(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

توسیع‌های لَخت مدولی، زیرمجموعه‌های ضربی بستهٔ حافظ زیرمدول‌های دوری و تجزیه در مدول‌ها

اشکان نیک‌سرشت؛ دانشگاه شیراز، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، M یک R-مدول یکانی و S یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته R. گوییم S حافظ زیرمدول‌های دوری M است، هرگاه انقباض هر زیرمدول دوری M_S به M یک زیرمدول دوری باشد. در این مقاله ضمن ارائه یک شرط معادل برای حافظ زیرمدول‌های دوری بودن، به بررسی ارتباط بین خواص تجزیه‌ای M و M_S زمانی که S حافظ زیرمدول‌های دوری M است می‌پردازیم. به‌علاوه مفهوم یک توسیع مدولی لَخت و لَخت ضعیف را معرفی کرده و اگر T یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته R شامل S باشد، $T' = S^{-1}T$ و $M \leq M_S$ یک توسیع (T,T')-لَخت ضعیف باشد، تجزیه نسبت به T در M را به تجزیهٔ نسبت به T' در M_S ارتباط می‌دهیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم اگر M فارغ از تاب و S حافظ زیرمدول‌های دوری M باشد، آن‌گاه S شکافنده M است و $M \leq M_S$ یک توسیع لخت است.

واژه‌های کلیدی: زیرمجموعه‌های ضربی بسته حافظ زیرمدول‌های دوری، توسیع لَخت، مدول اتمی، مدول تجزیهٔ یکتا.

مقدمه

در تمام این مقاله حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار فرض شده‌اند و تمام مدول‌ها یکانی. هم‌چنین R یک حلقه و M یک R-مدول است. علاوه بر آن همه‌جا منظور از یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته R، یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته اشباع شده[1] R است و S یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته R است. در این‌جا حالت $0 \in S$ را که معادل است با $S=R$ مجاز می دانیم. هم‌چنین مجموعه عناصر وارون‌پذیر حلقه R و مقسوم‌علیه‌های صفر مدول M را به‌ترتیب با U(R) و Z(M) نمایش می‌دهیم.

نظریهٔ تجزیه در حلقه‌های جابه‌جایی که تاریخی طولانی دارد (برای مثال [۶]، [۹]، [۱۳])، هم‌چنان توجه محققان فراوانی را به خود جلب می‌کند. برای بررسی برخی مقالات جدید در این زمینه خواننده را به [۷]، [۸]، [۱۰]، [۱۱] و منابع آن‌ها ارجاع می‌دهیم. تمرکز نظریهٔ تجزیهٔ ابتدا بر تجزیهٔ عناصر در دامنه‌های صحیح بود. در اواخر دههٔ ۹۰ اندرسن و والدس-لئون این نظریه را به حلقه‌های دارای مقسوم‌علیه صفر ناصفر و مدول‌ها تعمیم دادند [۳]، [۴] و در [۱۱] حالت کلی‌تر تجزیه در مدول‌ها نسبت به یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته حلقه معرفی و بررسی شده است. در بخش ۳ از [۱۲] با استفاده از بررسی خواص تجزیه‌ای R-مدول R نسبت به عناصر منظم R، نتایجی در مورد خواص تجزیه‌ای حلقه‌ای R به‌دست آمده است که بدون نگاه مدولی به تجزیه در R به‌نظر دور از دسترس می‌رسد. هم‌چنین

نویسنده مسئول ashkan_nikseresht@yahoo.com

1. Saturated

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

در بخش ۵ مقاله [۱۰] نشان داده شده است که چطور می‌توان از حالت کلی تجزیه در مدول‌ها نسبت به مجموعه‌های ضربی بسته برای بررسی حالت کلاسیک نظریهٔ تجزیه در دامنه‌های صحیح استفاده کرد.

از جمله مسائل مهم و مورد توجه در این زمینه نحوهٔ ارتباط تجزیه در یک حلقه یا مدول با موضعی‌سازی آن حلقه یا مدول است برای مثال مقالات [۱]، [۲]، [۹]، [۱۰] را مشاهده کنید. در [۲] نشان داده شده است که اگر R یک دامنه صحیح باشد و S به‌گونه‌ای باشد که هر ایده‌آل اصلی R_S به یک ایده‌آل اصلی در R منقبض[1] شود، آن‌گاه ارتباطی قوی بین خواص تجزیه‌ای R و R_S وجود دارد. در همین مقاله و نیز در [۱] مفهوم یک توسیع حلقه‌ای لَخت[2] و لَخت ضعیف معرفی شده و ارتباط بین تجزیه در R و R_S وقتی که $R \subseteq R_S$ لَخت یا لَخت ضعیف باشد بررسی شده است. هدف این مقاله بررسی و تعمیم این مفاهیم در مدول‌ها است. در این مقاله ابتدا شرط معادلی برای این‌که انقباض هر زیرمدول دوری M_S در M دوری شود می‌یابیم و سپس به بررسی ارتباط بین تجزیه در M و تجزیه در M_S تحت این شرط می‌پردازیم. هم‌چنین توسیع‌های لَخت و لَخت ضعیف مدولی را معرفی می‌کنیم و هنگامی که $M \leq M_S$ یک توسیع لَخت ضعیف باشد، تجزیه در M را به تجزیه در M_S ارتباط می‌دهیم. علاوه برآن به بررسی ارتباط بین توسیع‌های لَخت و حافظ زیرمدول دوری بودن می‌پردازیم.

ابتدا به‌طور مختصر تعاریف نظریهٔ تجزیه در مدول‌ها نسبت به یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته را مرور می‌کنیم. برای بررسی کامل‌تر و دیدن چندین مثال از این مفاهیم به [۱۱] رجوع کنید. شایان ذکر است در آن مقاله به جای اصطلاح «زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ اشباع شده» از عنوان «زیرتکوار ضربیِ شمارنده–بسته[3]» استفاده شده است.

