

## روش برون‌یابی برای حل عددی یک مدل بیماری‌های عفونی بومی

بهمن بابایار رازلیقی؛ دانشگاه صنعتی قم، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱

### چکیده

در این مقاله یک مدل بیماری عفونی را که به شکل دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیرخطی است در نظر می‌گیریم. این مدل از نوع مدل  $SIR$  است. روش برون‌یابی به‌سوی حد ریچاردسون را برای حل این سیستم طوری طراحی می‌کنیم که با یک فرایند تکرار، سیستم غیرخطی با درجه دقت خوب قابل حل باشد. الگوریتم حل چنین سیستم‌هایی به‌طور کامل تشریح می‌شود. این الگوریتم دارای نوعی ساختار تو در تو است که باعث می‌شود از اطلاعات پیشین در زمان‌های بعدی بتوان استفاده کرد و همین امر برنامه‌نویسی این الگوریتم را جالب کرده است. این الگوریتم با هر زبان سطح بالا قابل برنامه‌نویسی است، که ما این فرآیند را با زبان برنامه‌نویسی  $Mathematica$  انجام داده‌ایم. تحلیل خطا هم از دیدگاه تئوری آنالیز عددی و هم با استفاده از چند مثال نمونه به‌طور شفاف نشان داده شده است، برای این منظور طیفی از نمونه مسائلی را با استفاده از تبدیلات لاپلاس طراحی کردیم که جواب تحلیلی داشته باشند.

**واژه‌های کلیدی:** روش برون‌یابی، بیماری‌های عفونی، کلاس مستعد، کلاس عفونت‌زده، کلاس مصون، دستگاه انتگرالی ولترای غیر خطی.

### مقدمه

بسیاری از بیماری‌های عفونی در یک جمعیت بومی هستند، یعنی برای چندین سال موجودیت خود را حفظ می‌کنند. فرض کنید اندازه جمعیت ثابت است و جمعیت یک‌نواخت و به‌طور همگن توزیع شده است. جمعیت بررسی شده به چندین کلاس تقسیم‌بندی می‌شود، که با زمان تغییر می‌کند و این کلاس‌ها عبارتند از: کلاس  $S(t)$  شامل آن‌هایی که آلودگی در آن‌ها می‌تواند شروع شود، کلاس  $I(t)$  آن‌هایی هستند که آلوده شده‌اند و کلاس  $R(t)$  آن‌هایی هستند که مصونیت دائمی یافته‌اند. این مدل، مدل  $SIR$  نامیده می‌شود و به‌وسیله دستگاه معادلات انتگرالی ولترای نوع دوم غیرخطی زیر قابل نمایش است [۱].

$$\begin{cases} I(t) = I_0(t)e^{-\mu t} + \int_0^t \beta S(\tau)I(\tau)P(t-\tau)e^{-\mu(t-\tau)} d\tau, \\ R(t) = [R_0 + I_0(0) - I_0(t) - \varphi]e^{-\mu t} + \varphi + \int_0^t S(\tau) [\beta I(\tau)(1 - P(t-\tau)) + \theta] e^{-\mu(t-\tau)} d\tau, (1) \\ S(t) + I(t) + R(t) = 1, \quad t > 0. \end{cases}$$

در این جا  $S, I, R$  توابع مجهول هستند. عدد ثابت نرخ تماس  $\beta$  میانگین تماس‌های یک آلوده کننده در واحد زمان است. بنابراین افراد در معرض آلودگی با نرخ برابر  $\beta S$  به لیست افراد آلوده اضافه می‌شوند.  $P(t)$  احتمال پا

برجا بودن شیوع بیماری،  $t$  واحد زمان پس از شروع شیوع بیماری است. به علاوه  $P(t)$  یک تابع ناصعودی با  $P(0)=1$  و  $P(\infty)=0$  است که تحت تسلط یک تابع نمایی میرا است. این شرایط  $P(t)$  های متفاوتی را به دست می‌دهد مثلاً دوره‌های شیوع ثابت (یک تابع ناصعودی تکه تکه پیوسته و ثابت در هر بازه پیوستگی)، دوره‌های شیوع نمایی، هم‌چنین دوره‌های شیوع با توزیع‌های گاما (به‌عنوان مثال توزیع‌های گاما از فصل ۶ [۲] را ملاحظه کنید). نسبت اولیه مصون از آلودگی، به صورت  $R_0 \geq 0$  بوده است و  $I_0(t)e^{-\mu t}$  کسری از جامعه هستند که از اول عفونی بوده است و هنوز هم در لحظه  $t$  از شیوع بیماری زنده‌اند.  $I_0(t)$  یک تابع ناصعودی معلوم با  $I_0(0) > 0$  و  $I_0(t) \leq I_0(0)P(t)$  است و از این رو،  $I_0(t)$  به سمت صفر میل می‌کند وقتی که  $t \rightarrow \infty$ . ایمن‌سازی فعال در مدل بدین معنی است که واکسن یا توکسوئید (شبه سم) وارد مدل شده است و کسر  $\phi$  از نوزادان ایمن شده‌اند، بنابراین میزان شارش (فلوی) نوزادان ایمن شده به کلاس مصون یافته، برابر  $\phi\mu$  است. ایمن‌سازی کلاس در معرض آلودگی، با نرخ  $\theta S(t)$  انجام می‌گیرد. این ایمن‌سازی با یک ایمن‌سازی عمومی برای افراد در معرض آلودگی، با هر سنی مطابقت دارد.

