

روش کم‌ترین مانده تعمیم یافته پیش شرط سازشده برای حل معادله انتشار-هم رفت کسری

طیبه چراغ‌زاده، مهدی قاسمی، رضا خوش سیر، علیرضا انصاری*

دانشگاه شهرکرد، گروه ریاضی کاربردی، شهرکرد، ایران

پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱

چکیده

در این مقاله معادله انتشار-هم رفت با مشتق مرتبه کسری را در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن یک روش عددی، مشتقات کسری موجود در معادله با استفاده از تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته جای‌گزین می‌شوند. برای بهبود روش عددی ارائه شده، مشتقات جزئی معادله را با روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون کسری گسسته‌سازی می‌کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم این روش به صورت غیرمشروط پایدار است. سپس با معرفی یک ماتریس پیش‌شرط ساز، روش کم‌ترین مانده تعمیم یافته (GMRES) پیش‌شرط ساز شده را برای حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده معرفی خواهیم کرد. در پایان با هدف تأیید نتایج نظری، با ارائه یک مثال روش GMRES پیش‌شرط سازشده را آزمایش می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادله انتشار-هم رفت کسری، کرانک-نیکلسون کسری، گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته، GMRES پیش‌شرط ساز شده.

مقدمه

محاسبات کسری، تعمیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال است که مشتق‌ها و انتگرال‌های در آن از مرتبه دلخواه باشند. به معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی که مشتقات در آن از مرتبه کسری باشند، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری گفته می‌شود. امروزه در بسیاری از علوم، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری کاربردی گسترده یافته است. به عنوان مثال می‌توان به بررسی جریان سیال در یک مایع، الکترومغناطیس و نظایر آن اشاره کرد [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]. هم‌چنین توصیف و مدل‌سازی مسائل فیزیکی، شیمیایی، دستگاه‌های زیست‌محیطی با دقت بالا از دیگر کاربردهای مهم حسابان کسری محسوب می‌شود [۶]، [۷]. در سال‌های اخیر با توجه به کاربردهای بسیار گسترده این‌گونه معادلات، حل آن‌ها اهمیت زیادی دارد. لازم به ذکر است برای حل این‌گونه معادلات همیشه جواب تحلیلی موجود نیست و به همین دلیل از روش‌های عددی برای حل آن‌ها استفاده می‌شود. که درنهایت با حل یک دستگاه معادلات خطی با ابعاد بزرگ و تنک روبرو می‌شویم. به کار گرفتن روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های مذکور، هزینه محاسباتی زیادی را به همراه خواهد داشت. استفاده از روش‌های تکراری کلاسیک نیز برای این‌گونه معادلات که روش ژاکوبی، گاوس-سایدل و فوق تخفیف متوالی نمونه‌ای از آن‌ها هستند، این مشکل را در پی دارد که تعداد تکرارهای الگوریتم افزایش یافته و جواب دقت زیادی ندارد. در راستای مرتفع ساختن این مشکلات روش‌های زیرفضای کرایلوف معرفی شده‌اند. یکی از روش‌های شناخته شده زیرفضای کرایلوف روش تکراری GMRES است که برای حل دستگاه‌های نامتقارن با ابعاد بزرگ و تنک بسیار کارآمد و مفید است. دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را در نظر

می‌گیریم که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ نامنفرد است و مقادیر $b \in \mathbb{R}^n$ و $x \in \mathbb{R}^n$ هستند. چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد [۸]. طبق قضیه کیلی- همیلتون داریم $q(A) = 0$. از نامنفرد بودن A نتیجه می‌گیریم اگر $q(\lambda)$ ، $a_0 = \det(A) \neq 0$ ، از این‌رو:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I)$$

بنابراین اگر x را جواب دقیق دستگاه در نظر بگیریم، داریم:

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \dots + a_1b) \in \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\}$$

تعریف: به‌ازای بردار $b \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، زیرفضای کرایلوف k -بعدی $k_k(A, r_0)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$k_k(A, r_0) = \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت بردارهای زیرفضای کرایلوف مستقل خطی است زیرا:

$$A^{-1}b = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \dots + a_1b) \in \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\}$$

پس هر جواب دستگاه در $\text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\}$ واقع است. از این‌رو، می‌توان نوشت:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j b \neq 0 \quad \forall (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \neq 0$$

نتیجه حاصل شده نشان می‌دهد، زیرفضای کرایلوف مستقل خطی است. برای محاسبه x_k از روش‌های تکراری زیرفضای کرایلوف استفاده می‌کنیم. فرض کنید x_0 یک جواب تقریبی اولیه دستگاه باشد. روش GMRES جواب تقریبی x_k را در زیر فضای $x_0 + k_k(A, r_0)$ به‌گونه‌ای پیدا می‌کند که:

$$\min_{x \in x_0 + k_k(A, r_0)} \|b - Ax\|_2. \quad (1)$$

کمینه شود. بنابراین $x \in x_0 + k_k(A, r_0)$ ، را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$x = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j r_0, \quad (2)$$

و نتیجه گرفت:

$$r = b - Ax_0 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^{j+1} r_0, \quad (3)$$

در گام بعدی چند جمله‌ای $\bar{p}_k(t)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\bar{p}_k(t) = (I - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j t^{j+1}) r_0 \quad \bar{p}_k(0) = 1,$$

سپس نتیجه می‌شود:

$$r = \bar{p}_k(A) r_0,$$

که در آن \bar{p}_k یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه k است به‌طوری‌که $\bar{p}_k(0) = 1$ است. از محاسبات قسمت‌های قبل نتیجه می‌شود:

$$\|r_k\|_2 = \|b - Ax_k\|_2 = \min_{p_k(t) \in P_k} \|p_k(A) r_0\|_2 \leq \|\bar{p}_k(A) r_0\|_2. \quad (4)$$

