت قبلی نتیجه می‌شود که $I^* = r_c\left((\bigvee I)^*\right)$ و برهان کامل است.

توجه شود که برای قاب‌های منظم فشرده، $\prec$ و $\prec\prec$ با هم معادل هستند (ص ۶۲ از مرجع [۲] را ببینید). بنابراین هر قاب منظم فشرده، کاملاً منظم است.

قضیهٔ ۵: فرض کنیم L کاملاً منظم باشد. در این صورت

۱. $rId(cozL)$ قاب کاملاً منظم فشرده است.

۲. $j_c : rId(cozL) \to L$ با ضابطهٔ $j_c(I) = \bigvee I$ فشرده‌سازی برای L است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

برهان: (۱) باتوجه به نتیجه ۲، $rId(cozL)$ قاب فشرده است. ابتدا منظم بودنش را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $I \in rId(cozL)$ و $x \in I$. در این‌صورت $z \in I$ وجود دارد که $x \prec_{cozL} z$ و در نتیجه $x \prec\prec z$. از این‌رو، $y \in cozL$ به‌طوری‌که $x \prec\prec y \prec\prec z$. لذا، با استفاده از لم ۴ (۲)، $x \in r_c(y) \prec_{rId(cozL)} r_c(z)$. چون $r_c(z) \subseteq I$، پس $x \in r_c(y) \prec_{rId(cozL)} I$. بنابراین $I = \bigvee_{J \prec_{rId(cozL)} I} J$. اکنون چون $rId(cozL)$ قاب فشرده است، پس کاملاً منظم است.

(۳) بنا به لم ۴ (۳)، نگاشت j_c برو است. هم‌چنین واضح است که j_c چگال است. لذا چون $rId(cozL)$ قاب کاملاً منظم فشرده است، پس j_c فشرده‌سازی L است و برهان کامل است.

برای هر قاب کاملاً منظم L، قاب کاملاً منظم فشرده $rId(cozL)$ را با نماد $\beta_c L$ نشان می‌دهیم. بنابراین نگاشت $j_c : \beta_c L \to L$ فشرده‌سازی برای L است و آن را فشرده‌سازی استون-چک بر حسب عناصر متمم‌صفر می‌نامیم.

نتیجهٔ ۵: برای هر قاب کاملاً منظم L، گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. j_c رابطه کاملاً زیر را حفظ می‌کند.

۲. برای هر $I, J \in \beta_c L$، اگر $I \prec J$ و $\bigvee I \in cozL$، آن‌گاه $\bigvee I \in J$.

۳. برای هر $a \in cozL$ و $J \in \beta_c L$، $r_c(a) \prec_{rId(cozL)} J$ اگر و تنها اگر $a \in J$.

برهان: (۱) فرض کنیم $x, y \in L$ و $x \prec\prec y$. در این صورت بنا به لم ۴ (۲)، $r_c(x) \prec_{rId(cozL)} r_c(y)$. چون $\beta_c L$ منظم فشرده است، پس $r_c(x) \prec\prec_{rId(cozL)} r_c(y)$.

(۲) گیریم $H \in \beta_c L$ به‌طوری‌که $I \wedge H = \perp$ و $H \vee J = \top$. لذا $x \in H$ و $y \in J$ وجود دارند که $x \vee y = \top$. چون $\bigvee I \wedge \bigvee H = \perp$، پس $\bigvee I \wedge x = \perp$. بنابراین

$$y = y \vee (\bigvee I \wedge x) = (y \vee \bigvee I) \wedge (y \vee x) = y \vee \bigvee I$$

در نتیجه $\bigvee I \leq y \in J$. بنابراین $\bigvee I \in J$.

(۳) بنا به (۲) و لم ۴ (۳)، قسمت لزوم برقرار است. برای قسمت کفایت، فرض کنیم $a \in J$. در این صورت $z \in J$ وجود دارد که $a \prec_{cozL} z$ و در نتیجه $a \prec\prec z$. لذا بنا به (۱)، $r_c(a) \prec\prec_{rId(cozL)} r_c(z)$. چون $r_c(z) \subseteq J$، پس $r_c(a) \prec\prec_{rId(cozL)} J$ و برهان کامل است.

نتیجهٔ ۶: فرض کنیم قاب L کاملاً منظم باشد. برای هر $a \in L$، $a \in cozL$ اگر و تنها اگر $I \in coz(\mathcal{R}(\beta_c L))$ وجود داشته باشد که $a = j_c(I)$.

برهان: چون بنا به لم۱، نگاشت‌های قابی عنصر متمم‌صفر را به عنصر متمم‌صفر می‌برند، پس قسمت کفایت بدیهی است، از این‌رو فقط قسمت لزوم را اثبات کنیم. اکنون برای $a \in cozL$، فرض کنیم $a = \bigvee x_n$ که در این‌جا برای هر $n = ۱,۲,...$، $x_n \prec\prec x_{n+۱}$. لذا، برای هر $n = ۱,۲,...$، $c_n \in cozL$ وجود دارد که $x_n \prec\prec c_n \prec\prec x_{n+۱}$. اکنون فرض کنیم $I = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} r_c(c_n)$. واضح است که $I \in \beta_c L$ و $a = \bigvee I = j_c(I)$. از طرفی، چون $c_n \prec\prec c_{n+1}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، پس $r_c(c_n) \prec\prec_{rId(cozL)} r_c(c_{n+1})$ و در نتیجه بنا بر گزارهٔ ۱، نتیجه می‌شود $I \in coz(\mathcal{R}(\beta_c L))$ و برهان کامل است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

در رستهٔ قاب‌های منظم فشرده، یعنی KRFrm، نگاشت قابی یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر چگال باشد[۱۰]. از این‌رو، داریم:

نتیجهٔ ۷: اگر L قاب کاملاً منظم باشد، آن‌گاه نگاشت $j_c : \beta_c L \rightarrow L$ یکریختی است اگر و تنها اگر L فشرده باشد.