مروری مختصر بر تجزیه نسبت به یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته در مدول‌ها

یادآوری می‌کنیم که در این مقاله R یک حلقه جابه‌جایی یکدار، M یک R–مدول یکانی و S یک زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ اشباع شده R است (بالاخص $U(R)\subseteq S$). عناصر m و n از M را S–شریک[4] می‌خوانیم و می‌نویسیم $m \sim^S n$، هرگاه عناصر $s, s' \in S$ یافت شوند به‌طوری‌که $n = s'm$ و $m = sn$. این دو عنصر را شریک قوی می‌نامیم، اگر $m=un$ برای یک $u\in U(R)$. در این حالت می‌نویسیم $m \approx n$. هم‌چنین m و n را S–شریک بسیار قوی می‌خوانیم و با نماد $m \cong^S n$ نمایش می‌دهیم، وقتی که الف) $m \sim^S n$ و ب) یا $m=n=0$ یا از $m=sn$ برای یک $s\in S$، بتوان نتیجه گرفت که $s\in U(R)$.

در حالتی که $S=R$، پیشوندهای S و نیز Sهای موجود در نمادها را نمی‌نویسیم. در این حالت نمادهای ما با نمادهای [۳، ۴] مطابقت می‌کند. گوییم عنصر $m\in M$ یک عنصر S–اولیه[5] (یا به‌ترتیب S–اولیهٔ قوی، S–اولیهٔ بسیار قوی) است، هرگاه از $m=sn$ که $s\in S$ و $n\in M$، بتوان نتیجه گرفت $m \sim^S n$ (به‌ترتیب $m \approx n$، $m \cong^S n$). هم‌چنین عنصر $a\in R$ را تحویل‌ناپذیر[6] (یا به‌ترتیب تحویل‌ناپذیر قوی، تحویل‌ناپذیر بسیار قوی) نامیم، هرگاه $a=bc$ برای $b,c\in R$ نتیجه دهد که $a\sim b$ یا $a\sim c$ (به‌ترتیب $a\approx b$ یا $a\approx c$، $a\cong b$ یا $a\cong c$). توجه کنید که در این‌جا منظور از شریک بودن عناصر R، شریک بودن این عناصر در R به‌عنوان R–مدول است.

1. Contracts
2. Inert
3. Divisor-closed multiplicative submonoid
4. S-associates
5. S-primitive
6. Irreducible

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

در ادامه به بیان چند مشاهده ساده می‌پردازیم که چندین بار در طول این مقاله از آن‌ها (بدون اشاره و ارجاع به این نکته) استفاده می‌کنیم.

نکته: ۱. فرض کنید R دامنه‌ای صحیح و M فارغ از تاب باشد، m, n∈ M و r∈ R. آن‌گاه

$$m \sim^S n \Leftrightarrow m \sim n \Leftrightarrow m \approx n \Leftrightarrow m \cong n \Leftrightarrow m \cong^S n.$$

هم‌چنین m عنصری S-اولیه است اگر و فقط اگر S-اولیهٔ قوی باشد اگر و فقط اگر S-اولیهٔ بسیار قوی باشد. علاوه بر آن r عنصری تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگرتحویل‌ناپذیر قوی باشد اگر و فقط اگر تحویل‌ناپذیر بسیار قوی باشد.

۲. عنصر m∈M، S-اولیهٔ بسیار قوی است اگر و فقط اگر از $m = sm'$ که $m' \in M$ و $s \in S$، بتوان نتیجه گرفت که s∈U(R).

۳. عنصر a∈R تحویل‌ناپذیر بسیار قوی است اگر و فقط اگر از a=bc که b,c∈R بتوان نتیجه گرفت که a∈U(R) یا b∈U(R).

۴. اگر $m_1, m_2, m_3 \in M$ و $m_1 = um_2$ که $u \in \mathrm{U}(R)$، آن‌گاه m_1 و m_3، S-شریک (یا به‌ترتیب، S-شریک قوی، S-شریک بسیار قوی) هستند، اگر و تنها اگر m_2 و m_3، S-شریک (به‌ترتیب، S-شریک قوی، S-شریک بسیار قوی) باشند. هم‌چنین m_1 عنصری S-اولیه (مشابهاً S-اولیهٔ قوی، S-اولیهٔ بسیار قوی) است اگر و تنها اگر m_2 چنین باشد.

منظور از یک S-تجزیهٔ m∈M به‌طول k، یک تساوی به شکل $m = s_1 s_2 \cdots s_k n$ است که s_iها عناصری غیرواورن‌پذیر در S اند و n∈M. اگر هر s_i تحویل‌ناپذیر باشد و n عنصری S-اولیه، این تساوی را یک S-تجزیهٔ اتمی می‌خوانیم و اگر هر عنصر ناصفر M یک S-تجزیهٔ اتمی داشته باشد، گوییم M نسبت به S اتمی است. به‌علاوه دو S-تجزیهٔ اتمی $m = s_1 \cdots s_k n = t_1 \cdots t_l n'$ را S-یکریخت گوییم، هرگاه k=l، $n \sim^S n'$ و به‌ازای جای‌گشتی چون σ داشته باشیم $s_i \sim t_{\sigma(i)}$. گوییم M نسبت به S تجزیهٔ یکتا (تجزیهٔ متناهی) دارد، هرگاه نسبت به S اتمی باشد و هر عنصر ناصفر M با تقریب S-یکریختی دقیقا یک (تعداد متناهی) S-تجزیهٔ اتمی داشته باشد. هم‌چنین گوییم M نسبت به S تجزیهٔ کراندار دارد، وقتی که برای هر 0≠m∈M عدد طبیعی N_m موجود باشد به‌گونه‌ای‌که طول هر S-تجزیه m حداکثر N_m باشد. در نهایت M را نسبت به S نیم‌عاملی[1] گوییم، هرگاه نسبت به S اتمی بوده است و برای هر 0≠m∈M طول هر دو S-تجزیهٔ اتمی m برابر باشد.