در آن $\bar{p}_k \in P_k$ و r_k بردار باقی‌مانده تکرار k ام روش GMRES است [۹]. روش GMRES جواب تقریبی x_k را در

زیر فضای $x_0 + k_k(A, r_0)$ به گونه‌ای پیدا می‌کند که مسئله کم‌ترین مربعات خطی (۱) کمینه شود. ابتدا فرض می‌کنیم ماتریس:

$$Q_k = [q_1, q_2, \dots, q_k], \quad (5)$$

که ستون‌های آن به وسیله الگوریتم آرنولد [۱۰] محاسبه شده یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای کرایلوف $k_k(A, r_0)$ باشد. از این رو برای هر بردار $x_k - x_0 \in k_k(A, r_0)$ بردار $y_k \in \mathbb{R}^k$ ای یافت می‌شود که:

$$x_k = x_0 + Q_k y_k, \quad (6)$$

هم‌چنین فرآیند آرنولد رابطه $AQ_k = Q_{k+1}H_{k+1,k}$ را نتیجه می‌دهد. با فرض این که $\beta = \|r_0\|$ و $\xi = (1, 0, \dots, 0)$ داریم:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^k} \|b - A(x_0 + Q_k y_k)\|_2 &= \min_{y \in \mathbb{R}^k} \|r_0 - AQ_k y_k\|_2 \\ &= \min_{y \in \mathbb{R}^k} \|\beta \xi - H_{k+1,k} y_k\|_2. \end{aligned} \quad (7)$$

بر اساس رابطه (۷) مشاهده می‌شود که بردار $y_k \in \mathbb{R}^k$ جواب مسئله کم‌ترین مربعات خطی است. اکنون با استفاده از روش‌های مختلف می‌توان مسئله (۷) را حل کرده و بردار y_k را به دست آورد. در واقع می‌توان گفت سرعت هم‌گرایی روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی تحت تأثیر عدد حالت ماتریس ضرایب است. بنابراین برای تسریع سرعت هم‌گرایی روش‌های زیرفضای کرایلوف می‌توان از ماتریس‌های پیش شرط‌ساز استفاده کرد. ماتریس پیش شرط‌ساز ماتریسی است که دستگاه معادلات خطی را به دستگاه هم‌ارزی تبدیل می‌کند که از عدد حالت کم‌تری نسبت به دستگاه اولیه برخوردار باشد [۱۱]، [۱۲]. در این مقاله معادله انتشار-هم رفت کسری با مشتق مرتبه کسری روی مکان بررسی شد، ابتدا با استفاده از تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته [۱۳]، [۱۴] و سپس با روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون^۳ کسری [۱۵] گسسته‌سازی می‌شود، در ادامه پایداری و سازگاری روش تفاضل متناهی بر پایه تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته بحث شده است، که مشابه روش داده شده در [۱۵] است. در این مقاله از ماتریس پیش شرط‌سازی که رانگ لین و همکارانش برای حل معادله انتشار کسری معرفی کرده‌اند [۱۸]، برای حل معادله انتشار همرفت کسری استفاده می‌کنیم. روش GMRES پیش شرط‌ساز شده، برای حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده مطرح می‌شود [۱۶]. در پایان با هدف تأیید نتایج نظری، با ارائه یک مثال روش GMRES پیش شرط‌ساز شده را آزمایش می‌کنیم و ملاحظه می‌شود که نتایج عددی نشان از کارایی روش GMRES پیش شرط‌ساز شده دارند.

معادله انتشار-هم رفت کسری

معادله انتشار-هم رفت کسری یک بعدی زیر را با شرایط اولیه-مرزی داده شده در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -v(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + d_+(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_+ x^\alpha} + d_-(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_- x^\alpha} \\ \quad + s(x, t), & x_L \leq x \leq x_R, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x_L \leq x \leq x_R, \\ u(x_L, t) = 0, & u(x_R, t) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (8)$$

1. Arnoldi
2. Shifted Grünwald-Letnikov
3. Crank-Nicholson

که در آن $s(x, t)$ منشأ اولیه، $1 < \alpha < 2$ ، $d_{\pm}(x, t) \geq 0$ ضرایب انتشار و $v(x, t) \geq 0$ راندگی از فرایند است و $u(x_R, t)$ ، $u(x_L, t)$ ، $u_0(x)$ به ترتیب شرایط اولیه و مرزی هستند.

مشتق کسری راست و چپ گرانوالد-لتنیکوف از مرتبه α به ترتیب برابرند با:

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial_{-} x^{\alpha}} = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x_R - x}{h} \right]} g_k^{(\alpha)} u(x + kh, t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial_{+} x^{\alpha}} = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x - x_L}{h} \right]} g_k^{(\alpha)} u(x - kh, t), \quad (10)$$

ضرایب گرانوالد-لتنیکوف هستند که بدین صورت تعریف $g_k^{(\alpha)}$ تابع جزء صحیح و $[\cdot]$ طول گام، h که در آن می‌شوند:

$$g_k^{(\alpha)} = \frac{(-1)^k}{k!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1); \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

ضرایب $g_k^{(\alpha)}$ به طور بازگشتی بدین صورت قابل محاسبه هستند:

$$g_0^{(\alpha)} = 1, \quad g_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) g_{k-1}^{(\alpha)}. \quad (12)$$

یک برش مستقیم از روابط (۹) و (۱۰) در یک روش تفاضل متناهی ناپایداری ایجاد می‌کند. به همین دلیل از تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته بدین صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x_n, t_m)}{\partial_{+} x^{\alpha}} = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n+1} g_k^{(\alpha)} u_{n-k+1}^m + O(h), \quad (13)$$

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x_n, t_m)}{\partial_{-} x^{\alpha}} = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{N-n+1} g_k^{(\alpha)} u_{n+k-1}^m + O(h). \quad (14)$$

