اثباتی کوتاه از حدس بیشینه در بعد کوشی-ریمان یک

مسعود سبزواری*
دانشگاه شهرکرد، دانشکدهٔ علوم ریاضی

دریافت ۹۶/۰۱/۱۲ پذیرش ۹۷/۰۴/۰۶

چکیده

در این مقاله، با به‌کارگیری نتایج موجود در نظریه تاناکا اثباتی کوتاه برای حدس بیشینه بلوشاپکا در بعد کوشی-ریمان یک ارائه می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، ثابت می‌کنیم که هر مدل کاملاً ناتباهیده بلوشاپکا از بعد کوشی-ریمان یک و طول بزرگ‌تر از سه صلبیت دارد. به‌عنوان نتیجه، هم‌چنین خواهیم دید که گروه خودریختی‌های کوشی-ریمان متناظر با هر یک از مدل‌های مذکور تنها شامل نگاشت‌های خطی است.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های کاملاً ناتباهیده کوشی-ریمان، حدس بیشینه، توسیع تاناکا.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۲V۴۰

مقدمه

خمینه حقیقی و هموار M را در نظر می‌گیریم. زیرکلاف زوج‌بعدی $T^cM \subset TM$ از فضای مماسی M را یک ساختار تقریباً کوشی-ریمان می‌نامیم هرگاه مجهز به یک نگاشت ساختار مختلط حافظ تار مانند $J: T^cM \to T^cM$ با خاصیت $J \circ J = -\mathrm{id}$ باشد. در این‌حالت، M یک خمینه تقریباً کوشی-ریمان از بعد کوشی-ریمان $n := \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}\,(T^cM)$ و هم‌بعد $k := \dim_{\mathbb{R}} M - 2n$ نامیده می‌شود. بر اساس نتایج موجود در هندسه کوشی-ریمان [۱] ، کلاف مختلط‌سازی شده $\mathbb{C} \otimes T^cM$ می‌تواند بدین‌صورت جمع‌وند مستقیم تجزیه شود:

$$\mathbb{C} \otimes T^cM := T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

که در آن

$$T^{1,0}M := \{X - i\,J(X): \quad X \in T^cM\}$$

و $T^{0,1}M := \overline{T^{1,0}M}$ به‌ترتیب زیرکلاف‌های تمام‌ریخت[1] و پادتمام‌ریخت $\mathbb{C} \otimes TM$ هستند. بر اساس تعریف، M را یک خمینه کوشی-ریمان[2] با ساختار T^cM می‌نامیم هرگاه زیرکلاف مختلط $T^{1,0}M$ تودرتو[3] (با تعریف فروبنیوس) باشد. به‌علاوه، چنین خمینه‌ای را یک زیرخمینه عمومی در $\mathbb{C}^{n+k}$ می‌نامیم هرگاه (به‌صورت موضعی) نمودار k تابع مستقل تابعی در این فضا باشد.

۱. خمینه‌های کوشی-ریمان کاملاً ناتباهیده از بعد کوشی-ریمان یک

فرض کنیم $M \subset \mathbb{C}^{1+k}$ یک خمینه کوشی-ریمان عمومی حقیقی-تحلیلی از بعد کوشی-ریمان یک، هم‌بعد k و بنابراین از بعد حقیقی $k + 2$ باشد. چنان‌که می‌دانیم [۱]، زیرکلاف تمام‌ریخت $T^{0,1}M \subset \mathbb{C} \otimes TM$ می‌تواند

*نویسندهٔ مسئول: sabzevari@ipm.ir

1. Holomorphic
2. CR manifold
3. Involutive

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.3.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.151]

به‌وسیلهٔ یک میدان برداری تمام‌ریخت در فضای $\mathbb{C}^{1+k}$ مانند $\mathcal{L}$ تولید شود. قرار می‌دهیم $D_1 \coloneqq T^{1,0}M + T^{0,1}M$ و به همین‌ترتیب برای هر $j > 1$ تعریف می‌کنیم $D_j \coloneqq D_{j-1} + [D_1, D_{j-1}]$. چنین زیرفضاهای حاصل از براکت لی بین مولدهای $\mathcal{L}$ و $\overline{\mathcal{L}}$ از زیرکلاف‌های مختلط $T^{0,1}M$ و $T^{0,1}M$ منجر به القای پالایشی[1] مانند:

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots$$

روی کلاف مختلط‌سازی شده $\mathbb{C} \otimes TM$ خواهد شد. توزیع D_1 را در اصطلاح کمینه (یا براکت‌مولد) می‌نامیم هرگاه برای هر $p \in M$ عددی (کمینه) مانند $\rho(p)$ موجود باشد به‌طوری‌که $D_{\rho(p)} = \mathbb{C} \otimes TM$. این توزیع را منظم گوییم هرگاه تابع مذکور ρ مستقل از نقاط M و ثابت باشد. در چنین حالتی، عدد ثابت ρ درجه غیرهولونومی[2] از توزیع D_1 نامیده می‌شود.

