نتایج وجودی بهترین زوج‌های نزدینی برای رده‌ای خاص از نگاشت‌های غیردوری در فضاهای باناخ غیربازتابی

موسی گابله؛ دانشگاه آیت‌ا...العظمی بروجردی، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۱/۱۵ پذیرش ۹۷/۰۱/۱۴

چکیده

فرض کنید (A,B) یک زوج ناتهی از زیرمجموعه‌های فضای متریک (X,d) باشد. $T: A\cup B \longrightarrow A\cup B$ یک نگاشت غیردوری نامیده می‌شود هرگاه $T(A)\subseteq A, T(B)\subseteq B$. عضو $(p,q)\in A\times B$ یک بهترین زوج نزدینی برای نگاشت غیردوری T نامیده می‌شود هرگاه p,q نقاط ثابت T بوده که فاصله دو مجموعه A و B را تقریب بزنند، به این معنا که $d(p,q)=\mathrm{dist}(A,B)$. هدف اصلی این مقاله بررسی وجود چنین نقاطی برای رده‌ای خاص از نگاشت‌های غیردوری تحت عنوان نگاشت‌های C- غیرانبساطی نسبی است که اخیراً در مرجع [1] معرفی شده است. برای این‌منظور از یک مفهوم هندسی جدید به‌نام T- ساختار شبه نرمال یک‌نواخت که بر یک زوج ناتهی و محدب از زیر مجموعه‌های یک فضای باناخ که لزوماً بازتابی نیست، استفاده خواهد شد. به‌منظور تبیین بهتر این خاصیت هندسی نشان داده می‌شود که هر زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضاهای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب تحت شرایط کافی دارای ساختار شبه نرمالT- یک‌نواخت است. در نهایت با ارائه چند مثال کاربردی به بررسی اثربخش بودن نتایج حاصل می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: نگاشت‌های به‌طور قوی C- غیرانبساطی نسبی، بهترین زوج نزدینی، فضای به‌طور یک‌نواخت محدب، T- ساختار شبه نرمال یک‌نواخت.

۱. مقدمه

فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری نرم‌دار X باشد. خود نگاشت $T: A\to A$ را غیرانبساطی می‌نامند هرگاه $\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|$ برای هر $x,y\in A$. در سال ۱۹۶۵ برآودر[1] نشان داد که هر خودنگاشت غیرانبساطی تعریف شده بر یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از یک فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب دارای حداقل یک نقطه ثابت است ([۲]).

در همان سال کرک[2] در مقاله معروف [3] نتیجه کلی‌تری درباب وجود نقطه ثابت برای خودنگاشت‌های غیرانبساطی به‌دست آورد که پیش از بیان آن، مفهوم هندسی ساختار نرمال را که بروسکی[3] و میلمن[4] در [4] معرفی کردند یادآوری می‌کنیم.

تعریف۱. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب از فضای باناخ X باشد. می‌گویند که A دارای ساختار نرمال است هرگاه برای هر زیرمجموعه بسته، کراندار و محدب K از A با $\mathrm{diam}(K)>0$ عضو $p\in K$ موجود باشد چنان‌که

$$\sup\{\|p-x\| \;:\; x\in K\}<diam(K).$$

*نویسنده مسئول Gabeleh@abru.ac.ir

1. Browder
2. Kirk
3. Brodskil
4. Milman

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.2.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.229]

قضیهٔ ۱. (قضیهٔ نقطه ثابت کرک) فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی به‌طور ضعیف فشرده و محدب از فضای باناخ X و $T: A \to A$ خودنگاشت غیرانبساطی باشد. اگر A دارای ساختار نرمال باشد، آن‌گاه T دارای حداقل یک نقطه ثابت خواهد بود.

توجه شود که چون هر زیرمجموعهٔ بسته، کراندار و محدب از یک فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب دارای ساختار نرمال است ([۵]) پس قضیهٔ برآودر یک حالت خاص قضیهٔ کرک خواهد بود.

حال فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیرمجموعه‌های فضای برداری نرم‌دار X باشد. دراین‌صورت نگاشت $T: A \cup B \to A \cup B$ را غیردوری می‌نامند هرگاه $T(A) \subseteq A,\ T(B) \subseteq B$. هم‌چنین نگاشت غیردوری T را غیرانبساطی نسبی گویند هرگاه

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||, \quad \forall\ (x, y) \in A \times B.$$

این رده از نگاشت‌ها اولین بار در [6] به‌منظور بررسی وجود بهترین زوج‌های نزدینی معرفی شد. خاطر نشان می‌شود که نقطهٔ $(p, q) \in A \times B$ یک بهترین زوج نزدینی برای نگاشت غیردوری T نامیده می‌شود هرگاه

$$Tp = p, \quad Tq = q, \quad d(p, q) = \operatorname{dist}(A, B).$$

قضیهٔ ۲ یکی از نتایج اصلی [6] درمورد وجود بهترین زوج نزدینی است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب از فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب X و $T: A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری و غیرانبساطی نسبی باشد. آن‌گاه T دارای حداقل یک بهترین زوج نزدینی است.

آن‌چه که در قضیهٔ ۲ قابل توجه است این است که نگاشت درنظر گرفته شده لزوماً پیوسته نیست حال آن‌که نتیجهٔ بهتری نسبت به قضیهٔ برآودر حاصل می‌شود. در ضمن اثبات قضیهٔ ۲ مبتنی بر یک مفهوم هندسی به نام ساختار نرمال مجاوری[1] است که تعمیمی از ساختار نرمال است.

در این مقاله بحث وجودی بهترین زوج‌های نزدینی برای ردهٔ دیگری از نگاشت‌های غیردوری با معرفی یک ساختار هندسی جدید بررسی می‌شود. بر این اساس نتایج وجودی جدیدی در فضاهای باناخی که لزوماً بازتابی نیست، به‌دست می‌آید.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش به یادآوری برخی مفاهیم که در نتایج اصلی این مقاله استفاده می‌شوند، می‌پردازیم.