لم ۱: فرض کنید $1 < \alpha < 2$ و $g_j^{(\alpha)}$ با استفاده از رابطه (۱۱) تعریف شده باشد. در این صورت:

$$g_0^{(\alpha)} = 1, \quad g_1^{(\alpha)} = -\alpha < 0, \quad g_2^{(\alpha)} > g_3^{(\alpha)} > \dots > 0, \quad (\text{الف})$$

$$, n \geq 1 \quad \text{برای} \quad \sum_{j=0}^n g_j^{(\alpha)} < 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(\alpha)} = 0, \quad (\text{ب})$$

$$g_j^{(\alpha)} = O(j^{-(\alpha+1)}) \quad (\text{ج})$$

برهان [۱۳]: با استفاده از $g_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ واضح است که:

$$g_0^{(\alpha)} = 1, \quad g_1^{(\alpha)} = -\alpha. \quad (15)$$

هم چنین با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$g_2^{(\alpha)} > g_3^{(\alpha)} > \dots > 0$$

ضرایب $g_j^{(\alpha)}$ می‌توانند به عنوان ضرایبی از سری توان برای $(1-z)^{\alpha}$ به صورت (۱۶) در نظر گرفته شوند:

$$(1-z)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(\alpha)} z^j. \quad (16)$$

اگر $z = 1$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(\alpha)} = 0. \quad (17)$$

از طرفی:

$$\sum_{j=0}^n g_j^{(\alpha)} < \sum_{j=0}^n g_j^{(\alpha)} + \sum_{j=n+1}^{\infty} g_j^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(\alpha)}. \quad (18)$$

از روابط (۱۷-۱۸) می توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{j=0}^n g_j^{(\alpha)} < 0. \quad (19)$$

(ج) با استفاده از فرمول استرلینگ [۱۹]:

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x},$$

و

$$g_j^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)},$$

داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} &\sim \frac{\sqrt{2\pi(j-1-\alpha)}(j-1-\alpha)^{(j-1-\alpha)} e^{-(j-1-\alpha)}}{\sqrt{2\pi j} j^j e^{-j}} \\ &= e^{\alpha+1} \sqrt{\frac{j-1-\alpha}{j}} \frac{(j-1-\alpha)^{(j-1-\alpha)}}{j^j}, \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$j^{\alpha+1} \frac{(j-1-\alpha)^{(j-1-\alpha)}}{j^j} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right)^j \left(\frac{j}{j-1-\alpha}\right)^{\alpha+1} \rightarrow e^{-\alpha-1},$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \sim j^{-\alpha-1}. \quad (20)$$

بنابراین اثبات کامل می شود.

روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون کسری

بازه $[x_L, x_R]$ را به N زیربازه با طول گام مکانی h و بازه $[0, T]$ را به M زیربازه با طول گام زمانی Δt

افراز می کنیم. بنابراین داریم:

$$h = \frac{x_R - x_L}{N}, \quad x_n = x_L + nh; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

و

$$\Delta t = \frac{T}{M}, \quad t_m = m\Delta t; \quad m = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (22)$$

شبکه عمومی نقاط مذکور را که عبارت است از (x_n, t_m) در نظر می گیریم و معادله دیفرانسیل را در این شبکه نقاط

گسسته می سازیم. برای آسانی کار فرض می کنیم:

$$u_n^{(m)} = u(x_n, t_m), \quad d_{\pm, n}^{(m)} = d_{\pm}(x_n, t_m), \quad (23)$$

$$s_n^{(m+1/2)} = s(x_n, (t_m + t_{m+1})/2), \quad v_n^{(m)} = v(x_n, t_m). \quad (24)$$

برای گسسته سازی مشتقات جزئی $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ به ترتیب از تقریب تفاضل پس رو نسبت به مکان و تقریب تفاضل

مرکزی با گام زمانی $\frac{\Delta t}{2}$ نسبت به زمان استفاده می‌کنیم، یعنی:

$$\frac{\partial u(x_n, t_m)}{\partial x} = \frac{u_n^{(m)} - u_{n-1}^{(m)}}{h} + O(h), \tag{25}$$

$$\frac{\partial u(x_n, t_{m+1/2})}{\partial t} = \frac{u_n^{(m+1)} - u_n^{(m)}}{\Delta t} + O(\Delta t)^2. \tag{26}$$

برای معادله (۸) شکل کلی معادله تفاضل متناهی بدین صورت است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{(x_n, t_{m+1/2})} &= \frac{1}{2} \left[-v(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + d_+(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_+ x^\alpha} + d_-(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_- x^\alpha} \right]_{(x_n, t_m)} \\ &+ \frac{1}{2} \left[-v(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + d_+(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_+ x^\alpha} + d_-(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_- x^\alpha} \right]_{(x_n, t_{m+1})} \\ &+ s(x, t) \Big|_{(x_n, t_{m+1/2})}. \end{aligned} \tag{27}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۲۷-۲۶-۲۵) و (۱۳-۱۲) و صرف نظر کردن از خطای برشی معادله تفاضلی حاصل

بدین صورت است:

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{(m+1)} - u_n^{(m)}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[-\frac{v_n^{(m+1)}}{h} u_{n-1}^{(m+1)} + \frac{v_n^{(m+1)}}{h} u_n^{(m+1)} - \frac{d_{+,n}^{(m+1)}}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{n+1} g_j^{(\alpha)} u_{n-j+1}^{(m+1)} - \frac{d_{-,n}^{(m+1)}}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-n+1} g_j^{(\alpha)} u_{n+j-1}^{(m+1)} \right] = \\ -\frac{1}{2} \left[-\frac{v_n^{(m)}}{h} u_{n-1}^{(m)} + \frac{v_n^{(m)}}{h} u_n^{(m)} - \frac{d_{+,n}^{(m)}}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{n+1} g_j^{(\alpha)} u_{n-j+1}^{(m)} - \frac{d_{-,n}^{(m)}}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-n+1} g_j^{(\alpha)} u_{n+j-1}^{(m)} \right] + s_n^{(m+1/2)}. \end{aligned} \tag{28}$$