مدل‌سازی، وجود، یکتایی، و تحلیل پایداری دستگاه معادلات ولترای (۱) به وسیله برخی از نویسندگان بررسی شده است [۱]، [۳]، [۴]. در این مقاله الگوریتمی ارائه می‌شود که ابتدا جواب سیستم غیرخطی (۱) به وسیله روش دوزنقه‌ای مرکب برآورد اولیه شده، سپس این برآورد خام به وسیله برون‌یابی رامبرگ دقیق‌تر می‌شود. این فرایند طوری طراحی شده است که سیستم کوپل شده (۱) را تحت تسلط خود قرار دهد.

روش‌های زیادی برای حل سیستم‌های ولترا ارائه شده است، که بسته به خطی و غیرخطی بودن و هم‌چنین تکین یا غیرتکین بودن معادلات متفاوت است. به‌عنوان مثال روش انتگرال‌گیری ضربی [۵]–[۹]، روش موجک‌ها [۱۰]، [۱۱]، روش‌های هم‌محلی [۱۲]، [۱۳]، [۱۴] و... با توجه به ساختار مسئله متفاوتند. با توجه به ساختار غیرخطی و غیرتکین معادلات (۱)، خواهیم دید روش ارائه شده در این مقاله؛ یک روش کاملاً مناسب در این گونه مسائل است.

## روش برون‌یابی برای حل دستگاه معادلات ولترای غیر خطی

در این بخش روش برون‌یابی برای حل دستگاه غیرخطی زیر تشریح می‌شود:

$$X(t) - \int_0^t K(t, \tau, X(\tau)) d\tau = r(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

که در آن  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))^T$  تابع برداری مجهول،  $K$  هسته پیوسته به صورت

$$K(t, \tau, X(\tau)) = (k_1(t, \tau, X(\tau)), \dots, k_d(t, \tau, X(\tau)))^T$$

و  $r$  تابع برداری مقدار معلوم سمت راست به صورت  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_d(t))^T$  است. به‌ازای  $n_0 \in \mathbb{N}$ ، معادله (۲) را در بازه  $t \in [0, n_0] = \bigcup_{k=1}^{n_0} [k-1, k]$  حل می‌کنیم. برای این منظور هر بازه جزء  $[k-1, k]$  را به  $N$  زیربازه مساوی با طول گام  $h = \frac{1}{N}$  تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم به‌ازای  $n \in I_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  مسئله در  $t \in [0, n]$  حل شده است و می‌خواهیم مسئله را در  $t \in [n, n+1]$  حل کنیم. برای این منظور معادله (۲) را در نقاط  $t_{n,i} = n + ih, i = 1, \dots, N$  می‌نویسیم: (۳)

$$X(t_{n,i}) - \int_0^{t_{n,i}} K(t_{n,i}, \tau, X(\tau)) d\tau = r(t_{n,i}), \quad (۳)$$

و یا

$$X(t_{n,i}) - \int_{t_n}^{t_{n,i}} K(t_{n,i}, \tau, X(\tau)) d\tau = r(t_{n,i}) + F_n(t_{n,i}). \quad (۴)$$

که در آن  $t_n = t_{n-1,N} = n$  و

$$F_n(t_{n,i}) = \int_0^{t_n} K(t_{n,i}, \tau, X(\tau)) d\tau, \quad (۵)$$

جمله پیشین نامیده می‌شود.  $F_0 \equiv 0$  و به ازای  $n \in \mathbb{N}$  با استفاده از قاعده انتگرال گیری دوزنقه‌ای مرکب داریم

$$F_n(t_{n,i}) \approx \frac{h}{2} \left( K(t_{n,i}, 0, r(0)) + K(t_{n,i}, t_n, X_{n-1,N}) \right) + \quad (۶)$$

$$h \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{j=1}^N K(t_{n,i}, t_{l,j}, X_{l,j}) + h \sum_{j=1}^{N-1} K(t_{n,i}, t_{n-1,j}, X_{n-1,j}) =: \tilde{F}_n(t_{n,i}).$$

در رابطه مذکور به ازای  $n = 1$  سیگمای مضاعف برابر صفر است. انتگرال سمت چپ معادله (۴) به صورت رابطه (۷) تقریب می‌شود.

$$\int_{t_n}^{t_{n,i}} K(t_{n,i}, \tau, X(\tau)) d\tau \approx \frac{h}{2} \left( K(t_{n,i}, t_n, X_{n-1,N}) + K(t_{n,i}, t_{n,i}, X_{n,i}) \right) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_{n,i}, t_{n,j}, X_{n,j}), \quad (۷)$$