اگر E⊆R، گوییم R درون E تجزیهٔ یکتا دارد، وقتی که هر عنصر ناصفر و غیر وارون‌پذیر در E با تقریب یک‌ریختی یک تجزیهٔ اتمی یکتا داشته باشد (نسبت به S=R). عباراتی چون «در E اتمی است»، «درون E تجزیهٔ کراندار دارد» و غیره به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.

زیرمجموعه‌های ضربی بستهٔ حافظ زیرمدول‌های دوری

این بخش را با تعریف دقیق زیرمجموعه‌های ضربی بستهٔ حافظ زیرمدول‌های دوری شروع می‌کنیم و سپس با ارائه شرط معادلی، این زیرمجموعه‌های ضربی بسته را شناسایی می‌کنیم. در نهایت نشان می‌دهیم که اگر S حافظ

1. Half-factorial

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

زیرمدول‌های دوری M باشد، مخصوصاً در حالتی که M فارغ از تاب باشد، ارتباطی قوی بین خواص تجزیه‌ای M_S و M وجود دارد. در ادامه اگر N یک زیرمدول M_S باشد، انقباض[1] N به M را با N∩M نمایش می‌دهیم. به‌علاوه در این‌جا وقتی عنصر x∈M را به‌عنوان عضوی از M_S در نظر می‌گیریم، منظور $x/1 \in M_S$ است. بنابراین هر زیرمدول دوری M_S به‌صورت $R_S m$ است که m∈ M.

تعریف. گوییم S حافظ زیرمدول‌های دوری M است هرگاه برای هر m∈ M یک m'∈ M باشد که

$$R_S m \cap M = Rm'.$$

برای مثال اگر R دامنهٔ ایده‌آل اصلی (PID) باشد و M یک ایده‌آل آن، آن‌گاه هر زیرمجموعهٔ ضربی بسته R حافظ زیرمدول‌های دوری M است. یک مثال غیربدیهی از تعریف مذکور در پی می‌آید.

مثال ۱. فرض کنید R یک دامنهٔ ارزیابی[2] باشد، M=R⊕R و S=R\{0}. آن‌گاه S حافظ زیرمدول‌های دوری M است. برای دیدن دلیل آن توجه کنید که اگر $0 \neq m = (r_1, r_2) \in M$ و $x \in R_S m \cap M$، آن‌گاه

$$x = \left(\frac{a}{b} r_1, \frac{a}{b} r_2\right) = (k_1, k_2)$$

که $k_1, k_2, a, b \in R$ و $b \neq 0$. به‌وضوح اگر $r_1 = 0$ یا $r_2 = 0$، آن‌گاه

$$R_S m \cap M = (0 \oplus R_S) \cap M = R(0,1) \text{ یا } R_S m \cap M = (R_S \oplus 0) \cap M = R(1,0).$$

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $r_1 \neq 0 \neq r_2$. حال چون R یک دامنهٔ ارزیابی است، یکی از r_1/r_2 یا r_2/r_1 در R قرار دارد، گیریم $t = r_1/r_2$ چنین باشد. حال

$$x = (k_1, k_2) = k_2\left(\frac{k_1}{k_2}, 1\right) = k_2\left(\frac{r_1}{r_2}, 1\right) = k_2(t, 1) \in R(t, 1)$$

برعکس $(t, 1) = \frac{1}{r_2}(r_1, r_2) \in R_S m \cap M$ بنابراین $R_S m \cap M = R(t, 1)$ دوری است.

در ادامه برای y∈M، اشباع شدهٔ[3] زیرمجموعهٔ ضربی بسته S+Ann(y) را با نماد S(y) نمایش می‌دهیم، یعنی $S(y) = \{r \in R | \exists r' \in R:\ \ rr' \in S + \mathrm{Ann}(y)\}$.

گزارهٔ ۲. فرض کنید $x, y \in M$ و N زیرمدولی از M باشد. آن‌گاه

۱. $R_S x \cap M = Ry$ اگر و فقط اگر $x = ty$ برای یک t∈ S(y) و $R_S y \cap M = Ry$.

۲. $N_S \cap M = N$ اگر و فقط اگر $0_S \cap M \subseteq N$ و برای هر s∈S داشته باشیم $N \cap sM = sN$.

اثبات: ۱. فرض کنید $R_S x \cap M = Ry$. بنابراین $R_S y = R_S x$ و $R_S y \cap M = R_S x \cap M = Ry$. حال چون $y \in R_S x \cap M$ پس s∈S و r∈R موجود است که sy=rx. هم‌چنین x∈Ry پس t∈R هست که x=ty. حال sy=rty و در نتیجه (rt-s)y=0 . بنابراین rt∈S+Ann(y) و t∈S(y).

برعکس فرض کنید $x = ty$ برای یک t∈ S(y) و $R_S y \cap M = Ry$. آن‌گاه $R_S x \subseteq R_S y$ و در نتیجه

$$R_S x \cap M \subseteq R_S y \cap M = Ry$$

و کافی است نشان دهیم $y \in R_S x \cap M$. چون t∈S(y) پس عناصر $t' \in R$ و a∈Ann(y) و s∈S وجود دارند که $t't = s + a$. حال

1. Contraction
2. Valuation
3. Saturation

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

$$sy = (s + a)y = t'ty = t'x \in Rx$$

و نتیجه می‌شود که $y \in R_S x \cap M$.