اگر

$$u^{(m)} = (u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \dots, u_{N-1}^{(m)})^T, \quad s_n^{(m+1/2)} = (s_1^{(m+1/2)}, s_2^{(m+1/2)}, \dots, s_{N-1}^{(m+1/2)})^T, \tag{29}$$

و $D_L^{(m)}$ و $D_R^{(m)}$ ماتریس‌هایی قطری باشند:

$$D_L^{(m)} = \text{diag}(d_{+,1}^{(m)}, d_{+,2}^{(m)}, \dots, d_{+,N-1}^{(m)}), \quad D_R^{(m)} = \text{diag}(d_{-,1}^{(m)}, d_{-,2}^{(m)}, \dots, d_{-,N-1}^{(m)}).$$

همچنین I ماتریسی واحد از مرتبه N-1، و $R^{(m)}$ و G_α به ترتیب ماتریس‌های دو قطری پایین و تاپ‌لیتر بدین صورت

باشند [۲۰]، [۲۱].

$$R^{(m)} = \begin{bmatrix} v_1^{(m)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -v_2^{(m)} & v_2^{(m)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -v_3^{(m)} & v_3^{(m)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -v_{N-1}^{(m)} & v_{N-1}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad G_\alpha = \begin{bmatrix} g_1^{(\alpha)} & g_0^{(\alpha)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2^{(\alpha)} & g_1^{(\alpha)} & g_0^{(\alpha)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & g_2^{(\alpha)} & g_1^{(\alpha)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ g_{N-2}^{(\alpha)} & \ddots & \ddots & \ddots & g_1^{(\alpha)} & g_0^{(\alpha)} \\ g_{N-1}^{(\alpha)} & g_{N-2}^{(\alpha)} & \dots & \dots & g_2^{(\alpha)} & g_1^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

رابطه (۲۸) را می‌توان به صورت ماتریسی (۳۰) نوشت:

$$\left[I + \frac{1}{2} A^{(m+1)} \right] u^{(m+1)} = b^{(m+1)}, \quad (30)$$

که در آن

$$A^{(m+1)} = \left(\frac{\Delta t}{h} R^{(m+1)} - \frac{\Delta t}{h^\alpha} (D_L^{(m+1)} G_\alpha + D_R^{(m+1)} G_\alpha^T) \right), \quad (31)$$

و

$$b^{(m+1)} = \left(I - \frac{1}{2} A^{(m)} \right) u^{(m)} + \Delta t s^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (32)$$

است. درایه‌های ماتریس $A^{(m+1)}$ برای $i, j = 1, 2, \dots, N-1$ به صورت (۳۳) تعریف می‌شوند:

$$a_{i,j}^{(m+1)} = \begin{cases} r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} - \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(\alpha)}; & j = i, \\ -r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} g_2^{(\alpha)} - \eta_i^{(m+1)} g_0^{(\alpha)}); & j = i-1, \\ -\xi_i^{(m+1)} g_0^{(\alpha)} - \eta_i^{(m+1)} g_2^{(\alpha)}; & j = i+1, \\ -\xi_i^{(m+1)} g_{i-j+1}^{(\alpha)}; & j < i-1, \\ -\eta_i^{(m+1)} g_{j-i+1}^{(\alpha)}; & j > i+1. \end{cases} \quad (33)$$

که در آن می‌یابیم:

$$\eta_i^{(m+1)} = \frac{d_{-i}^{(m+1)} \Delta t}{h^\alpha}, \quad \xi_i^{(m+1)} = \frac{d_{+i}^{(m+1)} \Delta t}{h^\alpha}, \quad r_i^{(m+1)} = \frac{v_i^{(m+1)} \Delta t}{h},$$

واضح است که برای $i \neq j$ ، $a_{i,j}^{(m+1)} \leq 0$. با استفاده از لم ۱ و رابطه (۳۳) خواهیم داشت [۲۲]:

$$\begin{aligned} & a_{i,i}^{(m+1)} - \sum_{j=0, j \neq i}^{N-1} |a_{i,j}^{(m+1)}| \\ &= r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(\alpha)} - (r_i^{(m+1)} + \xi_i^{(m+1)} \sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} + \eta_i^{(m+1)} \sum_{k=1}^{N-i+1} g_k^{(\alpha)}) \\ &> r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(\alpha)} - r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha)} \\ &= r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(\alpha)} - r_i^{(m+1)} + (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(\alpha)} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود ماتریس ضرایب دستگاه (۳۰) یک ماتریس قطر غالب سطری اکید است. از این رو ماتریس معکوس‌پذیر و دستگاه (۳۰) جواب یکتا دارد.

تحلیل پایداری

در این بخش قضیه‌ای را در راستای پایداری معادله انتشار-هم رفت کسری مطرح و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱: روش تفاضل متناهی (۳۰) بر پایه تعاریف گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته به صورت غیرمشروط پایدار است. **برهان:** فرض می‌کنیم λ یک مقدار ویژه ماتریس A و $V = (v_1, v_2, \dots, v_{N-1})$ بردار ویژه متناظر با آن باشد. اگر

$$|v_k| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |v_i| \text{ فرض شود آن‌گاه:}$$

$$\lambda - a_{kk} = \sum_{j=0, j \neq k}^{N-1} a_{kj} V_j / V_k \quad (35)$$

با گرفتن قدر مطلق از رابطه (۳۵) داریم:

$$|\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{j=0, j \neq k}^{N-1} a_{kj} v_j / v_k \right| \quad \underbrace{|v_j / v_k| \leq 1} \quad |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=0, j \neq k}^{N-1} |a_{kj}|$$

از این‌رو:

$$\sum_{j=0, j \neq k}^{N-1} |a_{kj}| \leq r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(a)}, \quad (36)$$

از محاسبه‌های قسمت‌های قبل نتیجه می‌شود:

$$0 \leq \lambda \leq 2(r_i^{(m+1)} - (\xi_i^{(m+1)} + \eta_i^{(m+1)}) g_1^{(a)}),$$

با توجه به این‌که $g_1^{(a)} < 0$ است، نتیجه می‌گیریم $(1 - \lambda/2) < 1$. بنابراین $(1 - \lambda/2)(1 + \lambda/2)^{-1} < 1$. از این‌رو،

شعاع طیفی $\left(I + \frac{A}{2}\right)^{-1} \left(I - \frac{A}{2}\right)$ کم‌تر از یک است در نتیجه روش تفاضل متناهی (۳۰) به صورت غیرمشروط پایدار است.