اکنون شرایط لازم برای این که نشان دهیم دو قاب کاملاً منظم $\beta_c L$ و βL یکریخت هستند، فراهم شده است.

قضیهٔ ۶: برای هر قاب کاملاً منظم L، یکریختی $f : \beta_c L \rightarrow \beta L$ وجود دارد به‌طوری‌که $\bigvee f = j_c$.

برهان: تعریف می‌کنیم

$$f : \beta_c L \rightarrow \beta L, \quad f(J) = \downarrow J (= \text{مجموعهٔ پایینی } J \text{ در } L \text{ است}).$$

ابتدا خوش‌تعریف بودن f را بررسی می‌کنیم. واضح است که $\downarrow J \in Id(L)$. حال نشان می‌دهیم که $\downarrow J$ ایده‌آل کاملاً منظم در L است. فرض کنیم $x \in \downarrow J$، پس $a \in J$ وجود دارد که $x \leq a$. چون J ایده‌آل منظم (در واقع کاملاً منظم) در $cozL$ است، پس $b \in J$ وجود دارد که $a \prec\prec_{cozL} b$ و در نتیجه $a \prec\prec_L b$. بنابراین $x \prec\prec b$ و $b \in \downarrow J$. از این‌رو، $\downarrow J$ ایده‌آل کاملاً منظم در L است.

هم‌ریختی و چگال بودن f واضح است. بنابراین کافی است، نشان دهیم که f پوشا است. فرض کنیم $H \in crId(L)$، قرار می‌دهیم $J = H \bigcap cozL$. اکنون نشان می‌دهیم که J ایده‌آل منظم در $cozL$ است. فرض کنیم $x \in J = H \bigcap cozL$. چون H ایده‌آل کاملامنظم در L است، پس $y \in H$ وجود دارد که $x \prec\prec y$. بنابراین $c \in cozL$ وجود دارد که $x \prec\prec c \prec\prec y$. روشن است که $c \in H \bigcap cozL$. بنابراین J در $cozL$ منظم است. به راحتی می‌توان دید که $f(J) = \downarrow (H \bigcap cozL) = H$. بنابراین f پوشا است. برای اثبات قسمت دوم، برای هر $I \in \beta_c L$ داریم $\bigvee (f(I)) = \bigvee \downarrow I = \bigvee I = j_c I$ بنابراین $\bigvee f = j_c$ و برهان کامل است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برای قاب‌های کاملاً منظم، فشرده‌سازی بر اساس قسمت متمم صفرشان معرفی شده است که با فشرده‌سازی استون -چک یکریخت است. از طرفی دیگر می‌دانیم که برای هر قاب، قاب کاملاً منظم وجود دارد که حلقهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار آن‌ها با هم یکریخت هستند. چون مفاهیم به‌خوبی زیر و کاملاً زیر در قسمت متمم صفر از قاب‌های کاملاً منظم با هم معادل هستند و فشرده‌سازی که در اینجا معرفی شده است با استفاده از ایده‌آل‌های منظم از قسمت متمم صفر قاب ساخته می‌شود و هم‌چنین کار کردن با ایده‌آل منظم راحت‌تر از ایده‌آل‌های کاملاً منظم است، پس می‌توانیم از این فشرده‌سازی برای بررسی و تحلیل حلقهٔ توابع پیوسته روی قاب استفاده کنیم.

قدردانی

از داوران محترم برای همهٔ نکات و توضیحاتی که ارائه کردند و باعث شدند تا نسخه ابتدایی از نظر کیفیت ارتقا پیدا کند و نگارش بهتری را داشته باشیم، نهایت سپاس‌گزاری و قدادانی را داریم.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]

منابع

1. Johnstone P. T., Stone spaces, vol 3, Cambridge University Press, (1986).

2. Banaschewski B., Compactification of frames, Mathematische Nachrichten, 149 (1) (1990) 105-115.

3. Banaschewski B. and Mulvey C., Stone-Čech compactification of locales I, Houston Journal of Mathematics, 6 (3) (1980) 301-312.

4. Banaschewski B. and Mulvey C., Stone-Čech compactification of locales II, Journal of Pure and Applied Algebra, 33 (2) (1984) 107-122.

5. Banaschewski B. and Mulvey C. J., The Stone–Čech compactification of locales III, Journal of Pure and Applied Algebra, 185 (1) (2003) 25-33.

6. Banaschewski B., The real numbers in pointfree topology, Textos Mat, Sér B 12, (1997).

7. Estaji A., Karimi Feizabadi A., and Abedi M, Zero sets in pointfree topology and strongly z-ideals, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 41 (5) (2015) 1071-1084.

8. Picado J. and Pultr A., Frames and Locales: topology without points, Springer Science & Business Media, (2011).

9 . Gillman L. and Jerison M., Rings of continuous functions. Springer, (1976).

10. Ebrahimi M. M. and Mahmoudi M., Frame, Technical Report, Shahid Beheshti University, (1995).

11. Banaschewski B. and Gilmour C., Pseudocompactness and the cozero part of a frame, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae , 37(1996) 577-588.

12. Azarpanah F., Karamzadeh O., and Aliabad A. R., On z°-ideals in C (X), Fundamenta Mathematicae, 160 (1) (1999) 15-25.

13. Azarpanah F., On almost P-space, Far East J Math Sci Special, (2000) 121-132.

14. Dube T., Concerning P-frames, essential P-frames, and strongly zero-dimensional frames, Algebra universalis, 61 (1) (2009) 115-138.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.4.6]

[DOI: 10.29252/mmr.5.1.53]