که در آن  $i = 1, \dots, N$  و به ازای  $i = 1$  سیگمای سمت راست برابر صفر است. با جای گذاری تقریب‌های (۶) و (۷) در معادله (۴)، دستگاه معادلات (۸) را به دست می‌آوریم.

$$X_{n,i} = r(t_{n,i}) + \tilde{F}_n(t_{n,i}) + \frac{h}{2} \left( K(t_{n,i}, t_n, X_{n-1,N}) + K(t_{n,i}, t_{n,i}, X_{n,i}) \right) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_{n,i}, t_{n,j}, X_{n,j}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (۸)$$

دستگاه معادلات (۸) شامل  $N$  معادله با  $N$  مجهول  $X_{n,i}, i = 1, \dots, N$  است و برای حل آن از روش تکرار (۹) استفاده می‌کنیم

$$X_{n,i}^{(m)} = r(t_{n,i}) + \tilde{F}_n(t_{n,i}) + \frac{h}{2} \left( K(t_{n,i}, t_n, X_{n-1,N}) + K(t_{n,i}, t_{n,i}, X_{n,i}^{(m-1)}) \right) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_{n,i}, t_{n,j}, X_{n,j}), \quad i = 1, \dots, N, m = 1, 2, \dots, \quad (۹)$$

که در آن  $X_{n,1}^{(0)} = X_{n-1,N}, X_{n,i}^{(0)} = X_{n,i-1}$  و روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که به ازای  $\varepsilon > 0$  مفروض و به حد کافی کوچک  $\varepsilon$ ،  $|X_{n,i}^{(m)} - X_{n,i}^{(m-1)}| < \varepsilon$  و به ازای چنین  $m$ ی قرار می‌دهیم  $X_{n,i} = X_{n,i}^{(m)}$ . البته شرط توقف دیگری هم می‌توان قرار داد، مثلاً می‌توانیم روند را تا جایی ادامه دهیم که به ازای عددی طبیعی مانند  $n_1$  داشته باشیم  $m \leq n_1$ . جوابی که به وسیله (۹) به دست می‌آید، جواب اولیه است که باید روش برون‌یابی برایش اعمال شود. در الگوریتم زیر این روش را به تعداد  $n_2$  بار اعمال کرده‌ایم.

## ۱. الگوریتم

مرحله ۱: اعداد طبیعی  $n_0, n_1, n_2, N$ ، داده‌های  $\varepsilon > 0, P(t), I_0(t), t \in [0, n_0]$  و توابع برداری

$$r(t) = (r_1(t), \dots, r_d(t))^T, K(t, \tau, X(\tau)) = (k_1(t, \tau, X(\tau)), \dots, k_d(t, \tau, X(\tau)))^T, t \in [0, n_0]$$

را در نظر می‌گیریم (توضیح این‌که  $n_0$  برابر تعداد بازه‌های واحد است که الگوریتم بازه به بازه جواب را دنبال می‌کند تا نهایتاً جواب کلی را ارائه دهد.  $n_1$  برابر تعداد انجام مراحل ۳ است که برای توقف این مرحله می‌تواند به کار رود. برای انعطاف الگوریتم در مرحله ۳ از خطای مطلق برای شرط توقف استفاده کرده‌ایم. شرط توقف‌های دیگری هم می‌توان استفاده کرد. مثلاً از خطای نسبی برای شرط توقف می‌توان استفاده کرد. عدد  $n_2$  برابر با تعداد برون‌یابی‌های مورد استفاده در مرحله ۴ و عدد  $d$  برابر با بعد دستگاه معادلات است. در هر بازه واحد  $N$  تقریب به دست می‌آید).

مرحله ۲: قرار بده  $X_0 = r(0)$  و  $P_j = \{(0, r_j(0))\}, j=1, \dots, d$

مرحله ۳: در این مرحله رویه  $T(n, a, b, X)$  را تعریف می‌کنیم. این رویه جواب تقریبی معادله انتگرالی  $X(t) = r(t) + \int_a^t K(t, \tau, X(\tau)) d\tau$  در نقاط گرهی  $a + ih, i = 1, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}$  با نقطه اولیه  $X(a) = X$  را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مرکب برمی‌گرداند. یعنی خروجی تقریبی برای بردار  $X(a)$   $X(a), X(a + h), \dots, X(a + nh)$  است. این رویه بدین صورت طراحی می‌شود:

گام ۱. یک محیط محلی با متغیر محلی  $V$  تعریف می‌کنیم.

گام ۲. قرار می‌دهیم  $V = [X, X, \dots, X]^T$  که در آن  $V$  یک بردار ستونی  $n+1$  تایی است. عضو  $i$ ام  $V$  را با  $V_i$  نمایش می‌دهیم. به علاوه قرار می‌دهیم  $m = 0$  و  $V_2^{(0)} = X$ .