تعریف ۱ [۷]: خمینه کوشی-ریمان عمومی و حقیقی-تحلیلی $M \subset \mathbb{C}^{1+k}$ را کاملاً ناتباهیده[3] (یا به‌طور بیشینه کمینه) از طول ρ می‌نامیم هرگاه توزیع متناظر D_1 از آن منظم با کم‌ترین درجه غیرهولونومی ممکن ρ باشد. در این حالت، پالایش القایی:

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_\rho = \mathbb{C} \otimes TM \qquad (۱)$$

دارای کم‌ترین طول ممکن ρ خواهد بود.

در سال ۲۰۰۴ و در مقالهٔ [۳]، ریاضی‌دان برجسته روس والری بلوشاپکا مدل‌هایی از خمینه‌های کوشی-ریمان کاملاً ناتباهیده از بعد و هم‌بعد کوشی-ریمان دلخواه معرفی کرد. این کار، در واقع در راستای ایدهٔ مشهور هنری پوآنکاره ارائه شده در سال ۱۹۰۷ در مورد مطالعهٔ زیرخمینه‌های حقیقی در فضای مختلط ۲-بعدی $\mathbb{C}^2$ با بررسی خواص مدل متناظر این خمینه‌ها، یعنی دایره هایزنبرگ، بود. ایده پوآنکاره به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان بسیاری توسعه داده شد که از جمله آن‌ها می‌توان به کار مشهور چرن و موزر [۴] اشاره کرد که طی آن مدل‌های مناسبی برای بررسی ابررویه‌های حقیقی ناتباهیده در فضاهای مختلط ارائه شد. در این نوع از نگاه، هر مسئله راجع به گروه‌های خودریختی، پایاها، رده‌بندی و غیره پیرامون رده‌ای از خمینه‌ها می‌تواند به سؤالات مشابهی تنها در مورد مدل‌های نظیر شده تقلیل یابد. به‌عنوان مثال، در مورد مدل‌های بلوشاپکا ثابت شده است [۳]. که این مدل‌ها متقارن‌ترین خمینه‌های کاملاً ناتباهیده هستند به آن معنا که بعد جبر لی خودریختی‌های بینهایت کوچک هر خمینه کاملاً ناتباهیده (تعاریف مربوط در ادامه می‌آید) از بعد این جبر از مدل متناظر کوچک‌تر است. بنابراین، محاسبهٔ هر کران بالا برای بعد جبرهای لی بینهایت کوچک این مدل‌ها منجر به یافتن کران بالایی برای بعد این جبرها در مورد همهٔ خمینه‌های کاملاً ناتباهیده خواهد شد.

نکته حائز اهمیت در مورد تحقیق بلوشاپکا آن است که بر خلاف اکثر کارهای قبل در این زمینه، او توانسته است برای هر دسته از خمینه‌های کاملاً ناتباهیده از بعد و هم‌بعد کوشی-ریمان دلخواه مدل مناسبی معرفی کند. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد این مدل‌ها، نحوهٔ ساخت و خواص آن‌ها، می‌توانید به [۲]، [۳]، [۵]، [۷] مراجعه کنید. بر اساس نتایج [۳]، یک مدل کاملاً ناتباهیده بلوشاپکا مانند $M \subset \mathbb{C}^{1+k}$ از بعد کوشی-ریمان یک و هم‌بعد k می‌تواند در مختصات موضعی $(z, w_1, \ldots, w_k)$ به‌صورت نمودار k تابع حقیقی-تحلیلی مانند:

1. Filtration
2. Degree of nonholonomy
3. Totally nondegenerate

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.3.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.151]

$$M:\begin{cases} w_1-\bar{w}_1=2i\,\phi_1(z,\bar{z}) \\ \vdots \\ w_j-\bar{w}_j=2i\,\phi_j(z,\bar{z},w,\bar{w}) \\ \vdots \\ w_k-\bar{w}_k=2i\,\phi_k(z,\bar{z},w,\bar{w}) \end{cases} \qquad (۲)$$