تعریف ۲. فضای باناخ X را:

آ) به‌طور یک‌نواخت محدب می‌گویند هرگاه تابع اکیداً صعودی $\delta: [0,2] \to [0,1]$ موجود باشد چنان‌چه برای هر $x, y, p \in X$ و $R > 0$ و $r \in [0,2R]$ داشته باشیم :

$$\begin{cases} \|x - p\| \leq R, \\ \|y - p\| \leq R, \\ \|x - y\| \geq r \end{cases} \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2} - p\right\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{r}{R}\right)\right) R;$$

ب) اکیداً محدب گویند هرگاه برای هر $x, y, p \in X$ و $R > 0$ ،

1. proximal normal structure

$$\begin{cases} \|x-p\| \le R, \\ \|y-p\| \le R, \\ x \neq y \end{cases} \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}-p\right\| < R.$$

شایان ذکر است که فضاهای هیلبرت و فضاهای باناخ l^p به‌ازای $1 < p < \infty$ به‌طور یک‌نواخت محدب است. به‌علاوه، فضای باناخ l^1 با نرم

$$|x| = \sqrt{\|x\|_1 + \|x\|_2}, \quad \forall x \in l^1,$$

که درآن $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ به‌ترتیب نرم‌های موجود بر l^1 و l^2 هستند، یک فضای باناخ اکیداً محدب است که به‌طور یک‌نواخت محدب نیست ([۷]).

در مرجع [۸] مفهوم هندسی ضعیف‌تری از به‌طور یک‌نواخت محدب بودن، به‌منظور شناسایی فضاهای برداری نرم‌دار با این خاصیت که هر زیرمجموعه کراندار آن دارای حداقل یک مرکز چبیشف باشد، به‌صورت زیر معرفی شد.

تعریف ۳. فضای برداری نرم‌دار X را به‌طور یک‌نواخت محدب در هر جهت می‌گویند هرگاه برای هر بردار ناصفر $z \in X$ و $\varepsilon > 0$، عدد مثبت $\delta > 0$ موجود باشد چنان‌چه اگر

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad x - y = \lambda z, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta,$$

آن‌گاه $|\lambda| < \varepsilon$.

گزارهٔ بعد بیان‌گر یک مشخصه مناسب برای فضاهای برداری نرم‌دار به‌طور یک‌نواخت محدب در هر جهت است.

گزاره ۱. ([8]) فضای برداری نرم‌دار X به‌طور یک‌نواخت محدب در هر جهت است اگر و تنها اگر برای دنباله‌های $\{x_n\}, \{y_n\}$ در X با شرایط

آ) $\|x_n\| \le 1$، $\|y_n\| \le 1$،

ب) $x_n - y_n \to z$،

ج) $\|x_n + y_n\| \to 2$،

داشته باشیم $z = 0$.

در ادامه به چند نمادگذاری متداول که در این مقاله استفاده می‌شود، اشاره می‌کنیم. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیرمجموعه‌های فضای برداری نرم‌دار X باشد. می‌گوییم که زوج (A, B) در یک خاصیت صدق می‌کند هرگاه هر دو مجموعهٔ A و B در آن خاصیت صدق کنند. به‌عنوان مثال وقتی که می‌گوییم (A, B) یک زوج محدب است یعنی این‌که A و B هردومحدب هستند. درضمن $(A, B) \subseteq (C, D)$ اگر و تنها اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$. هم‌چنین قرار می‌دهیم

$$\delta_x(A) = \sup\{d(x,y) : y \in A\}, \quad \forall x \in X,$$
$$\delta(A,B) = \sup\{d(x,y) : x \in A, y \in B\},$$
$$\operatorname{diam}(A) = \delta(A,A).$$

غلاف محدب بسته مجموعه A با $\overline{\operatorname{con}}(A)$ نشان داده می‌شود. به‌علاوه، تعریف می‌کنیم

$$A_0 := \{x \in A : d(x,y) = \operatorname{dist}(A,B), \text{ for some } y \in B\},$$
$$B_0 := \{y \in B : d(x,y) = \operatorname{dist}(A,B), \text{ for some } y \in A\}.$$

لازم به ذکر است که زوج (A_0, B_0) لزوماً ناتهی نیست، اما در حالت خاص اگر (A, B) یک زوج ناتهی، به‌طور ضعیف فشرده و محدب در فضای باناخ X باشد آن‌گاه (A_0, B_0) نیز ناتهی، بسته و محدب است.

لم ۱ در ادامه بحث استفاده می‌شود.

لم ۱ [9]. فرض‌کنید (A, B) یک زوج ناتهی در فضای برداری نرم‌دار X باشد. دراین‌صورت

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.2.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.229]

$$\delta(\overline{\mathrm{con}}(A), \overline{\mathrm{con}}(B)) = \delta(A, B).$$

در این مقاله عملگر تصویر متریک روی زیرمجموعه ناتهی A از فضای برداری نرم‌دار X عبارت است از نگاشت $\mathcal{P}_A : X \to 2^A$ که در آن 2^A معرف خانواده تمام زیرمجموعه‌های A است و بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_A(x) := \{y \in A : d(x,y) = \mathrm{dist}(\{x\}, A)\},$$

یادآوری می‌کنیم که اگر A یک زیر مجموعه ناتهی، به‌طور ضعیف فشرده ومحدب از فضای باناخ اکیداً محدب X باشد، آن‌گاه عملگر تصویر $\mathcal{P}_A$ تک مقداری خواهد بود.

لم ۲ [10]. فرض‌کنید (A, B) یک زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ بازتابی و اکیداً محدب X باشد. نگاشت $\mathcal{P} : A_0 \cup B_0 \to A_0 \cup B_0$ را با ضابطه

$$\mathcal{P}(x) = \begin{cases} \mathcal{P}_{A_0}(x) & x \in B_0, \\ \mathcal{P}_{B_0}(x) & x \in A_0, \end{cases}$$

در نظر بگیرید. در این‌صورت این گزاره‌ها برقرارند:

آ) برای هر $x \in A_0 \cup B_0$ ، $\|x - \mathcal{P}x\| = \mathrm{dist}(A, B)$ و اینکه $\mathcal{P}(B_0) \subseteq A_0$ ، $\mathcal{P}(A_0) \subseteq B_0$.