گام ۳. قرار می‌دهیم

$$V_2^{(m+1)}$$

اگر  $\varepsilon < |V_2^{(m+1)} - V_2^{(m)}|$  قرار بده  $V_2 = V_2^{(m+1)}, i = 2$  اگر نه یک واحد به  $m$  اضافه می‌کنیم و به ابتدای

گام ۳. برمی‌گردیم

گام ۴. قرار می‌دهیم  $V_{i+1}^{(0)} = V_i, m = 0$

گام ۴-۱. قرار می‌دهیم:

$$V_{i+1}^{(m+1)} = r(a + ih) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(a + ih, a + jh, V_{j+1}^{(m)}) + \frac{h}{2} \left\{ K(a + ih, a, X) + K(a + ih, a + ih, V_{i+1}^{(m)}) \right\}$$

اگر  $\varepsilon < |V_{i+1}^{(m+1)} - V_i^{(m)}|$  قرار می‌دهیم  $V_{i+1} = V_{i+1}^{(m+1)}$  اگر نه یک واحد به  $m$  اضافه می‌کنیم و به ابتدای

گام ۴-۱ برمی‌گردیم.

اگر  $i \leq n$  یک واحد به  $i$  اضافه می‌کنیم و به گام ۴ می‌رویم.

گام ۵. بردار  $V$  را به عنوان خروجی  $T(n, a, b, X)$  ارائه می‌کنیم.

مرحله ۴.  $k = 1$

گام ۱. به ازای  $i = n_2 = 0$  تا  $i = n_1$  قرار می‌دهیم  $R(i, 0) = T(2^i N, k - 1, k, X_0)$

گام ۲.  $\rho = \frac{1}{1-4-j}$  و به ازای  $\mathbf{i} = \mathbf{0}$  تا  $\mathbf{i} = \mathbf{n}_2 - j$  قرار می‌دهیم:

$$R(i, j) = \rho R(i + 1, j - 1) + (1 - \rho)R(i, j - 1)$$

اگر  $j < \mathbf{n}_2$  یک واحد به  $j$  اضافه می‌کنیم و به گام ۲ می‌رویم.

گام ۳:  $X_0 = (R(0, \mathbf{n}_2))_{N+1}$  یعنی  $(N + 1)$  امین عنصر بردار  $R(0, \mathbf{n}_2)$  را در  $X_0$  می‌گذاریم.

گام ۴. به ازای  $j = 1, \dots, d$  نقاط  $\left\{ \left( k - 1 + \frac{i}{N}, \left( (R(0, \mathbf{n}_2))_{i+1} \right)_j \right), i = 1, \dots, N \right\}$  را به مجموعه نقاط  $P_j$  اضافه می‌کنیم.

گام ۵.

$$r(t) = r(t) + \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \left( K \left( t, k - 1 + \frac{i+1}{N}, \left( (R(0, \mathbf{n}_2))_{i+2} \right) \right) + K \left( t, k - 1 + \frac{i}{N}, \left( (R(0, \mathbf{n}_2))_{i+1} \right) \right) \right)$$

اگر  $\mathbf{n}_0 < k$  یک واحد به  $k$  اضافه می‌کنیم و به گام ۱ می‌رویم.

مرحله ۵. مجموعه نقاط  $P_j, j = 1, \dots, d$ ، جواب  $x_j$ ها در نقاط شبکه‌ای  $t_{n,i} = n + ih, n = 0, \dots, n_0$ ،  $\mathbf{i} = \mathbf{0}, \dots, N$  هستند.

## ۲. شرح الگوریتم

سه مرحله اول مربوط به روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای مرکب است، که قبلاً شرح داده شده است. در این بخش به شرح روش برون‌یابی به‌سوی حد می‌پردازیم که در واقع همان مرحله ۴ است. شماره  $k$  در ابتدای مرحله ۴ برای تعداد بازه‌های به‌صورت  $[k-1, k]$  است. گام‌های ۱ تا ۴ الگوریتم رامبرگ را برای افزایش دقت محاسبات در بازه به کار می‌گیرند. این الگوریتم همان الگوریتم ۱.۷ از صفحه ۱۷۱ کتاب آنالیز عددی فیلیپس تیلر [۱۵] است، با این تفاوت که در این‌جا همان ایده‌ها به‌صورت برداری توسعه یافته و بازه به بازه به هم وصل شده‌اند. چنان‌که در [۱۵] آمده، هر بار انجام الگوریتم مرتبه هم‌گرایی را ۲ واحد بالا می‌برد. با این حال پایداری و هم‌گرایی الگوریتم را به [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

هر چند این الگوریتم با هر زبان برنامه‌نویسی، قابل برنامه‌نویسی است ولی با توجه به امکانات و توانایی‌های نرم‌افزار *Mathematica* به‌ویژه در محیط‌های محلی، برنامه‌ها با این نرم افزار نوشته شده است. مرحله ۴-۵، تابع سمت راست برای بازه بعدی را فراهم می‌کند. در واقع داده‌های بازه فعلی جمله پیشین برای بازه بعدی است. با وصل کردن نقاط موجود در مجموعه  $P_j$  در مرحله ۵ به هم‌دیگر، تابعی به‌دست می‌آید که برآورد تابع  $x_j$  در بازه  $[0, n_0]$  است.