نمایش داده شود که در آن، پس از نظیر کردن وزن‌های مناسب به متغیرهای فوق، هر ϕ_j یک چندجمله‌ای وزن-همگن[۱] حقیقی از وزن برابر با وزن متغیر w_j است. هم‌چنین، وزن داده شده به آخرین متغیر مختصاتی w_k (که در واقع بیش‌ترین وزن نظیر شده نیز هست) برابر طول خمینه کاملاً ناتباهیده M بر اساس تعریف ۱ خواهد بود. برای مدل کوشی-ریمان $M\subset\mathbb{C}^{1+k}$ فوق، یک میدان برداری تمام‌ریخت مانند:

$$X:=Z(z,w)\partial_z+\sum_{l=1}^{k}W^l(z,w)\partial_{w_l}$$

را یک خودریختی بینهایت کوچک کوشی-ریمان[۲] می‌نامیم هرگاه بخش حقیقی آن بر M مماس باشد. به‌عبارت دیگر هرگاه $(X+\bar{X})|_M\equiv 0$. مجموعه چنین میدان‌های برداری تشکیل یک جبر لی می‌دهد که با $\mathfrak{aut}_{CR}(M)$ نمایش و جبر لی خودریختی‌های بینهایت کوچک M نامیده می‌شود. این جبر در واقع نقش جبر لی تقارنی خمینه M در نظریه تقارن لی را بر عهده دارد. گروه لی هم‌بند ساده $\mathrm{Aut}_{CR}(M)$ متناظر با $\mathfrak{aut}_{CR}(M)$ شامل همهٔ خودریختی‌های کوشی-ریمان (و یا به‌عبارت دیگر توابع تمام‌ریخت) از خمینه M به‌خود آن است. ثابت می‌شود که ([۸، گزاره ۵,۳]) جبر لی $\mathfrak{aut}_{CR}(M)$ از یک خمینه مدل کوشی-ریمان از طول ρ مانند (۲)، متناهی‌بعد و مدرج بدین‌صورت است:

$$\mathfrak{aut}_{CR}(M):=\underbrace{\mathfrak{g}_{-\rho}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{-1}}_{\mathfrak{g}_-}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\underbrace{\mathfrak{g}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_\lambda}_{\mathfrak{g}_+}. \qquad (۳)$$

زیرجبر لی $\mathfrak{g}_-$ از این درجه‌بندی، یک جبر لی اساسی[۳] از بعد $k+2$ است (یادآور می‌شویم که k هم‌بعد کوشی-ریمان M است). فرض کنیم G_-,G_0,G_+ به‌ترتیب گروه‌های لی همبند ساده متناظر با $\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_+$ باشند. در این صورت، G_- یک گروه تبدیلاتی دارای یک عمل تراگذر[۴] روی M است و بنابراین به‌عنوان یک خمینه همگن، M می-تواند از طریق یک وابرسانی با G_- یکی در نظر گرفته شود. هم‌چنین، G_0 متشکل از همهٔ خودریختی‌های کوشی-ریمان خطی M در زیرگروه هم‌روندی[۵] $\mathrm{Aut}_0(M)\subset\mathrm{Aut}_{CR}(M)$ در نقطه مبدأ است. این در حالی است که G_+ شامل خودریختی‌های غیرخطی در زیرگروه هم‌روندی مذکور است [۳].

اگر چه در درجه‌بندی (۳) از جبر لی $\mathfrak{aut}_{CR}(M)$ مقدار اندیس ρ شناخته شده و در واقع برابر طول مدل M است اما متأسفانه مقدار اندیس بیشینه λ نامشخص است و تنها با انجام محاسبات مستقیم و پیچیده مبتنی بر ساخت و حل دستگاه‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قابل تعیین است [۸]. بااین‌حال، بلوشاپکا در [۲] حدس زده است که:

حدس بیشینه بلوشاپکا. در صورتی‌که طول ρ از مدل کوشی-ریمان M بزرگ‌تر و یا برابر ۳ باشد آن‌گاه این مدل صلبیت[۶] دارد به این معنا که در درجه‌بندی (۳) از $\mathfrak{aut}_{CR}(M)$، زیرجبر $\mathfrak{g}_+$ بدیهی است.