۲. فرض کنید $N_S \cap M = N$. پس $0_S \cap M \subseteq N_S \cap M = N$. حال اگر s∈S و $n \in N \cap sM$، آن‌گاه n=sm برای یک m∈M. بنابراین $m \in N_S \cap M = N$ و n=sm∈sN. این یعنی N∩ sM⊆ sN و از آن‌جاکه جهت عکس این شمول همیشه برقرار است، حکم نتیجه می‌شود. برعکس فرض کنید $0_S \cap M \subseteq N$ و برای هر s∈S داشته باشیم $N \cap sM = sN$. اگر $m \in N_S \cap M$ آن‌گاه s∈S هست که sm∈N. پس sm∈ N∩ sM= sN و n∈N یافت می‌شود که sm=sn. اما این یعنی s(m-n)=0 و m-n∈ $0_S \cap M \subseteq N$. بنابراین m∈N و نتیجه دلخواه به‌دست می‌آید.

یک نتیجه مستقیم این گزاره، شرط معادل زیر برای حافظ زیرمدول‌های دوری بودن است.

قضیهٔ ۳. مجموعهٔ ضربی بسته S حافظ زیرمدول‌های دوری M است اگر و فقط اگر برای هر x∈M یک y∈M و یک t∈S(y) وجود داشته باشد به‌طوری‌که x=ty، $0_S \cap M \subseteq Ry$ و برای هر s∈S داشته باشیم Ry∩sM=Rsy.

از آن‌جاکه در مدول‌های فارغ از تاب $0_S \cap M = 0$ و برای هر y∈M داریم Ann(y)=0 و در نتیجه S(y)= S، می‌توان حافظ زیرمدول‌های دوری بودن برای این دسته از مدول‌ها را ساده‌تر بدین‌صورت بیان کرد. این نتیجه تعمیمی است از لم ۱-۲ مقاله [۲]:

نتیجه ۴. اگر M فارغ از تاب باشد (و در نتیجه R دامنه صحیح باشد)، آن‌گاه S حافظ زیرمدول‌های دوری M است اگر و فقط اگر برای هر x∈M یک y∈M و یک t∈S وجود داشته باشد به‌طوری‌که x=ty و برای هر s∈S داشته باشیم Ry∩sM=Rsy.

فرض کنید S حافظ زیرمدول‌های دوری M باشد. آن‌گاه هر عضو x∈M را به‌صورت یک x=ty می‌توان تجزیه کرد که در آن t و y شرایط قضیه ۳ را دارند. دقت کنید که بنابر گزارهٔ ۲، $R_S x \cap M = Ry$ و بنابراین y با تقریب شراکت به‌طور یکتا تعیین می‌شود. سوالی که مطرح می‌شود این است که خواص تجزیه‌ای تصویر x در M_S و خواص تجزیه‌ای y در M چه ارتباطی با یک‌دیگر دارند و آیا مثلاً از اولیه یا تحویل‌ناپذیر بودن یکی می‌توان نتیجه گرفت که دیگری هم‌چنین خاصیتی دارد؟ خواهیم دید که در حالت ساده‌تری که M فارغ از تاب باشد، ارتباطی قوی بین خواص تجزیه‌ای این دو عنصر وجود دارد. اما پیش از آن احکام زیر را در حالت کلی بیان می‌کنیم.

گزارهٔ ۵. فرض کنید عناصر $x, x' \in M$ در M_S شریک یک‌دیگر باشند و

$$R_S x \cap M = Ry \text{ و } R_S x' \cap M = Ry' .$$

آن‌گاه $\mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(y')$ و $y \sim^{\mathrm{S}(y)} y'$.

اثبات: طبق فرض $R_S x' = R_S x$ پس $Ry' = Ry$، $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y')$ و در نتیجه $\mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(y')$. حال با توجه به قضیهٔ ۳ عناصر $t, t' \in \mathrm{S}(y)$ به‌گونه‌ای یافت می‌شوند که $x = ty = t'y'$. از $Ry = Ry'$ نتیجه می‌شود که $y' = ry$ برای یک $r \in R$. بنابراین $ty = t'ry$ و

$$a = t'r - t \in \mathrm{Ann}(y).$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

از تعریف $\mathrm{S}(y)$ به‌دست می‌آید که $u \in R$ چنان یافت می‌شود که $ut = s + i$ برای $i \in \mathrm{Ann}(y)$ و $s \in S$.
حال

$$ut'r = ua + ut = ua + i + s \in \mathrm{Ann}(y) + S$$

در نتیجه $r \in \mathrm{S}(y)$. پس ثابت کردیم $y' = ry$ برای یک $r \in \mathrm{S}(y)$ و به‌طریق مشابه نتیجه می‌شود $y = r'y'$ برای یک $r' \in \mathrm{S}(y)$. این یعنی $y \sim^{\mathrm{S}(y)} y'$. □

نتیجهٔ ۶. گیریم $x, y, y' \in M$ و $R_S x \cap M = Ry = Ry'$ و $t, t' \in \mathrm{S}(y)$ به‌گونه‌ای باشند که $x = ty = t'y'$. آن‌گاه $y \sim^{\mathrm{S}(y)} y'$ و اگر $\mathrm{Ann(y)=0}$، آن‌گاه $t \sim^S t'$.

اثبات: قسمت اول نتیجه آنی گزاره قبل است. حال فرض کنید $\mathrm{Ann}(y) = 0$ و r و r' مانند اثبات گزاره قبل باشند. از آن‌جاکه $ty = t'y' = t'ry$، داریم $t - t'r \in \mathrm{Ann}(y) = 0$ و $t = rt'$. مشابهاً $t' = r't$ و چون $r, r' \in \mathrm{S}(y) = S$، به‌دست می‌آید $t \sim^S t'$.

در ادامه اگر $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{R}$، منظور از $S^{-1}T$ مجموعهٔ $\left\{\frac{t}{s} \middle| t \in T, s \in S\right\} \subseteq R_S$ است.

گزارهٔ ۷. فرض کنید $x, y \in M$، $R_S x \cap M = Ry$ و T زیرمجموعهٔ ضربی بسته‌ای از R باشد که $\mathrm{S}(y) \subseteq T$. اگر x در M_S یک عنصر $S^{-1}T$-اولیهٔ بسیار قوی باشد، آن‌گاه y یک عنصر T-اولیه است.