## آماده‌سازی مدل برای حل عددی

در این بخش مدل (1.1) را به شکل معادله (2.1) می‌نویسیم تا برای حل عددی مهیا شود. برای این منظور  $S(t)$  را به صورت  $S(t) = 1 - I(t) - R(t)$  می‌نویسیم تا بُعد دستگاه معادلات برابر عدد ۲ شود. تعریف می‌کنیم:

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t))^T, X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T, K(t, \tau, X(\tau)) = (k_1(t, \tau, X(\tau)), k_2(t, \tau, X(\tau)))^T,$$

که در آن

$$r_1(t) = I_0(t)e^{-\mu t}, r_2(t) = \varphi + (R_0 + I_0(0) - I_0(t) - \varphi)e^{-\mu t},$$

$$x_1(t) = I(t), x_2(t) = R(t),$$

$$k_1(t, \tau, \mathbf{X}(\tau)) = \beta(1 - x_1(\tau) - x_2(\tau))x_1(\tau)P(t - \tau)e^{-\mu(t - \tau)},$$

$$k_2(t, \tau, \mathbf{X}(\tau)) = \beta(1 - x_1(\tau) - x_2(\tau))x_1(\tau)[1 - P(t - \tau)]e^{-\mu(t - \tau)} + \theta(1 - x_1(\tau) - x_2(\tau))e^{-\mu(t - \tau)}.$$

## نتایج عددی

### ۱. طراحی نمونه مسئله

حل تحلیلی مسئله با داده‌های بخش ۳، جز در موارد بسیار خاص ممکن نیست از این رو، حل عددی این گونه مسائل امری اجتناب‌ناپذیر است. در این قسمت یکی از این موارد خاص را بررسی می‌کنیم، تا بتوانیم نمونه مسائلی را برای مقایسه و تحلیل خطا طراحی کنیم. برای این منظور معادله (۲) برای مدل را به صورت (۱۰) در نظر می‌گیریم:

$$(I - T)X(t) = r(t), \quad (10)$$

که در آن

$$T(X(t)) = \begin{bmatrix} T_1(X(t)) \\ T_2(X(t)) \end{bmatrix} = \int_0^t K(t, \tau, X(\tau)) d\tau, \quad (11)$$

و کمیت‌های  $K, X, r$  مطابق بخش ۳ تعریف می‌شوند. با تعریف مذکور

$$T_2(X(t)) = \int_0^t (\beta x_1(\tau) + \theta)(1 - x_1(\tau) - x_2(\tau))e^{-\mu(t - \tau)} d\tau - T_1(X(t)). \quad (12)$$

دومین مؤلفه (۱۰) به صورت (۱۳) است

$$x_2(t) - \int_0^t (\beta x_1(\tau) + \theta)(1 - x_1(\tau) - x_2(\tau))e^{-\mu(t - \tau)} d\tau + T_1(X(t)) = r_2(t). \quad (13)$$

پس

$$T_1(X(t)) = r_2(t) - x_2(t) + \int_0^t (\beta x_1(\tau) + \theta)(1 - x_1(\tau) - x_2(\tau))e^{-\mu(t - \tau)} d\tau. \quad (14)$$

هم‌چنین مؤلفه اول (۱۰) نتیجه می‌دهد:

$$T_1(X(t)) = x_1(t) - r_1(t). \quad (15)$$

پس بنا به (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$x_1(t) - r_1(t) = r_2(t) - x_2(t) + \int_0^t (\beta x_1(\tau) + \theta)(1 - x_1(\tau) - x_2(\tau))e^{-\mu(t - \tau)} d\tau. \quad (16)$$

از طرفین رابطه (۱۶) تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{\beta}{s + \mu} Lx_1(1 - x_1 - x_2) = \left(1 + \frac{\theta}{s + \mu}\right) (X_1(s) + X_2(s)) - L(r_1 + r_2) - \frac{\theta}{s(s + \mu)}, \quad (17)$$

که در آن  $X_i(s) = L(x_i(t), t, s)$ ,  $i = 1, 2$  تبدیل لاپلاس تابع  $x_i(t)$  است که برحسب متغیر  $s$  نمایش داده شده است. به‌ازای  $P(t) = e^{-\mu t}$  و با استفاده از قضیه پیچش در تبدیلات لاپلاس

$$LT_1(X(t)) = \left(\frac{s + \mu + \theta}{s + 2\mu}\right) (X_1(s) + X_2(s)) - \left(\frac{s + \mu}{s + 2\mu}\right) L(r_1 + r_2) - \frac{\theta}{s(s + 2\mu)}. \quad (18)$$