ب) نگاشت $\mathcal{P}$ یک ایزومتری است، به این معنا که

$$\|\mathcal{P}x - \mathcal{P}y\| = \|x - y\|, \quad \forall\, (x, y) \in A_0 \times B_0.$$

در پایان این بخش به بیان یک نتیجه درباب وجود بهترین زوج‌های نزدینی برای رده‌ای از نگاشت‌های غیردوری که در مرجع [1] بررسی شده است، می‌پردازیم . برای این‌منظور مفاهیم زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۴ [1]. زوج محدب (A, B) در فضای برداری نرم‌دار X دارای ساختار شبه نرمال گفته می‌شود هرگاه برای هر زوج بسته، کراندار و محدب $(K_1, K_2) \subseteq (A, B)$ با شرط $\delta(K_1, K_2) > dist\,(K_1, K_2)$ و $\min\{\mathrm{diam}(K_1), \mathrm{diam}(K_2)\} > 0$ عنصر $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\|x_1 - x_2\| = \mathrm{dist}(A, B), \quad \max\{\delta_{x_1}(K_2), \delta_{x_2}(K_1)\} < \delta(K_1, K_2).$$

شایان ذکر است که اگر در تعریف فوق $A = B$ باشد آن‌گاه A دارای ساختار نرمال به مفهوم بروسکی و میلمن [4] خواهد بود.

تعریف ۵ [1]. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی در فضای برداری نرم‌دار X باشد. نگاشت غیردوری $T : A \cup B \to A \cup B$ را $C-$غیرانبساطی نسبی گویند هرگاه

$$d(Tx, Ty) = d(x, y), \ \ \forall (x, y) \in A \times B, \quad \text{اگر} \quad d(x, y) = \mathrm{dist}(A, B),$$

$$(Tx, Ty) \le \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \ \ \forall (x, y) \in A \times B, \quad \text{اگر} \quad d(x, y) > dist(A, B),$$

هم‌چنین نگاشت غیردوری T را به‌طور قویC- غیرانبساطی نسبی می‌نامیم هرگاه

$$d(Tx, Ty) = d(x, y), \ \ \forall (x, y) \in A \times B, \quad \text{اگر} \ d(x, y) = \mathrm{dist}(A, B),$$

$$d(Tx, Ty) \le \min\{d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \ \ \forall (x, y) \in A \times B, \quad \text{اگر} \ d(x, y) > dist(A, B).$$

آن‌چه که مسلم است این است که خانواده نگاشت‌های به‌طور قویC- غیرانبساطی نسبی مشمول در خانواده نگاشت‌های C- غیرانبساطی نسبی است.

قضیهٔ۳ [1]. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ بازتابی و اکیداً محدب X و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری به‌طور قویC- غیرانبساطی نسبی باشد. اگر زوج (A, B) دارای ساختار شبه نرمال باشد، در این صورت T دارای حداقل یک بهترین زوج نزدینی است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.2.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.229]

۳. نتایج اصلی

این بخش را با معرفی مفاهیم زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۶. فرض کنید (A,B) یک زوج ناتهی و محدب در فضای برداری نرم‌دار X باشد. می‌گوییم که زوج (A,B) دارای ساختار شبه نرمال یکنواخت است هرگاه عدد مثبت $\lambda \in (0,1)$ موجود باشد چنان‌چه برای هر زوج ناتهی بسته، کرندار و محدب $(K_1,K_2) \subseteq (A,B)$ با شرط $\delta(K_1,K_2) > dist(K_1,K_2)$ و $\min\{diam(K_1), diam(K_2)\} > 0$، نقطه $(x_1,y_1) \in K_1 \times K_2$ با $\|x_1 - y_1\| = dist(A,B)$ موجود باشد چنان‌که

$$\max\{\delta_{x_1}(K_2), \delta_{y_1}(K_1)\} \leq \lambda\delta(K_1,K_2).$$

تعریف ۷. اگر (A,B) یک زوج ناتهی و محدب در فضای برداری نرم‌دار X و $T: A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری باشد در این‌صورت می‌گوییم که زوج (A,B) دارای T- ساختار شبه نرمال یکنواخت است هرگاه عدد مثبت $\lambda \in (0,1)$ موجود باشد چنان‌چه برای هر زوج ناتهی بسته، کرندار، محدب وT- پایا $(K_1,K_2) \subseteq (A,B)$ با شرط $\delta((K_1,K_2) > dist(K_1,K_2)$ و $\min\{diam(K_1), diam(K_2)\} > 0$ ، نقطه $(x_1,y_1) \in K_1 \times K_2$ با $\|x_1 - y_1\| = dist(A,B)$ موجود باشد چنان‌که

$$\max\{\delta_{x_1}(K_2), \delta_{y_1}(K_1)\} \leq \lambda\,\delta(K_1,K_2).$$

هم‌چنین اگر رابطه اخیر به‌صورت

$$\max\{\delta_{x_1}(K_2), \delta_{y_1}(K_1)\} < \delta(K_1,K_2),$$

باشد، آن‌گاه می‌گوییم که زوج (A,B) دارایT- ساختار شبه نرمال است. به‌علاوه، اگر در حالت خاص $A = B$ باشد، آن‌گاه به‌ترتیب مفاهیم مذکور، می‌گوییم A دارایT- ساختار نرمال یکنواخت وT- ساختار نرمال است.

گزارهٔ ۲ بوضوح برقرار است.

گزاره ۲. فرض کنید (A,B) یک زوج ناتهی و محدب در فضای برداری نرم‌دار X و $T: A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری باشد. آن‌گاه برای زوج (A,B) داریم

ساختارشبه نرمال $\Leftarrow$ T- ساختارشبه نرمال$\Leftarrow$ T- ساختارشبه نرمال یکنواخت $\Leftarrow$ ساختارشبه نرمال یکنواخت

قضیهٔ بعد اولین نتیجه اصلی این مقاله است.