اثبات: طبق گزارهٔ ۲، $s \in \mathrm{S}(y)$ هست که $x = sy$. اگر $y = ty'$ که $t \in T$، آن‌گاه

$$\frac{x}{1} = \frac{st}{1}\frac{y'}{1} \text{ و } st \in \mathrm{S}(y)T \subseteq TT \subseteq T$$

و از $S^{-1}T$-اولیهٔ بسیار قوی بودن x نتیجه می‌شود که $st/1$ در R_S وارون‌پذیر است، یعنی $st \in S$ و چون S اشباع‌شده است $t \in S$. پس طبق گزارهٔ ۲:

$$y' \in (Ry)_S \cap M = R_S y \cap M = Ry$$

بنابراین $Ry = Ry' = R_S x \cap M$ و از گزارهٔ ۵ نتیجه می‌شود که $y \sim^{\mathrm{S}(y)} y'$. اما $\mathrm{S}(y) \subseteq T$، در نتیجه $y \sim^T y'$ بنابر بند (۱) قضیهٔ ۲-۷ از [۱۱] و حکم ثابت می‌شود.

گزارهٔ ۸. فرض کنید $x, y \in R$ و $R_S x \cap R = Ry$. اگر x در R_S تحویل‌ناپذیر بسیار قوی باشد، آن‌گاه y در R تحویل‌ناپذیر است.

اثبات: طبق گزارهٔ ۲، $t \in \mathrm{S}(y)$ هست که $x = ty$. اگر $y = ab$ برای $a, b \in R$، آن‌گاه

$$\frac{x}{1} = \frac{t}{1}\frac{a}{1}\frac{b}{1}$$

و از تحویل‌ناپذیری قوی $x/1$ نتیجه می‌شود که یکی از $a/1$ یا $b/1$، گیریم $a/1$، وارون‌پذیر است. بنابراین $a \in S$ و از $y = ab$ به‌دست می‌آید $b \in (Ry)_S \cap R = Ry$. چون $y \in Rb$ پس $Ry = Rb$ و y و b شریک‌اند. بنابراین y تحویل‌ناپذیر است.

گزاره‌های مذکور هرچند ارتباطی ضعیف بین خواص تجزیه‌ای M_S و M در حالتی که S حافظ زیرمدول‌های دوری باشد به‌دست می‌دهند، اما برای به‌دست آوردن نتایجی قوی‌تر نیاز داریم فرض کنیم M فارغ از تاب است. در این حالت هم می‌توانیم از نتیجه ساده‌تر ۴ استفاده کنیم و هم از قسمت دوم نتیجهٔ ۶. در عین حال از آن‌جاکه مرکز توجه تحقیقات در حوزهٔ نظریهٔ تجزیه، دامنه‌های صحیح هستند و چنان‌که در مقدمه اشاره شد، کاربرد اصلی تجزیه

نسبت به زیرمجموعه‌های ضربی بسته در مدول‌ها حالتی است که $M = R$ و R یک دامنهٔ صحیح است (مثلا بخش ۵ از [۱۰] را ببینید)، محدود کردن بررسی به مدول‌های فارغ از تاب، محدودیت ناخوشایندی به‌حساب نمی‌آید.

در [۱۰] یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته چون S از R *شکافنده* M[1] نامیده شده است، هر گاه این سه شرط برقرار باشد:

۱. برای هر x∈M یک عنصر S-اولیه مثل y∈M و یک s∈S باشد که x=sy؛

۲. اگر x,y,z∈M و s,t∈S به گونه‌ای باشند که x=sy=tz و y و z عناصری S-اولیه باشند، آن‌گاه $s \sim^S t$؛

۳. برای هر عنصر S-اولیه از R مثل r و هر عنصر S-اولیه از M مثل m که rm≠0، عنصر rm S-اولیه باشد.

هم‌چنین M را *S-اتمی فشرده*[2] گویند، هرگاه شرط (۱) فوق برقرار باشد.

قضیهٔ ۹. فرض کنید R یک دامنهٔ صحیح و M یک R-مدول فارغ از تاب باشد. در این صورت اگر S حافظ زیرمدول‌های دوری M باشد، آن‌گاه S شکافنده M است. اگر اضافه بر آن R یک R-مدول S-اتمی فشرده باشد، عکس حکم نیز برقرار است.

اثبات: فرض کنید S حافظ زیرمدول‌های دوری M است. ابتدا نشان می‌دهیم عنصر m∈M در شرط (*):

$$\forall t \in S: \ \ Rm \cap tM = Rtm$$

صدق می‌کند، اگر و تنها اگر S-اولیه باشد. فرض کنید m شرط (*) را داشته باشد و $m = sm'$ برای یک s∈S و $m' \in M$. آنگاه m∈Rm∩ sM=Rsm و بنابراین m=rsm برای یک r∈R. پس 1-rs∈Ann(m)=0 و s وارون‌پذیر است، یعنی m عنصری S-اولیه است. برعکس گیریم m عنصری S-اولیه باشد. بنا به فرض n∈M موجود است که $R_S m \cap M = Rn$. اما طبق گزارهٔ ۲، از طرفی n در شرط (*) صدق می‌کند و از طرف دیگر m=sn برای یک s∈S(y)=S. چون m عنصری S-اولیه است، Rm=Rn و در نتیجه m نیز در (*) صدق می‌کند، یعنی (*) معادل است با S-اولیه بودن m و بنابر بند (۲) گزارهٔ ۲ این شرایط هم‌چنین معادلند با $R_S m \cap M = Rm$.