1. Weighted homogeneous
2. Infinitesimal CR automorphism
3. Fundamental
4.Transitive
5. Isotropy
6. Rigidity

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.3.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.151]

در صورت صحت حدس مذکور برای مدل M، هیچ خودریختی کوشی-ریمان غیرخطی از این خمینه به خودش وجود نخواهد داشت. تا زمان تهیهٔ این مقاله، حدس مذکور تنها در موارد خاصی به اثبات رسیده است. از جمله، گامل و کوسوفسکی در [۵] آن‌را در مورد همهٔ مدل‌های از طول دقیقاً ۳ ثابت کرده‌اند. هم‌چنین، نویسنده در مقاله نسبتاً طولانی [۷] این حدس را برای مدل‌های از بعد کوشی-ریمان یک و با استفاده از نظریه هم‌ارزی کارتان ثابت کرده است.

هدف از این مقاله، ارائه اثبات مجدد و بسیار کوتاه‌تری از حدس بیشینه در بعد کوشی-ریمان یک با استفاده از نتایج موجود در نظریه تاناکا است. اگر چه این مسئله، چنان‌که گفته شد، اخیراً به‌وسیلهٔ نویسنده حل شده است اما ذکر این نکته ضروری است که با اعمال روش پیچیده کارتان در [۷]، در واقع نتایج قوی‌تری از حدس بیشینه بلوشاپکا (مانند ضوابط معادلات ساختاری مدل‌ها در بعد کوشی-ریمان یک) به‌دست آمده‌اند. در این پژوهش قصد داریم که با به‌کارگیری روشی متفاوت، تنها حدس بیشینه در بعد یک را با ارائه اثباتی به‌مراتب کوتاه‌تر ثابت کنیم.

۲. جبر نمادی[1]

فرض کنیم $M \subset \mathbb{C}^{1+k}$ خمینه کوشی-ریمان کاملاً ناتباهیده از بعد کوشی-ریمان یک و هم‌بعد k معرفی شده در تعریف ۱ باشد. چنان‌که دیدیم، توزیع منظم $D_1 = T^{1,0}M + T^{0,1}M$ باعث القای پالایشی مانند (۱) از کلاف مماسی مختلط $\mathbb{C} \otimes TM$ با حداقل طول ممکن ρ می‌شود. قرار می‌دهیم $\mathfrak{s}_{-1} := D_1$ و برای هر $\ell > 1$ تعریف می‌کنیم $\mathfrak{s}_{-\ell} := D_\ell \setminus D_{\ell-1}$. در واقع، هر $\mathfrak{s}_{-\ell}$ فضای برداری کلیه براکت‌های لی از طول دقیقا ℓ بین مولدهای $\mathcal{L}$ و $\bar{\mathcal{L}}$ از $T^{1,0}M$ و $T^{0,1}M$ است. می‌دانیم که [۳]، [۷] فضای برداری:

$$\mathfrak{s}(M) := \mathfrak{s}_{-\rho} \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_{-1}$$

مجهز شده با عملگر طبیعی براکت لی بین میدان‌های برداری، یک جبر لی متناهی‌بعد اساسی از بعد $k + 2$ است که آن را در اصطلاح جبر لی نمادی خمینه M می‌نامیم. بلوشاپکا در [۳] نشان داده است که جبر لی نمادی $\mathfrak{s}(M)$ از خمینه مدل M می‌تواند با زیرجبر لی $\mathfrak{g}_-$ از $\mathfrak{aut}_{CR}(M)$ با درجه‌بندی (۳) یکریخت باشد.

۳. توسیع تاناکا

یک جبر لی مدرج مانند $\mathfrak{m} :=\oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{m}_i$ با $\mathfrak{m}_- :=\oplus_{i<0} \mathfrak{m}_i$ تراگذری نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in \mathfrak{m}_j$ با $j \geq 0$، اگر $[x, \mathfrak{m}_-] \equiv 0$ آن‌گاه $x = 0$ باشد. نوبورو تاناکا، ریاضی‌دان شهیر ژاپنی، نشان داده است که متناظر با هر جبر لی مدرج اساسی متناهی‌بعد مانند $\mathfrak{m}_- :=\oplus_{-\mu\leq i\leq -1} \mathfrak{m}_i$، جبر لی مدرج یکتایی مانند $\mathfrak{g}(\mathfrak{m}_-) :=\oplus_{i\geq -\mu} \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}_-)$ وجود دارد [۹] به‌طوری‌که:

الف) $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}_-) = \mathfrak{m}_i$ برای هر $i = -\mu, \dots, -1$.