قضیهٔ ۴. فرض کنید (A,B) یک زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ اکیداً محدب X باشد چنان‌که A_0 ناتهی و $dist\,(A,B) > 0$. فرض‌کنید $T: A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری به‌طور قوی C-غیرانبساطی نسبی باشد. اگر زوج (A,B) دارایT- ساختار شبه نرمال یکنواخت باشد، آن‌گاه T حداقل یک بهترین زوج نزدینی دارد.

اثبات. اگر $\delta(A,B) = dist\,(A,B)$، آن‌گاه برای هر $(x,y) \in A \times B$ داریم $\|x - y\| = dist(A,B)$. فرض کنید که $x \neq Tx$. از محدب بودن مجموعه A و اکیداً محدب بودن X نتیجه می‌شود

$$dist(A,B) \leq \left\|\frac{x + Tx}{2} - y\right\| < \frac{1}{2}\left(\|x - y\| + \|Tx - y\|\right) = dist(A,B),$$

که یک تناقض است. به‌همین ترتیب می‌توان دید که y نیز یک نقطه ثابت نگاشت T است، از این رو، هر نقطه از $A \times B$ یک بهترین زوج نزدینی برای نگاشت T است و در این حالت حکم نتیجه می‌شود. حال فرض کنید $\delta(A,B) > dist\,(A,B)$. چون (A,B) دارای T- ساختار شبه نرمال یکنواخت است، نقطهٔ

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.2.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.229]

$\lambda \in (0,1)$ و $\|x_1 - y_1\| = \text{dist}\,(A,B)$ با $(x_1, y_1) \in A \times B$

موجود است که

$$\max\{\delta_{x_1}(B), \delta_{y_1}(A)\} < \lambda\delta(A,B).$$

حال تعریف کنید :

$$K_1^1 := \{x \in A_0 \ : \ \delta_x(TB) \le \lambda\, \delta(A,B)\},$$
$$K_2^1 := \{x \in B_0 \ : \ \delta_y(TA) \le \lambda\, \delta(A,B)\}.$$

توجه داریم که بنابر ویژگی نگاشت T، $\|Tx_1 - Ty_1\| = \text{dist}(A,B)$. اکنون برای هر $(x,y) \in A \times B$ داریم

$$\|Tx_1 - Ty\| \le \min\{\|x_1 - Ty\|, \|Tx_1 - y\|\}$$
$$\le \|x_1 - Ty\| \le \delta_{x_1}(B) \le \lambda\, \delta(A,B),$$

از این رو،

$$\delta_{Tx_1}(TB) = \ \sup_{y\in B}\|Tx_1 - Ty\| \le \ \lambda\, \delta(A,B),$$

پس $Tx_1 \in K_1^1$. به‌همین نحو $Ty_1 \in K_2^1$ و این‌که $\text{dist}\,(K_1^1, K_2^1) = \text{dist}\,(A,B)$. حال قرار می‌دهیم

$$G_1^1 := \ \overline{\text{con}}\big(T(K_1^1)\big), \qquad G_2^1 := \ \overline{\text{con}}\big(T(K_2^1)\big)$$

به‌وضوح $(G_1^1, G_2^1) \subseteq (A,B)$ بسته، کراندار و محدب است. فرض‌کنید $x \in G_1^1$. دراین‌صورت دنبالهٔ $\{x_n\}$ در مجموعهٔ $\text{con}\big(T(K_1^1)\big)$ موجود است که $x_n \to x$. از طرفی با توجه به تعریف غلاف محدب یک مجموعه برای هر $n \in \mathbb{N}$ بردارهای $z_{n_j} \in K_1^1$ به‌ازای $1 \le j \le k$ و اعداد نامنفی c_{n_j} با $\sum_{j=1}^{k} c_{n_j} = 1$ موجودند چنان‌که $x_n = \ \sum_{j=1}^{k} c_{n_j} Tz_{n_j}$. اکنون برای هر $y \in B$ داریم:

$$\|x - Ty\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - Ty\|$$
$$= \ \|x - x_n\| + \left\|\textstyle\sum_{j=1}^{k} c_{n_j} Tz_{n_j} - \ \sum_{j=1}^{k} c_{n_j} Ty\right\|$$
$$\le \|x - x_n\| + \textstyle\sum_{j=1}^{k} c_{n_j} \left\|Tz_{n_j} - Ty\right\|$$
$$\le \|x - x_n\| + \textstyle\sum_{j=1}^{k} c_{n_j} \min\left(\left\|z_{n_j} - Ty\right\|, \left\|Tz_{n_j} - y\right\|\right)$$
$$\le \|x - x_n\| + \textstyle\sum_{j=1}^{k} c_{n_j} \left\|z_{n_j} - Ty\right\|$$
$$\le \|x - x_n\| + \ \textstyle\sum_{j=1}^{k} c_{n_j} \delta_{z_{n_j}}(TB)$$
$$\le \|x - x_n\| + \textstyle\sum_{j=1}^{k} c_{n_j} \lambda\, \delta(A,B) = \ \|x - x_n\| + \lambda\, \delta(A,B).$$

از آن‌جا که رابطهٔ اخیر برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است، پس $\|x - Ty\| \le \lambda\, \delta(A,B)$، برای هر $y \in B$، از این‌رو، $\delta_x(TB) \le \lambda\, \delta(A,B)$، که این نشان می‌دهد $x \in K_1^1$. بنابراین $G_1^1 \subseteq K_1^1$ و در نتیجه

$$T(G_1^1) \subseteq T(K_1^1) \subseteq \overline{\text{con}}\big(T(K_1^1)\big) = \ G_1^1.$$