حال بنابر نتیجهٔ ۴، شرط (۱) شکافنده بودن برای S برقرار است. هم‌چنین از نتیجهٔ ۶، شرط (۲) شکافنده بودن به‌دست می‌آید. حال فرض کنید 0≠r∈R و 0≠m∈M عناصری S-اولیه باشند. اگر rm=sn برای عناصر s∈S, n∈M، آن‌گاه با توجه به این‌که m در شرط (*) صدق می‌کند و طبق گزارهٔ ۲، $n \in R_S m \cap M = Rm$. فرض کنید $r' \in R$ به‌گونه‌ای باشد که $n = r'm$. آن‌گاه $rm = sr'm$ و چون M فارغ از تاب است، $r = sr'$. اما r عنصری S-اولیه است و در نتیجه s∈U(R) که به معنی S-اولیه بودن rm است و حکم ثابت می‌شود.

حال فرض کنید R یک R-مدول S-اتمی فشرده باشد و S شکافنده M. باید نشان دهیم S حافظ زیرمدول‌های دوری M است. برای این کار کافیست نشان دهیم هر عنصر S-اولیه M در شرط (*) صدق می‌کند، زیرا در این صورت حکم از خاصیت (۱) شکافنده بودن و نتیجه ۴ به‌دست می‌آید. پس فرض کنید m∈M عنصری S-اولیه باشد، t∈S دلخواه و $0 \neq x \in Rm \cap tM$، مثلا $x = rm = tm'$ برای $r \in R, m' \in M$. طبق فرض R و M هر دو S-اتمی فشرده‌اند و در نتیجه عناصر $m'' \in M$، $r' \in R$ و $s, s' \in S$ هستند که m'' و r' عناصری S-اولیه باشند و $m' = s'm''$ و $r = sr'$. حال داریم:

$$0 \neq x = s(r'm) = ts'(m'')$$

---

1. M-splitting
2. compactly S-atomic

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

که در آن طبق خاصیت (۳) شکافنده بودن برای S، $r'm$ عنصری S-اولیه است. پس طبق خاصیت (۲) شکافنده بودن، $s \sim^S ts'$ بالاخص $s = t'ts'$ برای یک $t' \in S$. حال $x = t'ts'r'm \in Rtm$، چنان‌که ادعا شده بود.

حال با اعمال قضیه فوق و نتیجه ۴-۹ از [۱۰] نتیجهٔ ۱۰ به‌دست می‌آید:

نتیجهٔ ۱۰. فرض کنید $S \subset T$ دو زیرمجموعهٔ ضربی بسته از دامنه صحیح R باشند و $T' = S^{-1}T$. هم‌چنین فرض کنید M یک R-مدول فارغ از تاب است و S حافظ زیرمدول‌های دوری M. اگر $\mathcal{P}$ یکی از خاصیت‌های تجزیهٔ یکتا داشتن، تجزیهٔ متناهی داشتن، نیم‌عاملی بودن یا تجزیهٔ کراندار داشتن باشد، آن‌گاه احکام زیر معادلند.

۱. M خاصیت را نسبت به T دارد.

۲. M خاصیت $\mathcal{P}$ را نسبت به S دارد و M_S خاصیت $\mathcal{P}$ را نسبت به T' دارد.

۳. R درون S دارای خاصیت $\mathcal{P}$ است و M_S خاصیت $\mathcal{P}$ را نسبت به T' دارد.

اگر اضافه بر آن R یک R-مدول S-اتمی فشرده باشد، آن‌گاه احکام فوق برای $\mathcal{P}$= اتمی بودن نیز معادل‌اند.

توسیع‌های لَخت مدول‌ها

در [۵] توسیع‌های حلقه‌ای لَخت معرفی شده است و در [۲] نحوهٔ انتقال خواص تجزیه‌ای از یک دامنهٔ صحیح به دامنهٔ دیگر در یک توسیع لَخت بررسی شده است. هم‌چنین در [۱] ضمن تعمیم این مفهوم به حلقه‌های دارای مقسوم علیه صفر و معرفی شکل ضعیف‌تری از آن، ارتباطش با نظریهٔ تجزیه بررسی شده است. در اینجا شکل کلی‌تری از این مفهوم را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که وقتی M فارغ از تاب باشد و S شکافنده M یا حافظ زیرمدول‌های دوری M، آن‌گاه $M \leq M_S$ یک توسیع لخت است. هم‌چنین ارتباط توسیع‌های لخت با نظریهٔ تجزیه در مدول‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱۱. گیریم T_1 و T_2 زیرمجموعه‌های ضربی بسته حلقه های به‌ترتیب R_1 و R_2 باشند و هم‌ریختی حلقه‌ای $f\colon R_1 \to R_2$ به‌گونه‌ای موجود باشد که $f(T_1) \subseteq T_2$. هم‌چنین فرض کنید M_2 یک R_2-مدول و M_1 یک R_1-زیرمدول M_2 باشد. گوییم $M_1 \leq M_2$ یک توسیع (T_1, T_2)-لَخت (متناظراً، (T_1, T_2)-لَخت ضعیف) است، هرگاه اگر $xm \in M_1$ (متناظراً، $0 \neq xm \in M_1$) که در آن $0 \neq m \in M_2$ و $0 \neq x \in T_2$، آن‌گاه یک $u \in \mathrm{U}(R_2)$ یافت شود که $xu \in f(T_1)$ و $u^{-1}m \in M_1$ در حالتی‌که $T_1 = R_1, T_2 = R_2$، صرفاً می‌نویسیم $M_1 \leq M_2$ یک توسیع لَخت یا لَخت ضعیف است.

قضیهٔ ۱۲ مثال‌هایی از توسیع‌های لخت می‌دهد. در این‌جا هرگاه از توسیع $M \leq M_S$ صحبت می‌کنیم، منظور حالتی است که

$$R_1 = R, R_2 = R_S, M_1 = \{\frac{m}{1} | m \in M\} \subseteq M_S = M_2$$

و $f\colon R \to R_S$ هم‌ریختی کانونی است. هم‌چنین اگر $x \in M_S$، منظور از $x \in M$ این است که $x = m/1$ برای یک $m \in M$ و اگر $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{R}$ و $y \in R_S$، منظور از $y \in \mathrm{T}$ این است که $y = t/1$ برای یک $t \in \mathrm{T}$.