هم‌چنین بنا به (۱۵):

$$LT_1(X(t)) = X_1(s) - L(r_1). \quad (19)$$

از طرفی بنا به (۱۰):

$$X_2(s) = L(r_2) + LT_2(X(t)). \quad (20)$$

با جای گذاری (۱۸) در رابطه مذکور و با توجه به (۱۲) داریم:

$$X_2(s) = \frac{F(s) - (\theta - \mu)X_1(s)}{s + \mu + \theta}, \quad (21)$$

که در آن

$$F(s) = -\mu Lr_1 + (s + \mu)Lr_2 + \frac{\theta}{s}. \quad (22)$$

معادله (۱۷) را به صورت (۲۳) بازنویسی می کنیم:

$$\beta Lx_1x_2 = (s + \mu + \theta)(X_1(s) + X_2(s)) - (s + \mu)L(r_1 + r_2) - \frac{\theta}{s} + \beta Lx_1(1 - x_1) \quad (23)$$

$$= X_1(s)(\beta - 2\mu - s) - \beta Lx_1^2 + (s + 2\mu)Lr_1.$$

در رابطه مذکور سطر دوم، از رابطه (۲۱) استفاده کرده ایم. برای به دست آوردن یک طیف از نمونه مسائل، تابع  $x_1$  را به صورت (۲۴) در نظر می گیریم

$$x_1(t) = x_0(t) + r_1(t). \quad (24)$$

$x_0$  را باید چنان به دست آوریم که  $X_1(s)(\beta - 2\mu - s)$  در معادله (۲۳) موجود باشد. از این رو، لازم است تابعی مانند  $F_0(s)$  چنان باشد که

$$X_0(s)(\beta - 2\mu - s) = F_0(s) = L(f_0(t)). \quad (25)$$

پس بنا به پیچش تبدیلات لاپلاس

$$X_0(s) = \frac{-F_0(s)}{(\beta - 2\mu - s)} = -F_0(s)L(e^{-(\beta - 2\mu)t}) = -L\int_0^t f_0(\tau)e^{-(\beta - 2\mu)(t-\tau)} d\tau.$$

از این رو،

$$x_0(t) = -\int_0^t f_0(\tau)e^{-(\beta - 2\mu)(t-\tau)} d\tau. \quad (26)$$

با جای گذاری  $F_0(s)$  در (۲۳) داریم:

$$\beta Lx_1x_2 = F_0(s) - \beta Lx_1^2 + (s + 2\mu)Lr. \quad (27)$$

معادلات (۲۶) و (۲۷) اساس کار ما در پیدا کردن نمونه مسئله خواهند بود. بنا به معادلات بخش ۳

$$Lr_2(t) = L\left\{\varphi + (R_0 + I_0(0) - I_0(t) - \varphi)e^{-\mu t}\right\} = \frac{\varphi}{s} + \frac{R_0 + I_0(0) - \varphi}{s + \mu} - Lr_1(t). \quad (28)$$

با جای گذاری (۲۲) و (۲۸) در (۲۰) داریم:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= -Lr_1 + L\left\{(R_0 + I_0(0))e^{-(\mu+\theta)t}\right\} + Le^{-(\mu+\theta)t}L\{\mu\varphi + \theta + (\mu - \theta)x_0\} \\ &= L\left\{-r_1 + (R_0 + I_0(0))e^{-(\mu+\theta)t} + \int_0^t [\mu\varphi + \theta + (\mu - \theta)x_0(\tau)]e^{-(\mu+\theta)(t-\tau)} d\tau\right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

در رابطه (۲۹) تنها پارامتر مجهول عبارت است از  $\gamma = I_0(0)$ ، پس:

$$x_2(t) = -r_1 + f_1(t; \gamma), \quad (30)$$

که در آن

$$f_1(t; \gamma) = (R_0 + \gamma)e^{-(\mu+\theta)t} + \int_0^t [\mu\varphi + \theta + (\mu - \theta)x_0(\tau)] e^{-(\mu+\theta)(t-\tau)} d\tau. \quad (31)$$

با جای‌گذاری (۲۴) و (۳۰) در (۲۳) و محاسبه  $Lr_1$  داریم:

$$Lr_1(t) = L \left\{ \frac{f_0(t) / \beta - [x_0(t)]^2 - x_0(t)f_1(t; \gamma)}{f_1(t; \gamma) + x_0(t) - 1} \right\}. \quad (32)$$

با توجه به رابطه (۳۲) و  $r_1(t) = I_0(t)e^{-\mu t}$  داریم:

$$\gamma = r_1(0) = \frac{f_0(0) / \beta - [x_0(0)]^2 - x_0(0)f_1(0; \gamma)}{f_1(0; \gamma) + x_0(0) - 1} = \frac{f_0(0)}{\beta(R_0 + \gamma - 1)}. \quad (33)$$

پس  $\gamma$  باید در معادله (۳۴) صدق کند:

$$\gamma^2 + (R_0 - 1)\gamma - \frac{f_0(0)}{\beta} = 0. \quad (34)$$

از این‌رو، باید درجه‌های آزادی  $R_0, \beta, f_0(0)$  را در نمونه مسئله‌ها چنان انتخاب کنیم که معادله (۳۴) جوابی در بازه  $(0, 1)$  داشته باشد، زیرا  $\gamma = I_0(0)$  نسبت افراد جامعه است.