با شیوهٔ مشابه می‌توان دید که $T(G_2^1) \subseteq G_2^1$ بدین معنی که T بر $G_1^1 \cup G_2^1$ غیردوری است. حال با استفاده از لم ۱ داریم:

$$\delta(G_1^1, G_2^1) = \delta(\overline{\text{con}}\big(T(K_1^1)\big), \overline{\text{con}}\big(T(K_2^1)\big))$$
$$= \ \delta\big(T(K_1^1), T(K_2^1)\big) = \sup\{\|Tx - Ty\| : (x,y) \in K_1^1 \times K_2^1\}$$
$$\le \sup\{\min\{\|x - Ty\|, \|Tx - y\|\} : (x,y) \in K_1^1 \times K_2^1\}$$
$$\le \sup\{\min\{\delta_x(TB), \delta_y(TA)\} : (x,y) \in K_1^1 \times K_2^1\} \le \ \lambda\, \delta(A,B).$$

اکنون برای زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب $(G_1^1, G_2^1) \subseteq (A, B)$ که $T-$ ناوردا نیز است، چنان‌چه $\delta(G_1^1, G_2^1) = \text{ dist } (G_1^1, G_2^1)(= \text{dist } (A, B))$. آن‌گاه مشابه بحث قبل هر نقطه از $G_1^1 \times G_2^1$ یک بهترین زوج نزدینی برای نگاشت T است و حکم نتیجه می‌شود. درصورتی‌که $\delta(G_1^1, G_2^1) > \text{ dist } (G_1^1, G_2^1)$ آن‌گاه مجدداً از این‌که (A, B) دارای T- ساختار شبه نرمال یک‌نواخت است، نقطه $(x_2, y_2) \in G_1^1 \times G_2^1$ موجود است به‌طوری که $\|x_2 - y_2\| = \text{dist}(G_1^1, G_2^1)$ و اینکه $\max\{\delta_{x_2}(G_2^1), \delta_{y_2}(G_1^1)\} \leq \lambda\, \delta(G_1^1, G_2^1)$. قرار دهید

$$K_1^2 := \{x \in (G_1^1)_0 \ : \ \delta_x(TG_2^1) \leq \lambda\, \delta(G_1^1, G_2^1)\},$$
$$K_2^2 := \{y \in (G_2^1)_0 \ : \ \delta_y(TG_1^1) \leq \lambda\, \delta(G_1^1, G_2^1)\}.$$

دراین‌صورت می‌توان دید که $(Tx_2, Ty_2) \in K_1^2 \times K_2^2$، از این‌رو، $\text{dist } (K_1^2, K_2^2) = \text{dist } (A, B)$. حال اگر

$$G_1^2 := \overline{\text{con}}(T(K_1^2)), \qquad G_2^2 := \overline{\text{con}}(T(K_2^2)),$$

آن‌گاه مشابه آن‌چه که پیش‌تر ملاحظه شد $(G_1^2, G_2^2) \subseteq (G_1^1, G_2^1)$ یک زوج بسته، کراندار و محدب بوده است که T بر $G_1^2 \cup G_2^2$ غیردوری است و

$$\delta(G_1^2, G_2^2) \leq \lambda\delta(G_1^1, G_2^1) \leq \lambda^2\delta(A, B).$$

با ادامهٔ همین روند و با استقراء، دنبالهٔ نزولی $\{(G_1^n, G_2^n)\}$ متشکل‌از زوج‌های ناتهی بسته، کراندار، محدب وT- پایا به‌دست می‌آید به‌طوری‌که

$$\text{dist } (G_1^n, G_2^n) = \text{dist } (A, B), \qquad \delta(G_1^n, G_2^n) \leq \lambda^n\delta(A, B),$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. چنان‌چه $m \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $\delta(G_1^m, G_2^m) = \text{dist } (G_1^m, G_2^m)(= \text{dist } (A, B))$ آن‌گاه با توجه به اکیداً محدب بودن فضای باناخ X هر نقطه از $G_1^m \times G_2^m$ یک بهترین زوج نزدینی برای نگاشت T خواهد بود. در غیر این‌صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\text{dist } (A, B) \leq \delta(G_1^n, G_2^n) \leq \lambda^n\delta(A, B) \to 0,$$

که این مطلب با فرض $\text{dist } (A, B) > 0$ در تناقض است و اثبات کامل می‌شود.

نتیجهٔ ۱ مستقیماً از قضیهٔ ۴ به‌دست می‌آید.

نتیجهٔ ۱. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ اکیداً محدب X باشد چنان‌چه A_0 ناتهی است و $\text{dist } (A, B) > 0$. فرض‌کنید $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری به‌طورقوی C-غیرانبساطی نسبی باشد. اگر زوج (A, B) دارای ساختار شبه نرمال یک‌نواخت باشد، آن‌گاه T حداقل یک بهترین زوج نزدینی دارد.

تذکر ۱. چنان‌که در نتیجهٔ ۱ ملاحظه می‌شود، فضای باناخ X لزوماً بازتابی نیست، حال آن‌که در قضیهٔ ۳ شرط بازتابی بودن فضای باناخ X به‌منظور استفاده از لم زرن در فرآیند اثبات، ضروری است.

گزارهٔ ۳ یک شرط کافی برای تعیین زوج‌های محدبی که تحت یک نگاشت غیردوری مانند T، پایا است و دارای T-ساختار شبه نرمال یک‌نواخت است را بیان می‌کند.

گزارهٔ ۳. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب X و $T : A \cup B \to A \cup B$ نگاشتی غیردوری باشد چنان‌چه $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ برای هر $(x, y) \in A \times B$ با $\|x - y\| = \text{dist } (A, B)$. اگر

$$\inf\{\|x - T\mathcal{P}x\| : x \in A_0 \cup B_0\} > dist\ (A, B),$$

آن‌گاه زوج (A, B) دارای T- ساختار شبه نرمال یک‌نواخت خواهد بود.