تبصره: می‌دانیم روش سازگار است اگر هریک از روابط (۱۴ - ۱۳) و (۲۶ - ۲۵)، سازگار باشد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت این روش سازگار با یک خطای برشی موضعی $O(h + (\Delta t)^2)$ به ازای هر h و Δt دلخواه است. بنابراین بر اساس نظریه هم‌ارزی لکس [۲۳] نتیجه می‌شود روش تفاضل متناهی (۳۰) همگرا است.

ماتریس پیش شرط ساز

در این بخش هدف معرفی ماتریس پیش شرط‌سازی است که رانگ لین و همکارانش معرفی کرده‌اند [۱۸]. برای رسیدن به این هدف ویژگی‌هایی از ماتریس G_α را مطرح و اثبات می‌کنیم.

تعریف [۹]: ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

L -ماتریس گفته می‌شود اگر به‌ازای $i = 1, 2, \dots, n$ رابطه $a_{ii} > 0$ و به‌ازای $i \neq j$ رابطه $a_{ij} \leq 0$ برقرار باشد، M -ماتریس گفته می‌شود اگر L -ماتریسی نامنفرد با $A^{-1} \geq 0$ باشد.

لم ۲: ماتریس $-G_\alpha$ یک M -ماتریس است.

برهان: فرض کنید $E = -G_\alpha$. به‌وضوح ماتریس E را می‌توان به‌صورت (۳۹) نوشت:

$$E = D - (D - E) = D(I - (I - D^{-1}E)), \quad (39)$$

$$B = I - D^{-1}E,$$

که در آن D بخش قطری ماتریس $-G_\alpha$ است. با توجه به این‌که:

$$(I - D^{-1}E)x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad (D - E)x = \lambda Dx, \quad (40)$$

از این‌رو،

$$\lambda g_1^{(a)} x_i = g_1^{(a)} x_i - \sum_{j=0}^{N-1} g_j^{(a)} x_j; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (41)$$

بنابراین:

$$\left| - \sum_{j=0, j \neq i}^{N-1} g_j^{(a)} x_j \right| = \left| \lambda g_1^{(a)} x_i \right|, \quad (42)$$

$$|\lambda| \left| \mathbf{g}_1^{(\alpha)} \right|_{X_j} \leq \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-1} \left| \mathbf{g}_j^{(\alpha)} \right|_{X_j} \Rightarrow |\lambda| \leq \frac{\sum_{j=0, j \neq 1}^{N-1} \left| \mathbf{g}_j^{(\alpha)} \right|}{\left| \mathbf{g}_1^{(\alpha)} \right|}, \quad (۴۳)$$

از لم ۱ خواهیم داشت:

$$\left| \mathbf{g}_1^{(\alpha)} \right| > \sum_{j=0, j \neq 1}^n \mathbf{g}_j^{(\alpha)}$$

بنابراین E یک ماتریس قطری غالب سطری اکید است. نتیجه می شود $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}) < 1$ یا $\rho(\mathbf{B}) < 1$ داریم:

$$\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{I} - \mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}, \quad (۴۴)$$

$$(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}^i \geq 0, \quad (۴۵)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} \geq 0. \quad (۴۶)$$

رابطه (۴۶) نشان می دهد:

$$\mathbf{E}^{-1} = -\mathbf{G}_\alpha \geq 0. \quad (۴۷)$$

از این که $[-\mathbf{G}_\alpha]$ یک L-ماتریس و $[-\mathbf{G}_\alpha]^{-1} \geq 0$ است، نتیجه می گیریم که یک M-ماتریس است. با در نظر داشتن اینکه ماتریس قطری یک انتخاب مناسب برای M-ماتریس ها است [۲۴]، برای به دست آوردن یک ماتریس پیش شرط ساز، \mathbf{G}_α را به صورت (۴۸) تجزیه می کنیم [۱۸]:

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{G}_{\alpha,k} + (\mathbf{G}_\alpha - \mathbf{G}_{\alpha,k}), \quad (۴۸)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{G}_{\alpha,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{(\alpha)} & \mathbf{g}_0^{(\alpha)} & & & \\ \vdots & \mathbf{g}_1^{(\alpha)} & \mathbf{g}_0^{(\alpha)} & & \\ \mathbf{g}_k^{(\alpha)} & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \mathbf{g}_0^{(\alpha)} \\ & & & & \mathbf{g}_k^{(\alpha)} \dots \mathbf{g}_1^{(\alpha)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{g}_{k+1}^{(\alpha)} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sum_{j=k+1}^{N-1} \mathbf{g}_j^{(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{G}_{\alpha,k}$ مجموعی از یک ماتریس با پهنای نوار $k+1$ شامل قطره های مرکزی از \mathbf{G}_α و یک ماتریس قطری است. به طور مشابه می توان نشان داد [۱۸]:

الف) $-\mathbf{G}_{\alpha,k}$ یک M-ماتریس است.

ب) $\mathbf{G}_{\alpha,k}$ یک ماتریس قطری غالب سطری اکید است.