مثال ۱: به‌زای

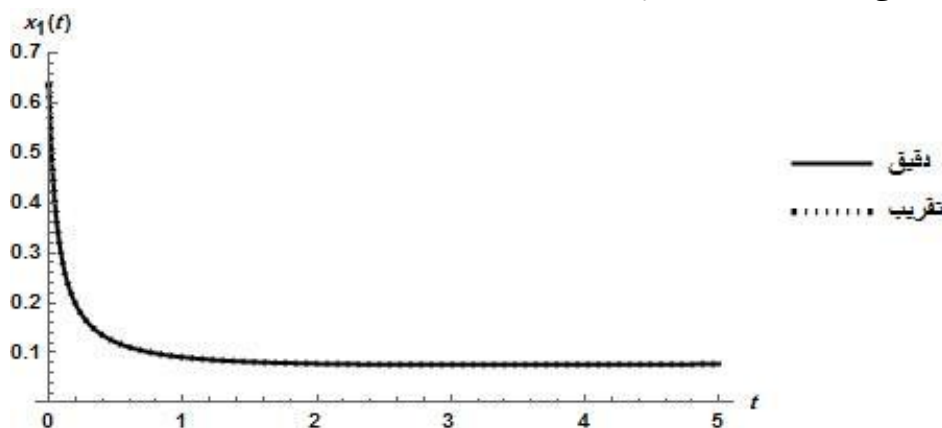
$$\mu = 1, \varphi = \frac{1}{2}, \theta = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{2}, R_0 = \frac{1}{3}, P(t) = e^{-\mu t}, f_0(t) = -\frac{1}{100}, \gamma = \frac{1}{30}(10 + \sqrt{82})$$

جواب‌های دقیق مدل از روابط (۲۴) و (۳۰) به‌دست می‌آیند. روش برون‌یابی با  $X_0 = r(0)$  را به‌کار برده و جواب‌های تقریبی را مطابق شکل‌های ۱ و ۲ به‌دست آوردیم. نمودار نقطه چین جواب عددی و نمودار پیوسته جواب تحلیلی را نشان می‌دهد. در این مثال  $n_0 = 5$ .

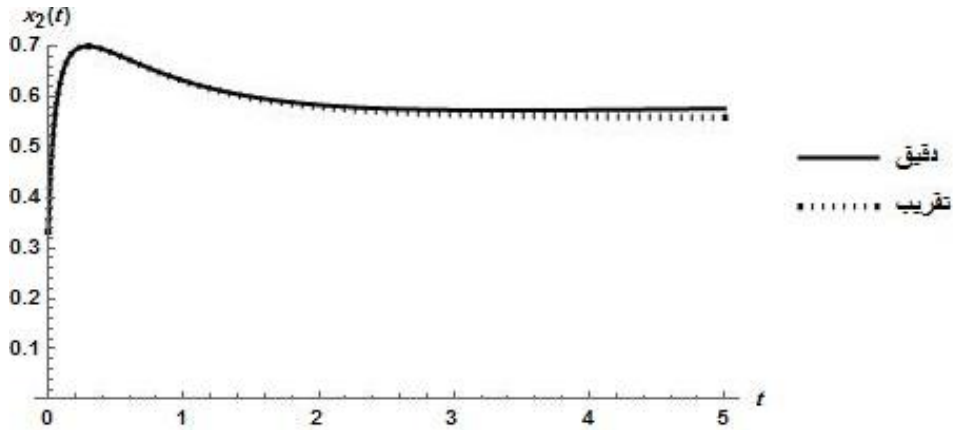
مثال ۲: به‌زای

$$\mu = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{1}{3}, \theta = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{3}, R_0 = \frac{1}{4}, P(t) = e^{-\mu t}, f_0(t) = -\frac{1}{100}, \gamma = \frac{1}{40}(15 - \sqrt{177})$$

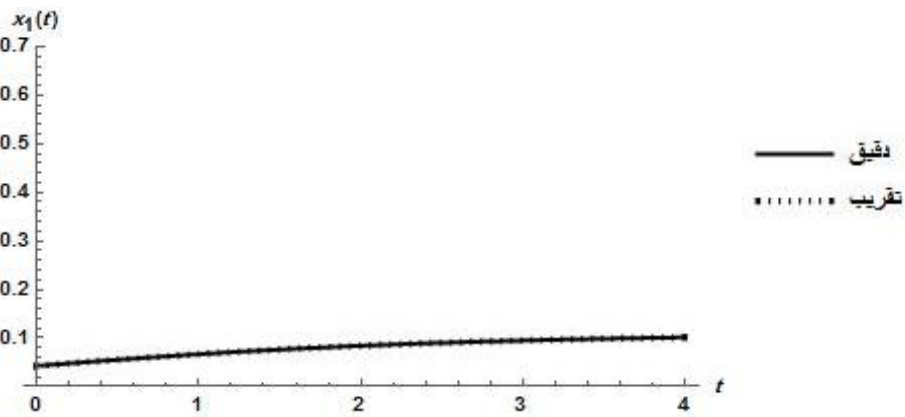
جواب‌های دقیق مدل از روابط (۲۴) و (۳۰) به‌دست می‌آیند. روش برون‌یابی با  $X_0 = r(0)$  را به‌کار برده و جواب‌های تقریبی را مطابق شکل‌های ۳ و ۴ به‌دست آورده‌ایم. نمودار نقطه چین جواب عددی و نمودار پیوسته جواب تحلیلی را نشان می‌دهد. در این مثال  $n_0 = 4$ .