اثبات. نگاشت $\mathcal{P} : A_0 \cup B_0 \to A_0 \cup B_0$ که در لم ۲ معرفی شد را در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت بنا بر لم ۲، به‌ازای عنصر $x \in A_0$ داریم

$$\|x - \mathcal{P}x\| = \text{dist}\,(A, B) = \|Tx - \mathcal{P}Tx\|.$$

با توجه به شرط موجود بر نگاشت T، $\|Tx - T\mathcal{P}x\| = \text{dist}\,(A, B)$. از این رو، از اکیداً محدب بودن X داریم $\mathcal{P}Tx = T\mathcal{P}x$. به‌طریق مشابه می‌توان دید که $\mathcal{P}Ty = T\mathcal{P}y$ برای هر $y \in B_0$ بدین‌معنی که T و $\mathcal{P}$ بر $A_0 \cup B_0$ تعویض‌پذیرند. اکنون فرض کنید $(K_1, K_2) \subseteq (A, B)$ یک زوج ناتهی بسته، کراندار، محدب و $T-$ پایا باشد و $(x_1, y_1) \in K_1 \times K_2$ چنان‌چه $\|x_1 - y_1\| = \text{dist}\,(A, B)$. قرار می‌دهیم $p := \frac{x_1 + Tx_1}{2}$ ، $q := \frac{y_1 + Ty_1}{2}$ و $r := \inf\{\|x - T\mathcal{P}x\| : x \in A_0 \cup B_0\}$. آن‌گاه $(p, q) \in K_1 \times K_2$ و $\|p - q\| = \text{dist}\,(A, B)$. به‌علاوه،

$$\begin{aligned}\|x_1 - T\mathcal{P}x_1\| &= \|x_1 - \mathcal{P}Tx_1\| \le \|x_1 - Tx_1\| + \|Tx_1 - \mathcal{P}Tx_1\| \\ &= \|x_1 - Tx_1\| + \text{dist}\,(A, B).\end{aligned}$$

از این‌رو

$$\|x_1 - Tx_1\| \ge \|x_1 - T\mathcal{P}x_1\| - \text{dist}\,(A, B) \ge r - \text{dist}\,(A, B).$$

اکنون برای هر $y \in K_2$ داریم

$$\|x_1 - y\| \le \delta(K_1, K_2), \quad \|Tx_1 - y\| \le \delta(K_1, K_2), \quad \|x_1 - Tx_1\| \ge r - \text{dist}(A, B).$$

از آن‌جا که X به‌طور یک‌نواخت محدب است، تابع اکیداً صعودی $\delta : [0,2] \to [0,1]$ موجود است چنان‌که

$$\begin{aligned}\|p - y\| = \left\|\frac{x_1 + Tx_1}{2} - y\right\| &\le \left[1 - \delta\left(\frac{r - \text{dist}(A,B)}{\delta(K_1,K_2)}\right)\right]\delta(K_1, K_2) \\ &\le \left[1 - \delta\left(\frac{r - \text{dist}(A,B)}{\delta(A,B)}\right)\right]\delta(K_1, K_2).\end{aligned}$$

قرار دهید $\lambda := 1 - \delta\left(\frac{r - \text{dist}(A,B)}{\delta(A,B)}\right)$ آن‌گاه $\lambda \in (0,1)$ و

$$\delta_p(K_2) = \sup_{y \in K_2} \|p - y\| \le \lambda\, \delta(K_1, K_2).$$

به‌همین طریق می‌توان نشان داد که

$$\delta_q(K_1) = \sup_{x \in K_1} \|x - q\| \le \lambda\, \delta(K_1, K_2),$$

از این رو، زوج (A, B) دارای T- ساختار شبه نرمال یک‌نواخت است.

نتیجهٔ ۲. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب X با $\text{dist}\,(A, B) > 0$ و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری به‌طور قوی C–غیرانبساطی نسبی باشد. آن‌گاه T دارای بهترین زوج نزدینی است.

در فضاهای به‌طور یک‌نواخت محدب در هر جهت، نتیجه ضعیف‌تر از آن‌چه که در گزارهٔ ۳ حاصل شد، بدین‌صورت به‌دست می‌آید.

گزارهٔ ۴. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی به‌طور ضعیف فشرده و محدب در فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب در هر جهت X و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت غیردوری با $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ برای هر $(x, y) \in A \times B$ که در شرط $\|x - y\| = \text{dist}\,(A, B)$ صدق می‌کند، باشد. اگر

$$\inf\{\|x - T\mathcal{P}x\| : x \in A_0 \cup B_0\} > dist\,(A, B),$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.2.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.229]

آن‌گاه زوج (A,B) دارایT- ساختار شبه نرمال است.

اثبات. فرض کنید زوج (K_1,K_2) و نقاط $(x_1,y_1),\ (p,q)$ مانند آن‌چه که در اثبات گزارهٔ ۳ آمد، باشند. اگر $\delta_p(K_2)=\delta(K_1,K_2)$، دراین‌صورت دنباله $\{\omega_n\}$ در K_2 موجود است چنان‌که

$$\|p-\omega_n\|\to\delta(K_1,K_2).$$

اکنون داریم $\|Tx_1-\omega_n\|\le\delta(K_1,K_2)$ و $\|x_1-\omega_n\|\le\delta(K_1,K_2)$ و

$$\left\|\frac{(x_1-\omega_n)+(Tx_1-\omega_n)}{2}\right\|=\left\|\frac{x_1+Tx_1}{2}-\omega_n\right\|=\|p-\omega_n\|\to\ \delta(K_1,K_2).$$

با استفاده از گزارهٔ ۱ و این‌که X یک فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب در هر جهت است،$x_1=Tx_1$. با توجه به تعویض‌پذیر بودن T و $\mathcal{P}$ داریم:

$$\|x_1-T\mathcal{P}x_1\|=\|x_1-\mathcal{P}Tx_1\|=\|x_1-\mathcal{P}x_1\|=\mathrm{dist}\,(A,B),$$

که با فرض قضیهٔ در تناقض است. پس باید $\delta_p(K_2)<\delta(K_1,K_2)$. به‌طریق مشابه می‌توان دید که $\delta_q(K_1)<\delta(K_1,K_2)$ و این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

نتیجهٔ ۳. فرض کنید A یک زیر مجموعه ناتهی به‌طور ضعیف فشرده و محدب از فضای باناخ به‌طور یک‌نواخت محدب در هر جهت X و $T:A\to A$ یک خود نگاشت باشد چنان‌چه

$$\inf\{\|x-Tx\|:x\in A\}>0.$$

آن‌گاه A دارای T- ساختار نرمال است.