ج) از $\mathbf{g}_k^{(\alpha)} = O(k^{-(\alpha+1)})$ می توان نتیجه گرفت:

$$\|\mathbf{G}_\alpha - \mathbf{G}_{\alpha,k}\|_\infty = O(k^{-\alpha}).$$

بنابراین ماتریس $\mathbf{A}^{(m+1)}$ را می توان به دو بخش زیر تجزیه کرد:

$$\mathbf{A}^{(m+1)} = \mathbf{A}_k^{(m+1)} + \mathbf{B}_k^{(m+1)}, \quad (۴۹)$$

که در آن می یابیم:

$$\mathbf{A}_k^{(m+1)} = \left(\frac{\Delta t}{h} \mathbf{R}^{(m+1)} - \frac{\Delta t}{h^\alpha} (\mathbf{D}_L^{(m+1)} \mathbf{G}_{\alpha,k} + \mathbf{D}_R^{(m+1)} \mathbf{G}_{\alpha,k}^T) \right), \quad \mathbf{B}_k^{(m+1)} = \mathbf{A}^{(m+1)} - \mathbf{A}_k^{(m+1)}. \quad (۵۰)$$

اگر ماتریس $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_k^{(m+1)})$ تقریبی از ماتریس $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(m+1)})$ باشد. خطای نسبی آن عبارت است از:

$$\frac{\|(I - A^{(m+1)}) - (I - A_k^{(m+1)})\|_\infty}{\|(I - A^{(m+1)})\|_\infty} \leq \frac{\frac{\Delta t}{2h^\alpha} \|D_L^{(m+1)}(G_\alpha - G_{\alpha,k}) + D_R^{(m+1)}(G_\alpha - G_{\alpha,k})^T\|_\infty}{\frac{\Delta t}{2h^\alpha} \|D_L^{(m+1)}G_\alpha + D_R^{(m+1)}G_\alpha^T\|_\infty} = O(k^{-\alpha}).$$

مشاهده می‌شود خطای نسبی بین $(I - A^{(m+1)})$ و $(I - A_k^{(m+1)})$ ، وقتی k به اندازه کافی بزرگ باشد، خیلی کوچک است. بنابراین $P_k^{(m+1)} = (I - A_k^{(m+1)})$ را می‌توان به‌عنوان یک ماتریس پیش‌شرط ساز کارا در نظر گرفت.

روش GMRES پیش‌شرط ساز شده

در سال ۱۹۸۶ روش GMRES به‌وسیلهٔ سعد و شولتز^۱ به‌عنوان یکی از روش‌های زیرفضای کرایلوف ارائه شد [۲۵]. چنان‌که گفته شد سرعت همگرایی روش‌های تکراری به عدد حالت ماتریس ضرایب یعنی $C^{(m+1)} = (I - A^{(m+1)})$ بستگی دارد. اگر $C^{(m+1)}$ بد وضع باشد، ممکن است سرعت همگرایی روش کند بوده، از این‌رو، برای افزایش سرعت همگرایی روش‌های زیرفضای کرایلوف می‌توان از روش‌های پیش‌شرط سازی استفاده کرد این امر باعث افزایش سرعت همگرایی خواهد شد. دستگاه معادلات خطی با استفاده از روش‌های پیش‌شرط سازی به دستگاه‌های پیش‌شرط ساز شده تبدیل می‌شوند. روش‌های متفاوتی برای پیش‌شرط سازی این دستگاه‌ها وجود دارد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان بدین‌صورت اشاره کرد که به‌ترتیب پیش‌شرط سازی از راست، دوطرفه و چپ نامیده می‌شود بنابراین به‌جای حل دستگاه معادلات (۳۱) یکی از سه دستگاه هم ارز زیر را حل می‌کنیم:

$$C^{(m+1)}(P_k^{(m+1)})^{-1}v^{(m+1)} = b^{(m+1)}, \quad u^{(m+1)} = (P_k^{(m+1)})^{-1}v^{(m+1)}, \quad (51)$$

$$(P_k^{(m+1)})_L^{-1}C^{(m+1)}(P_k^{(m+1)})_R^{-1}v^{(m+1)} = b^{(m+1)}, \quad u^{(m+1)} = (P_k^{(m+1)})_R^{-1}v^{(m+1)}. \quad (52)$$

$$(P_k^{(m+1)})^{-1}C^{(m+1)}u^{(m+1)} = (P_k^{(m+1)})^{-1}b^{(m+1)}. \quad (53)$$

باید توجه داشت که نیازی به محاسبهٔ ماتریس $(P_k^{(m+1)})^{-1}C^{(m+1)}$ ، نیست. کافی است $(P_k^{(m+1)})x^{(m+1)} = r^{(m+1)}$ را حل کنیم. اکنون از روش GMRES برای حل دستگاه (۵۳) استفاده می‌کنیم. الگوریتم این روش برای یافتن این جواب بدین‌صورت خواهد بود [۱۶]:

الگوریتم روش GMRES پیش‌شرط ساز شده

1. $u^{(m+1)} = u_0$
2. compute $r_0 = p_k^{(m+1)}(b^{(m+1)} - C^{(m+1)}u^{(m+1)})$, $\beta = \|r_0\|_2$, and $q_1 = \frac{r_0}{\beta}$
3. For $j=1, 2, \dots, k$
4. $q_j = (p_k^{(m+1)})^{-1}C^{(m+1)}q_j$
5. For $i=1:j$
6. $h_{ij} = q_i^T q_{j+1}$
7. $q_{j+1} = q_{j+1} - hq_i$
8. end
9. $h_{ij} = \|q_{j+1}\|_2$
10. $q_{j+1} = \frac{q_{j+1}}{h_{j,j+1}}$

11. end
12. Define the $(k+1) \times k$ Hessenberg Matrix $H_{k+1,k} \{h_{ij}\}$ and $Q_{k+1} = [Q_k, q_{k+1}]$
13. Compute y_k , the minimizer of $\|\beta e_1 - H_{k+1,k} y\|_2$, and $u^{(m+1)} = u_0^{(m)} + Q_k y_k$

نتایج عددی

برای اثبات کارایی روش GMRES پیش شرط ساز شده، این روش را برای معادله انتشار-هم رفت کسری بدین صورت به کار می‌بریم.