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید $S \subseteq T$ زیرمجموعه‌های ضربی بسته‌ای از R باشند و $T' = S^{-1}T$. آن‌گاه

۱. اگر M فارغ از تاب باشد و S حافظ زیرمدول‌های دوری M، آن‌گاه $M \leq M_S$ یک توسیع (T, T')-لخت است؛

۲. اگر S شکافنده M و R یک R-مدول S-اتمی فشرده باشد، آن‌گاه $M \leq M_S$ یک توسیع (T,T')-لخت ضعیف است.

اثبات: (۱) فرض کنید

$$0 \neq x = t/v \in T' \text{ و } 0 \neq y = m/u \in M_S$$

که $t \in T, m \in M, u, v \in S$ و داشته باشیم $xy = tm/vu \in M$، مثلا $xy = m_0/1$ برای عنصری چون $m_0 \in M$. بنابر نتیجه ۴، یک $m' \in M$ و یک $w \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $m = wm'$ و برای هر $s \in S$ داشته باشیم $Rm' \cap sM = Rsm'$. حال اگر قرار دهیم $z = twm' = uvm_0$، آن‌گاه

$$z \in Rm' \cap (uv)M = Ruvm'$$

و $z = ruvm'$ برای یک $r \in R$. در نتیجه $twm' = ruvm'$ و $tw = ruv$. از آن‌جاکه $t, w \in T$، به‌دست می‌آید $ruv \in T$ و چون T اشباع شده است، $r \in T$. حال اگر قرار دهیم:

$$a = \frac{rv}{t} = \frac{w}{u} \in \mathrm{U}(R_S)$$

آن‌گاه

$$a^{-1}y = \frac{u}{w}\frac{m}{u} = \frac{uwm'}{wu} = m' \in M \text{ و } ax = \frac{rv}{t}\frac{t}{v} = r \in T$$

و حکم ثابت می‌شود.

۲. فرض کنید

$$0 \neq x = t/v \in T' \text{ و } 0 \neq y = m/u \in M_S$$

که $t \in T, m \in M, u, v \in S$ و داشته باشیم $0 \neq xy = tm/vu \in M$، مثلاً $xy = m_0/1$ برای یک $m_0 \in M$. پس $w \in S$ هست که $wtm = wuvm_0$. طبق فرض هم M و هم، R-مدول‌هایی S-اتمی فشرده هستند، بالاخص عناصر

$$m', m'_0 \in M, t' \in R, s_1, s_2, s_3 \in S$$

یافت می‌شوند که m', t', m'_0 عناصری S-اولیه باشند و $t = s_1t', m = s_2m', m_0 = s_3m_0'$. دقت کنید که چون T اشباع شده است، در واقع $t' \in T$. بنابراین

$$0 \neq ws_1s_2(t'm') = wtm = wuvm_0 = wuvs_3(m'_0)$$

اما بر مبنای خاصیت (۳) شکافندگی، $t'm'$ عنصری S-اولیه است و در نتیجه از خاصیت (۲) شکافندگی، به‌دست می‌آید که $ws_1s_2 \sim^S wuvs_3$، بالاخص $s \in S$ موجود است که $ws_1s_2 = swuvs_3$. قرار دهید

$$a = \frac{s_2}{u} = \frac{swvs_3}{ws_1} = \frac{svs_3}{s_1} \in \mathrm{U}(R_S).$$

حال داریم:

$$a^{-1}y = \frac{u}{s_2}\frac{m}{u} = \frac{us_2m'}{s_2u} = \frac{m'}{1} \in M \text{ و } ax = \frac{svs_3}{s_1}\frac{t}{v} = \frac{svs_3s_1t'}{s_1v} = \frac{ss_3t'}{1} \in T. \square$$

با توجه به قضیهٔ ۱۲ می‌بینیم که تحت مفروضات نتیجهٔ ۱۰، توسیع $M \leq M_S$ یک توسیع (T,T')-لخت است.

در ادامه نشان می‌دهیم که برخی قسمت‌های نتیجهٔ ۱۰ در واقع به‌علت همین نکته برقرار است و می‌توان این بخش‌ها

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.1.8.0]
[DOI: 10.29252/mmr.5.1.107]

را کلی‌تر بیان کرد. از این به بعد فرض می‌کنیم $S \subseteq T$ زیرمجموعه‌های ضربی بسته‌ای از R باشند و قرار می‌دهید $\mathrm{T}' = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{T}$.

گزارهٔ ۱۳. فرض کنید $\mathrm{M} \leq \mathrm{M_S}$ یک توسیع $(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$-لخت ضعیف باشد و $0 \neq \mathrm{m} \in \mathrm{M}$.

۱. اگر $S \cap \mathrm{Z}(M) = \emptyset$ و m در M عنصری T-اولیه (یا به‌ترتیب، T-اولیهٔ قوی، T-اولیهٔ بسیار قوی) باشد، آن‌گاه در M_S عنصری T'-اولیه (به‌ترتیب، T'-اولیهٔ قوی، T'-اولیهٔ بسیار قوی) است.

۲. اگر m/1 در M_S عنصری T'-اولیهٔ بسیار قوی باشد و m در M عنصری S-اولیه (یا به‌ترتیب، S-اولیهٔ قوی، S-اولیهٔ بسیار قوی) باشد، آن‌گاه m در M عنصری T-اولیه (به‌ترتیب، T-اولیهٔ قوی، T-اولیهٔ بسیار قوی) است.

۳. اگر 0≠ t∈T در R عنصری S-اولیه (یا به‌ترتیب، S-اولیهٔ قوی، S-اولیهٔ بسیار قوی) باشد و t/1 در R_S تحویل ناپذیر بسیار قوی باشد، آنگاه t در R تحویل‌ناپذیر (به‌ترتیب، تحویل‌ناپذیر قوی، تحویل‌ناپذیر بسیار قوی) است.