۴. چند مثال

در این بخش با ارائه چند مثال به تبیین نتایج به‌دست آمده در بخش‌سوم از این مقاله می‌پردازیم.

در ابتد انشان می‌دهیم که رده نگاشت‌های غیردوری غیرانبساطی نسبی و به‌طور قویC- غیرانبساطی نسبی متمایز هستند.

مثال ۱. فرض کنید$X=l^\infty$ و $\{e_n\}$ معرف پایه استاندارد برایl^∞ باشد. قرار دهید

$$A=\left\{-\frac{1}{n}e_n:n\in\mathbb{N}\right\},\qquad B=\left\{\frac{1}{n}e_{n+1}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

واضح است که $\mathrm{dist}\,(A,B)=0$. نگاشت غیردوری $T:A\cup B\to A\cup B$ را با ضابطه

$$Tx=\begin{cases}-e_1 & x\in A,\\ e_2 & x\in B,\end{cases}$$

در نظر بگیرید. دراین‌صورت به‌ازای $x:=\ -\frac{1}{n}e_n\in A$ و $y:=\frac{1}{k}e_{k+1}\in B$ که در آن $n,k\in\mathbb{N}$ داریم

$$\|x-Ty\|=\left\|-\frac{1}{n}e_n-e_2\right\|=\begin{cases}\frac{3}{2} & n=2,\\ 1 & n\neq 2,\end{cases}\quad,\quad\|Tx-y\|=\left\|-e_1-\frac{1}{k}e_{k+1}\right\|=1,$$

از این‌رو،

$$\|Tx-Ty\|=1=\min\{\|x-Ty\|,\|Tx-y\|\}$$

به این معنا که T به‌طور قویC- غیرانبساطی نسبی است. آن‌چه که مسلم است، T غیرانبساطی نسبی نیست. در واقع به‌عنوان مثال

$$\left\|T\left(-\frac{1}{2}e_2\right)-T\left(\frac{1}{2}e_3\right)\right\|=1>\frac{1}{2}=\left\|-\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3\right\|.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.2.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.229]

در مثال بعد خواهیم دید که اگر T یک نگاشت غیردوری تعریف شده بر زوج ناتهی و محدب (A, B) باشد، آن‌گاه خاصیت T- ساختار شبه نرمال یک‌نواخت در حالت کلی ساختار شبه نرمال یک‌نواخت را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۲. فضای باناخ غیربازتابی $X = l^1$ را با پایه استاندارد $\{e_n\}$ درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$A = \{(1-\lambda)e_1 + 2\lambda e_2 : 0 \le \lambda \le 1\}, \quad B = \{-te_1 : 0 \le t \le 1\}.$$

دراین‌صورت به‌ازای هر $x := (1-\lambda)e_1 + 2\lambda e_2 \in A$ و $y := -te_1 \in B$ که در آن $\lambda, t \in [0,1]$ داریم

$$\|x - y\| = (1-\lambda+t) + 2\lambda = 1 + t + \lambda,$$

از این‌رو، $\mathrm{dist}\,(A,B) = 1$. در ضمن $A_0 = \{e_1\}$ و $B_0 = \{0\}$. نگاشت غیردوری $T : A \cup B \to A \cup B$ را با $Tx = 2e_2$ و $Ty = -e_1$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $(K_1, K_2) \subseteq (A, B)$ یک زوج بسته ، محدب و T–پایا باشد چنان‌که

$$\mathrm{dist}\,(A,B) = \mathrm{dist}\,(K_1,K_2) < \delta(K_1,K_2)\,, \quad \min\{\mathrm{diam}(K_1), \mathrm{diam}(K_2)\} > 0$$

آن‌گاه باید $K_1 = A$ و $K_2 = B$. قرار دهیم $x_1 := e_1$ و $y_1 := 0$. آن‌گاه

$$\delta_{x_1}(K_2) \le \sup_{t\in[0,1]} \|e_1 + te_1\| = 2\,,\ \ \delta_{y_1}(K_1) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \|(1-\lambda)e_1 + 2\lambda e_2\| = 2\,.$$

از طرفی

$$\delta(K_1,K_2) \ge \|2e_2 - (-e_1)\| = 3,$$

پس $\max\left\{\delta_{x_1}(K_2), \delta_{y_1}(K_1)\right\} \le r\,\delta(K_1,K_2)$ که در آن $r \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$. در نتیجه زوج (A, B) دارای T- ساختار شبه‌نرمال یک‌نواخت است. حال ادعا می‌کنیم که (A, B) دارای ساختار شبه نرمال یک‌نواخت نیست. در واقع اگر $K_1 = A$ و $K_2 = \{-te_1 : 0 \le t \le t_0\}$ که در آن $t_0 \in (0,1)$ دلخواه است، اختیار شوند، آن‌گاه $(x_1, y_1) \in K_1 \times K_2$ و داریم

$$\mathrm{dist}\,(K_1,K_2) = 1 < 2 + t_0 = \delta(K_1,K_2).$$

به‌علاوه، $\delta_{x_1}(K_2) = 1 + t_0$ و $\delta_{y_1}(K_1) = 2$. بنابراین $\max\left\{\delta_{x_1}(K_2), \delta_{y_1}(K_1)\right\} = 2$ و از آن‌جا که $t_0 \in (0,1)$ دلخواه است، نتیجه به‌دست می‌آید.

در مثال بعد خواهیم دید که شرط به‌طور یک‌نواخت محدب بودن فضای باناخ X در گزاره ۳ یک شرط کافی است.