مثال ۱: معادله انتشار-هم رفت کسری (۸) را با $\alpha = 1.8$ و ضرایب انتشار چپ و راست:

$$d_+(x, t) = \Gamma(1.2)x^{1.8}, \quad d_-(x, t) = \Gamma(1.2)x^{1.8},$$

در بازه مکانی $(x_L, x_R) = (0, 2)$ و بازه زمانی $[0, T] = [0, 1]$ ، با منشأ اولیه، راندگی از فرایند و شرط اولیه بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} s(x, t) &= -32e^{-t}[x^2 + (2-x)^2 + 0.125x^2(2-x)^2, \\ &\quad -2.5(x^3 + (2-x)^3) + \frac{25}{22}(x^4 + (2-x)^4)], \\ v(x, t) &= 0.25x, \\ u_0(x) &= 4x^2(2-x)^2. \end{aligned}$$

جواب دقیق این معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = 4e^{-t}x^2(2-x)^2.$$

نتایج با استفاده از MATLABR2010a روی لپ‌تاپ msi با مشخصات core(TM)i3-4000 M CPU, 2.40 GHz, 4.00 RAM به دست آمده است. دستگاه حاصل را به‌ازای مقادیر مختلف M و N روش GMRES و پیش شرط ساز شده آن حل کرده و به نتایج مطلوب که در جدول ۱، ۲ و ۳ درج شده است، دست یافته‌ایم. در جدول ۱ میانگین تعداد تکرارها و بیشینه خطای بین جواب‌های دقیق و عددی به دست آمده در آخرین گام نشان داده شده است. در جدول ۲ زمان محاسبات و در جدول ۳ عدد حالت ماتریس ضرایب دستگاه (۳۰) و (۵۳) نشان داده شده است. بردار اولیه را بردار صفر و شرط توقف را $\|r_k\| \leq 10^{-6}$ فرض کرده‌ایم. هم‌چنین در شکل ۱ و ۲ نمودار منحنی نمایش همگرایی GMRES و PGMRES به‌ازای $N = 2^6$ و $M = 2^5$ نشان داده شده است.

جدول ۱. میانگین تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی معادله انتشار-هم رفت کسری

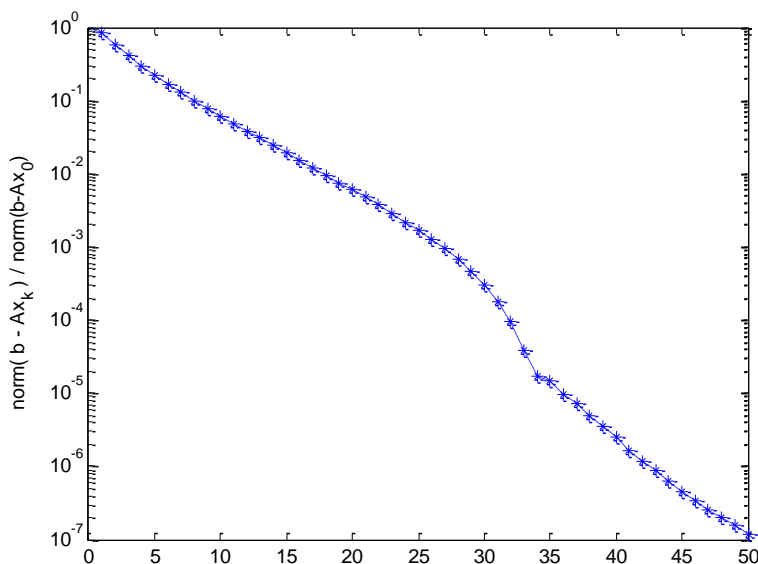
N	M	GMRES	PGMRES	Error
۲ ^۴	۲ ^۳	۱۵	۳	۴/۲۸۱۸e-۴
۲ ^۵	۲ ^۴	۲۸/۳۳	۳	۱/۶۶۱۹e-۵
۲ ^۶	۲ ^۵	۴۳/۸۴	۴	۱/۲۵۰۵e-۵
۲ ^۷	۲ ^۶	۶۸/۳	۴/۱۱	۱/۱۹۰۶e-۵

جدول ۲. زمان لازم برای همگرایی معادله انتشار-هم رفت کسری

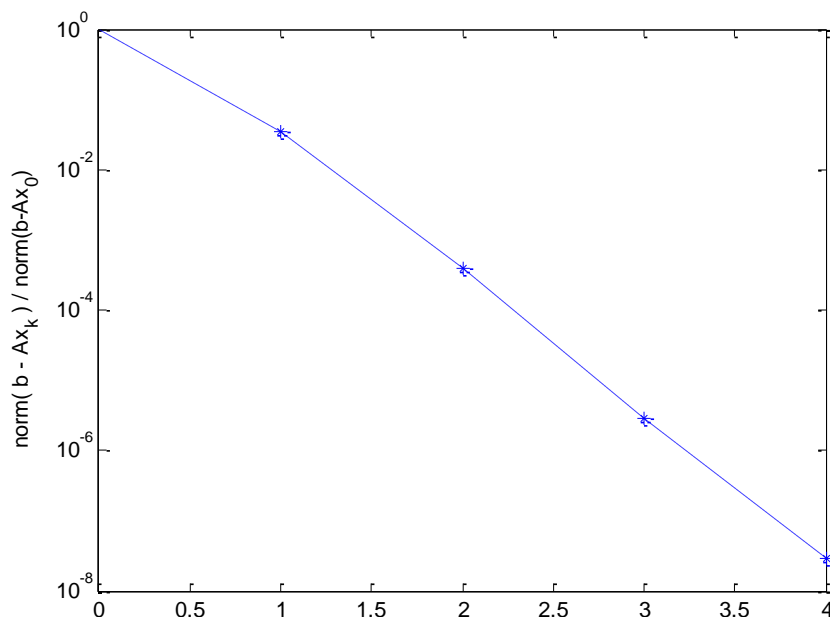
N	M	GMRES	PGMRES
۲۴	۲۳	۰/۲۲	۰/۰۱۸
۲۵	۲۴	۱/۲۳	۰/۰۸۲
۲۶	۲۵	۱/۲۶	۰/۶۹
۲۷	۲۶	۱۶/۹۸	۱۰/۸۲