شکل ۱

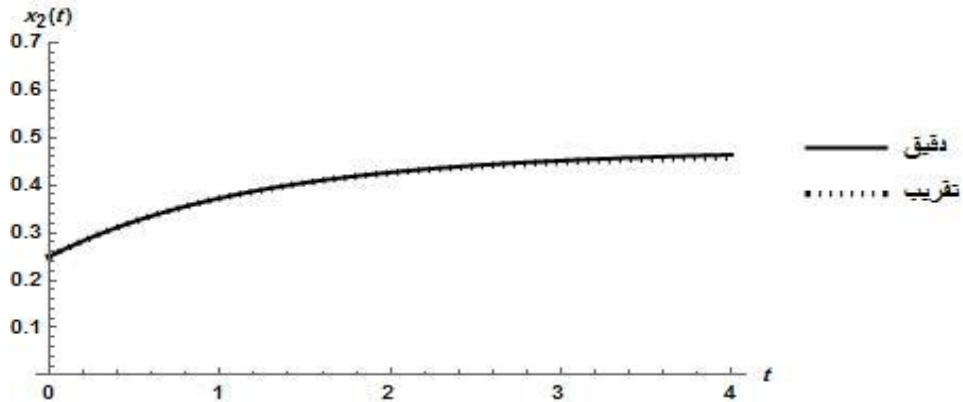


شکل ۲



شکل ۳

و



شکل ۴

### منابع

1. Hethcote H. W., Tudor D. W., "Integral equation models for endemic infectious diseases", J. Math. Biology, vol. 9 (1980) 37-47.
2. Miller I., Miller M., "John E. Freund's Mathematical Statistics with Applications", 8<sup>st</sup> ed., Pearson Education Limited, 2014.

3. Bailey N. J. T., "The mathematical theory of infectious diseases and its applications", Griffin, London (1975).
4. Niculescu S. I., Kim P. S., Gu K., Lee P. P. , Levy D., "Stability crossing boundaries of delay systems modeling immune dynamics in leukemia", Discrete and Continuous Dynamic systems, serie B, vol. 10, no 1 (2010) 129-156.
5. Babayar-Razlighi B., Soltanalizadeh B., "Numerical solution for system of singular nonlinear volterra integro-differential equations by Newton-Product method", APPL. MATH. COMPUT, vol. 219 (2013) 8375-8383.
6. Babayar-Razlighi B., Soltanalizadeh B., "Numerical solution of nonlinear singular Volterra integral system by the Newton-Product integration method", MATH, COMPUT, MODEL, vol. 58 (2013) 1696-1703.
7. Babayar-Razlighi B., Ivaz, M. R. Mokhtarzadeh, "Convergence of product integration method applied for numerical solution of linear weakly singular Volterra systems", Bull. Iranian Math, Soc., vol. 37 (2011) 135-148.
8. Babayar-Razlighi B., Ivaz K., Mokhtarzadeh M. R., Badamchizadeh A. N., "Newton-Product integration for a two phase Stefan problem with kinetics", Bull, Iranian Math, Soc., vol. 38, no. 4 (2012) 853-868.
9. Babayar-Razlighi B., Ivaz K., Mokhtarzadeh M. R., "Newton-Product integration for a Stefan problem with kinetics", J. Sci. Islam. Repub. Iran, vol. 22, no. 1 (2011) 51-61.
10. Babayar-Razlighi B., Khadem M., "Numerical solution of a free boundary problem from heat transfer by Legendre Wavelets", Proc. Iranian Conference on Mathematical Physics, Qom, Iran (Nov 2016) 92-95.
11. Babayar-Razlighi B., "Numerical solution of a heat conduction problem by the Legendre Wavelets", Proc. The 22th Seminar on Mathematical Analysis and It's Applications, Bonab, Iran (Jan 2017) 319-322.
12. Brunner H., "Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations", 1st ed., Cambridge University Press (2004).
13. Ordokhani Y., Razzaghi M. "Solution of nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations via a collocation method and rationalized Haar functions", Appl. Math. Lett., vol. 21, no. 1 (2008) 4-9.
14. Ordokhani Y., "Solution of nonlinear Volterra-Fredholm Hammerstein integralequations via rationalized Haar functions", Appl. Math. Comput., vol. 180, no. 2 (2006) 436-443.
15. Phillips G.M.M., Taylor P.J., "Theory and applications of numerical analysis", in Applied Mathematics, 2<sup>st</sup> ed., Elsevier Science & Technology Books, 1996.
16. Tao L., Yong H., "Extrapolation method for solving weakly singular nonlinear Volterra integral equations of the second kind", J. Math. Anal. Appl, vol. 324, (2006) 225-237.