ب) $\mathfrak{g}(\mathfrak{m}_-)$ تراگذری است.

ج) این جبر لی در میان همهٔ جبرهای لی موجود با دو شرط فوق بیشینه است.

امروزه، $\mathfrak{g}(\mathfrak{m}_-)$ با عنوان توسیع (کامل) تاناکا از جبر لی $\mathfrak{m}_-$ شناخته می‌شود. تاناکا هم‌چنین روش کارایی برای محاسبه و ساخت اجزای $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}_-)$ از این جبر لی مدرج ارائه کرد. به‌خصوص، او نشان داد که $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{m}_-)$ متشکل از همهٔ مشتقات $d: \mathfrak{m}_- \to \mathfrak{m}_-$ با شرط $d(\mathfrak{m}_-) \subset \mathfrak{m}_-$ است.

1. Symbol algebra

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.3.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.151]

تعریف ۲: جبر لی مدرج $\mathfrak{m}_- :=\bigoplus_{-\mu\leq i\leq -1}\mathfrak{m}_i$ شبه‌مختلط[۱] (یا کوشی-ریمان) نامیده می‌شود هرگاه نگاشت ساختار مختلطی مانند $J\colon \mathfrak{m}_{-1}\to\mathfrak{m}_{-1}$ با خاصیت $J\circ J=-\mathrm{id}$ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$[x,y]=[J(x),J(y)]$$

برای هر $x,y\in\mathfrak{m}_{-1}$.

جبرهای نمادی متناظر با همهٔ خمینه‌های (کاملاً) ناتباهیده همگی شبه‌مختلط هستند ([۶]). اگر جبر لی مدرج $\mathfrak{m}_- :=\bigoplus_{-\mu\leq i\leq -1}\mathfrak{m}_i$ شبه‌مختلط باشد، امکان تعریف توسیع لوی-تاناکای[۲] $\mathcal{G}(\mathfrak{m}_-) :=\bigoplus_{-\mu\leq i\leq -1}\mathcal{G}^i(\mathfrak{m}_-)$ از آن، به‌عنوان یک زیرجبر تراگذر از توسیع تاناکای $\mathfrak{g}(\mathfrak{m}_-)$، به‌صورت زیر وجود دارد. ابتدا برای هر $j<0$ قرار می‌دهیم $\mathcal{G}^j(\mathfrak{m}_-) := \mathfrak{m}_j$. هم‌چنین $\mathcal{G}^0(\mathfrak{m}_-)$ را به‌صورت مجموعه همهٔ مشتقات[۳] d عضو $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{m}_-)$ تعریف می‌کنیم که در تساوی زیر برای هر $x\in\mathfrak{m}_{-1}$ صدق می‌کنند:

$$d\big(J(x)\big)=J\big(d(x)\big).$$

حال اگر فرض کنیم که همهٔ بخش‌های $\mathcal{G}^l(\mathfrak{m}_-)$ برای $1\leq l\leq \ell-1$ ساخته شده‌اند آن‌گاه قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{G}^\ell(\mathfrak{m}_-) := \Big\{d\in\bigoplus_{k\leq -1}\mathrm{Lin}\Big(\mathcal{G}^k(\mathfrak{m}_-),\mathcal{G}^{k+\ell}(\mathfrak{m}_-)\Big):\ d([y,z]) = [d(y),z]+[y,d(z)],\ \ \forall y,z\in\mathfrak{m}_-\Big\}.$$

لازم به ذکر است که توسیع لوی-تاناکای $\mathcal{G}(\mathfrak{m}_-)$ در واقع توسیع کامل تاناکا از جبر لی مدرج $\mathfrak{m}_-\oplus\mathcal{G}^0(\mathfrak{m}_-)$ است که بعضاً با نماد $\mathfrak{g}(\mathfrak{m}_-,\mathcal{G}^0(\mathfrak{m}_-))$ نیز نمایش داده می‌شود [۶]، [۹].

اثبات حدس بیشینه در بعد کوشی-ریمان یک

پس از ارائه مقدمات لازم در بخش قبل، اکنون آماده‌ایم تا اثباتی کوتاه برای حدس بیشینه در بعد کوشی-ریمان یک داشته باشیم.

قضیهٔ ۱. حدس بیشینه بلوشاپکا در بعد کوشی-ریمان یک درست است.