جدول ۳. عدد حالت ماتریس ضرایب برای معادله انتشار-هم رفت کسری

N	M	$\kappa(A^{(1)})$	$\kappa((P_k^{(1)})^{-1}A^{(1)})$
۲۴	۲۳	۱۷/۲۴۲۲	۱/۰۱۴۷
۲۵	۲۴	۳۷/۱۹۴۳	۱/۰۴۲۹
۲۶	۲۵	۷۳/۸۰۶۲	۱/۰۷۲۸
۲۷	۲۶	۱۳۸/۸۰۶۴	۱/۱۰۱۷



شکل ۱. نمودار همگرایی روش GMRES به ازای $N = ۲۶$ و $M = ۲۵$



شکل ۲. نمودار همگرایی روش PGMRES به ازای $N = ۲^۶$ و $M = ۲^۵$.

نتیجه گیری

در این مقاله معادله انتشار-هم رفت کسری بررسی شد. برای حل عددی آن از تعاریف گرناوالد-لتنیکوف انتقال یافته و روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون کسری استفاده کردیم، سپس روش GMRES برای حل معادله جبری به دست آمده مطرح شد. جدول‌های مربوط به مثال بالا، نتیجه می‌دهند که روش GMRES پیش شرط ساز شده برای حل دستگاه‌های نامتقارن کارا و مفید است، همچنین نتایج عددی نشان می‌دهند که استفاده از پیش شرط ساز باعث شده عدد حالت ماتریس ضرایب کوچک‌تر و در نتیجه تعداد تکرارها و زمان محاسبات کاهش یافته و سرعت همگرایی افزایش پیدا کند.

منابع

1. Shlesinger M. F., West B. J., Klafter J., "Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence", Phys. Rev. Lett., 58 (1987) 1100-1103.
2. Zaslavsky G. M., Stevens D., Weitzner H., "Self-similar transport in incomplete chaos", Phys. Rev. E, 48 (1993) 1683-1694.
3. Benson D., Wheatcraft S. W., Meerschaert M. M., "Application of a fractional advection-dispersion equation", Water Resour. Res., 36 (2000) 1403-1413.
4. Benson D., Wheatcraft S.W., Meerschaert M.M., "The fractional-order governing equation of Lévy motion", Water Resour. Res., 36 (2000) 1413-1423.
5. Schumer R., Benson D. A., Meerschaert M.M., Meerschaert B. B., " Multiscaling fractional advection-dispersion equations and their solutions", Water Resour. Res., 39 (2003) 1022-1032.

6. Chaves A., "Fractional diffusion equation to describe Lévy flights", *Phys. Lett. A*, 239 (1998) 13-16.
7. Klafter J., Blumen A., Shlesinger M.F., "Stochastic pathways to anomalous diffusion", *Phys. Rev. A*, 35 (1987) 3081-3085.
۸. خجسته سالکویه داود، "روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی"، انتشارات موج چهارم (۱۳۹۴).
۹. حجاریان مسعود، "نخستین درس در جبر خطی عددی"، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی (۱۳۹۴).
10. Bai Z.-Z., "Motivations and realizations of Krylov subspace methods for large sparse linear systems", *J. Comput. Appl. Math.*, 283 (2015) 71-78.
11. Broyden C. G., Vespucchi M. T., "Krylov Solvers for Linear Algebraic Systems", San Diego, ELSEVIER Inc (2004).
12. Chen K., "Matrix Preconditioning Techniques and Applications", Cambridge University Press (2005).
13. Meerschaert M. M., Tadjeran C., "Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 172 (2004) 65-77.
14. Meerschaert M. M., Tadjeran C., "Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations", *Appl. Numer. Math.*, 56 (2006) 80-90.
15. Su L., Wang W., Yang Z., "Finite difference approximations for the fractional advection-diffusion equation", *Phys. Lett. A*, 373 (2009) 4405-4408.
16. Y. Saad, "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", SIAM, Philadelphia (2003).
17. Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, New York (1999).
18. Lin F.-R., Yang S.-W., Jin X.-Q., "Preconditioned iterative methods for fractional diffusion equation", *J. Comput. Phys.* 256 (2014) 109-117.
19. Wrench J. W. Jr., "Concerning Two Series for the Gamma Function", *Math. Comput.*, 22 (1968) 617-626.
20. Chandrasekeran S., Gu M., Sun X., Xia J., Zhu J., "A superfast algorithm for Toeplitz systems of linear equations", *SIAM J. Matrix Anal. & Appl.*, 29 (4) (2007) 1247-1266.
21. Golub G.H., Van Loan C. F., "Matrix Computations", third ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London (1996).
22. Wang H., Wang K., Sircar T., "A direct $O(N \log^2 N)$ finite difference method for fractional diffusion equations", *J. Comput. Phys.*, 229 (2010) 8095-8104.
23. Lax P.D., Richtmyer R. D., "Survey of the stability of linear finite difference equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 (1956) 267-293.
24. Axelsson O., "Iterative Solution Methods", Cambridge University Press, (1996).
25. Saad Y., Schultz M. H., "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7 (3) (1986) 856-869.