مثال۳. فضای باناخ غیربازتابی $X = l^1$ را با پایه استاندارد $\{e_n\}$ درنظر بگیرید. چنان‌که می‌دانیم این فضا اکیداً محدب نیست. فرض کنید

$$A = \overline{\mathrm{con}}\{0, 2e_{2n} : n\in e\}, \quad B = \overline{\mathrm{con}}\{e_1, 2e_1\}.$$

دراین‌صورت (A, B) یک زوج بسته، کراندار و محدب در X است که $\mathrm{dist}\,(A,B) = 1$. در ضمن $A_0=\{0\}$، $B_0 = \{e_1\}$ توجه شود که A نافشرده است و با توجه به خاصیت شور در فضای l^1، A به‌طور ضعیف فشرده نیست. نشان می‌دهیم که زوج (A, B) دارای ساختار شبه نرمال یک‌نواخت است. برای این‌منظور فرض کنید $(K_1, K_2) \subseteq (A, B)$ یک زوج بسته و محدب باشد چنان‌که

$$\mathrm{dist}\,(A,B) = \mathrm{dist}\,(K_1,K_2) < \delta(K_1,K_2)\,, \quad \min\{\mathrm{diam}(K_1), \mathrm{diam}(K_2)\} > 0.$$

پس باید $K_2 = B$ و این‌که $0\,, 2e_{2n_0} \in K_1$ به‌ازای یک $n_0 \in \mathbb{N}$. اکنون به‌ازای $x_1 = 0 \in K_1,\ y_1 = e_1 \in K_2$ داریم

$$\|x_1 - y_1\| = \mathrm{dist}\,(A,B), \quad \delta_{x_1}(K_2) = 2, \quad \delta_{y_1}(K_1) = \|e_1 - 2e_{2n_0}\| = 3.$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.2.9]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.229]

بنابراین

$$\max\left\{\delta_{x_1}(K_2),\delta_{y_1}(K_1)\right\} = 3 < 4 = \left\|2e_{2n_0} - 2e_1\right\| = \delta(K_1,K_2),$$

از این‌رو، زوج (A,B) دارای ساختار شبه نرمال یک‌نواخت است.

در نهایت با ارائه یک مثال به تبیین قضیهٔ ۴ می‌پردازیم.

مثال ۴: فضای باناخ $X=l^1$ را با نرم

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty}|x_j| + \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2} \quad ; \qquad x = \{x_j\} \in l^1 \ ,$$

درنظر بگیرید. از آن‌جا که نرم فضای l^2 اکیداً محدب است، پس l^1 نسبت به نرم فوق اکیداً محدب است. فرض کنید زوج (A,B) و سایر نمادگذاری‌ها مانند آن‌چه که در مثال ۳ تعریف شد، باشد. دراین‌صورت $\mathrm{dist}\,(A,B) = 2$. در ضمن نسبت به این نرم تعریف شده داریم

$$\delta_{x_1}(K_2) = \|2e_1\| = 4, \quad \delta_{y_1}(K_1) = \left\|e_1 - 2e_{2n_0}\right\| = 3+\sqrt{5},$$
$$\delta(K_1,K_2) = \left\|2e_{2n_0} - 2e_1\right\| = 4+2\sqrt{2}\,.$$

بنابراین (A,B) دارای ساختار شبه نرمال یک‌نواخت خواهد بود. حال نگاشت غیردوری $T: A\cup B \to A\cup B$ را با ضابطه

$$Tx = \begin{cases} 2e_{2n+2} & x = 2e_{2n}\,, \\ x & x \neq 2e_{2n}\,, \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که T یک نگاشت به‌طور قوی‌C- غیرانبساطی نسبی است. درواقع اگر $x\in A$ با $x \neq 2e_{2n}$ و $y\in B$ آن‌گاه

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\| = \min\{\|x - Ty\|\,, \|Tx - y\|\}\,.$$

هم‌چنین اگر $x = 2e_{2n}$ آن‌گاه

$$\|Tx - Ty\| = \|2e_{2n+2} - y\| = \min\{\|2e_{2n} - y\|, \|2e_{2n+2} - y\|\}$$
$$= \min\{\|x - Ty\|, \|Tx - y\|\}\,.$$

اکنون از قضیهٔ ۴ وجود بهترین زوج نزدینی برای نگاشت T نتیجه می‌شود که این نقطه $(0,e_1)\in A\times B$ است. شایان ذکر است که این نتیجه از قضیهٔ ۳ حاصل نمی‌شود زیرا که فضای l^1 با نرم تعریف شده غیربازتابی است.

تقدیر و تشکر

این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شمارهٔ ۱۵۶۶۴-۱۶۰۴۹۱ با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه آیت‌ا... العظمی بروجردی انجام شده است.

منابع

1. Gabeleh M., "Semi-normal structure and best proximity pair results in convex metric spaces", Banach J. Math. Anal., 8 (2014) 214-228.
2. Browder F. E., "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space", Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 54 (1965) 1041-1044.
3. Kirk W. A., "A fixed point theorem for mappings which do not increase distances", Amer.

Math. Monthly, 72 (1965) 1004-1006.

4. Brodskii M. S., Milman D. P., "On the center of a convex set", Dokl. Akad. Nauk. USSR 59, (1948) 837-840 (in Russian).
5. Khamsi M. A., Kirk W. A., "An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory", Pure and Applied Mathematics,Wiley-Interscience, New York, USA., (2001).
6. Eldred A. A., Kirk W. A., Veeramani P., "Proximal normal structure and relatively nonexpansive mappings", Studia Math., 171 (2005) 283-293.
7. Zizler V., "On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces", Dissertationes Mat., 87 (1971) 1-33.
8. Garkavi A. L., "On the Chebyshev center of a set in a normed space", Investigations of Contemporary Problems in the Constructive Theory of Functions, Moscow, (1961) 328-331.
9. Abkar A., Gabeleh M., "Proximal quasi-normal structure and a best proximity point theorem", J. Nonlinear Convex Anal., 14 (2013) 653-659.
10. Gabeleh M., Otafudu O. O., "Global Optimization of cyclic Kannan nonexpansive mappings in nonreflexive Banach spaces", Quaestiones Mathmaticae, (40) (2017) 739-751.