اثبات. فرض کنیم M یک مدل بلوشاپکا از بعد کوشی-ریمان یک و طول $\rho\geq 3$ باشد. چون عمل گروه لی تبدیلاتی $\mathrm{Aut}_{CR}(M)$ روی این خمینه تراگذری است بنابراین $\mathfrak{aut}_{CR}(M)=\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+$ (تساوی (۳) را ببینید) به‌عنوان یک جبر لی مدرج، تراگذر است. از سوی دیگر، بر اساس نتایج زیربخش آخر ۵٫۶ از مقاله [۶]، توسیع لوی-تاناکای $\mathcal{G}(\mathfrak{g}_-)$ از زیرجبر لی $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{-\rho}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{-1}$ (که با جبر نمادی $\mathfrak{s}(M)$ یکریخت است) بدیهی است و بدین‌صورت است:

$$\mathcal{G}(\mathfrak{g}_-) := \mathfrak{g}_-\oplus\mathcal{G}^0(\mathfrak{g}_-)$$

که در آن $\dim\mathcal{G}^0(\mathfrak{g}_-)\leq 2$ است. از سوی دیگر، طبق قضیهٔ ۱۰٫۶ از [۹] می‌دانیم که:

$$\dim\mathfrak{aut}_{CR}(M)\leq\dim\mathcal{G}(\mathfrak{g}_-) \tag{۴}$$

و بنابراین چون $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{aut}_{CR}(M)$ غیربدیهی است پس بعد آن برابر یک یا دو است (بر اساس آن‌چه در پایین صفحه ۴۸۳ از [۳] آمده، $\mathfrak{g}_0$ حداقل دارای یک میدان برداری v با خاصیت $[v,x_j]=jx_j$ برای هر $x_j\in\mathfrak{g}_j\subset$

1. Almost complex
2. Levi-Tanaka prolongation
3. Derivation

$\mathfrak{aut}_{CR}(M)$ هست. هم‌چنین، طبق لم ۳.۵ از [۶]، $\mathcal{G}^0(\mathfrak{g}_-)$ نیز همواره دارای چنین عنصری هست). حال اگر $\dim \mathfrak{g}_0 = 2$ باشد آن‌گاه طبق (۴) لازم است که هر بخش $\mathfrak{g}_j$ با $j > 0$ دارای بعد صفر و بنابراین چنان‌که می‌خواهیم $\mathfrak{g}_+ \subset \mathfrak{aut}_{CR}(M)$ بدیهی باشد. اما اگر $\dim \mathfrak{g}_0 = 1$، آن‌گاه چون $\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$ یک زیرجبر لی $\mathcal{G}(\mathfrak{g}_-) := \mathfrak{g}_- \oplus \mathcal{G}^0(\mathfrak{g}_-)$ است پس هر نوع توسیع تراگذر از آن هم مشابه $\mathcal{G}(\mathfrak{g}_-)$ نمی‌تواند دارای بخشی با درجه مثبت باشد. پس $\mathfrak{aut}_{CR}(M) = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ نیز به‌عنوان یک توسیع تراگذر از $\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$ فاقد بخش مثبت $\mathfrak{g}_+$ نابدیهی بوده و به این‌ترتیب نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

منابع

1. Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P., "Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings", Princeton Univ. Press (1999).
2. Beloshapka V. K., "Model-surface method: an infinite-dimensional version", Proc. Steklov Inst. Math., 279 (2012) 14–24.
3. Beloshapka V. K., "Universal models for real submanifolds", Math. Notes, 75 (2004) 475-488.
4. Chern S. S., Moser Y., "Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133 (1974) 219-271.
5. Gammel R. V., Kossovskiy I., "The envelope of holomorphy of a model surface of the third degree and the ‘rigidity’ phenomenon", Proc. Steklov Inst. Math. 253(2006) 22-37.
6. Medori C., Nacinovich M., "Levi-Tanaka algebras and homogeneous CR manifolds", Compositio Mathematica, 109 (1997) 195-250.
7. Sabzevari M. "Biholomorphic equivalence to totally nondegenerate model CR manifolds", Ann. Mat. Pura Appl., 198 (2019) 1121-1163.
8. Sabzevari M., Hashemi A., Alizadeh B., Merker J. "Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms of weighted homogeneous and homogeneous CR-generic submanifolds of $\mathbb{C}^N$", FiloMat, 30 (2016) 1387-1411.
9. Tanaka N., "On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups", J. Math. Kyoto Univ., 10(1970) 1-82.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.3.7]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.151]