اثبات: ۱. فرض کنید $m = tm'$ که $m' \in M_S$ و $t \in T'$. طبق تعریف توسیع لخت ضعیف، $u \in \mathrm{U}(R_S)$ هست که $tu \in T, u^{-1}m' \in M$. چون $m = (tu)(u^{-1}m')$ عنصری T-اولیه است، داریم $m \sim^{T} u^{-1}m'$ و در نتیجه $m \sim^{T'} m'$ زیرا $u^{-1} \in \mathrm{U}(R_S) \subseteq T'$. اثبات حالات دیگر مشابه است.

۲. برای حالت «بسیار قوی» حکم را ثابت می‌کنیم؛ باقی حالات مشابه است. فرض کنید $m = tm'$ که t∈T و $m' \in M$. چون m/1 در M_S عنصری T'-اولیهٔ بسیار قوی است، باید $\frac{t}{1} \in \mathrm{U}(R_S)$ و در نتیجه $\frac{t}{1} = \frac{s_1}{s_2}$ برای $s_1, s_2 \in S$. پس برای یک s∈S داریم $ss_2t = ss_1$ و از اشباع شده بودن S نتیجه می‌شود t∈S. حال از اینکه m عنصری S-اولیهٔ بسیار قوی است نتیجه می‌گیریم که t∈U(S) و حکم ثابت می‌شود.

۳). برای حالت «قوی» حکم را ثابت می‌کنیم؛ باقی حالات مشابه است. فرض کنید $t = ab$ که a,b∈R. توجه کنید که در واقع a,b∈T زیرا ab∈T. چون t/1=(a/1)(b/1)، طبق فرض یکی از a/1 یا b/1 مثلا a/1 در R_S وارون‌پذیر است. مانند اثبات (۲) نتیجه می‌شود a∈S. چون t عنصری S-اولیهٔ قوی است، باید یک u∈U(R) باشد که t=ub یعنی $t \approx b$ و اثبات پایان می‌پذیرد.

برای بیان ارتباط تجزیه در توسیع $M \leq M_S$ زمانی که (T, T')-لخت ضعیف باشد نیاز به لم‌های زیر داریم.

لم ۱۴. فرض کنید M فارغ از تاب است. اگر M نسبت به S تجزیهٔ یکتا یا متناهی داشته باشد یا نیم‌عاملی باشد، آن‌گاه نسبت به S تجزیهٔ کراندار دارد. هم‌چنین اگر M نسبت به S تجزیهٔ کراندار داشته باشد، آن‌گاه نسبت به S اتمی است.

اثبات: حکم دوم در قضیهٔ ۳-۱(ii) از [۱۱] آمده است. قسمت اول برای تجزیهٔ یکتا نتیجه آنی بخش (i) قضیهٔ ۳-۱ آن مقاله است و برای دو خاصیت دیگر نیز به‌طور کاملاً مشابه اثبات می‌شود.

لم ۱۵. فرض کنید $M \leq M_S$ یک توسیع (T, T')-لخت ضعیف باشد و $S \cap \mathrm{Z}(M) = \emptyset$. اگر

$$m = t'_1 \cdots t'_k n', \text{ برای } m \in M, t'_1, \ldots, t'_k \in T', n' \in M_S$$

آن‌گاه عناصر $t_1 \ldots t_k \in T$ و $n \in M$ وجود دارند به‌طوری‌که $n \approx n'$ در M_S و برای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم $t_i \approx t'_i$ در R_S و $m = t_1 \cdots t_k n$.

اثبات: قرار دهید $u_0 = 1$. چون $0 \neq t_1'(t_2' \cdots t_k'n') \in M$ و طبق تعریف لخت ضعیف بودن، $u_1 \in \mathrm{U}(R_S)$ هست که

$$t_1 = u_1 u_0^{-1} t_1' \in T \text{ و } 0 \neq ({u_1}^{-1} t_2') t_3' \cdots t_k' n' \in M.$$

با اعمال دوباره لختی ضعیف بر $0 \neq ({u_1}^{-1} t_2') t_3' \cdots t_k' n' \in M$، $u_2 \in \mathrm{U}(R_S)$ به‌دست می‌آید به‌گونه‌ای‌که

$$t_2 = u_2 u_1^{-1} t_2' \in T \text{ و } 0 \neq ({u_2}^{-1} t_3') t_4' \cdots t_k' n' \in M.$$

با ادامه این روند برای هر $1 \leq i \leq k$، عنصر $u_i \in \mathrm{U}(R_S)$ به‌دست می‌آید به‌گونه‌ای‌که

$$t_i = u_i u_{i-1}^{-1} t_i' \in T \text{ و } n = u_k^{-1} n' \in M.$$

حال به‌راحتی دیده می‌شود که عناصر n و t_i معرفی شده خواص مورد ادعا را دارند.

لم ۱۶. فرض کنید $0 \neq m \in M$ عنصری S-اولیهٔ بسیار قوی باشد و $m = t_1 t_2 \cdots t_k m'$ که $m' \in M$ و برای هر i، $t_i \in R$. آنگاه m' و t_i ها همگی S-اولیهٔ بسیار قوی هستند.

اثبات: فرض کنید $m' = sm''$ برای $m'' \in M, s \in S$. آن‌گاه $m = s(t_1 \cdots t_k m'')$ و در نتیجه $s \in U(R)$. اثبات برای t_i ها نیز مشابه است.

قضیهٔ ۱۷. فرض کنید $M \leq M_S$ یک توسیع (T, T')-لخت ضعیف باشد.

۱. اگر M فارغ از تاب باشد و نسبت به S اتمی و نیز M_S نسبت به T' اتمی باشد، آن‌گاه M نسبت به T اتمی است.

۲. اگر $S \cap \mathrm{Z}(M) = \emptyset$، آن‌گاه M نسبت به T تجزیهٔ کراندار دارد اگر و تنها اگر نسبت به S تجزیهٔ کراندار داشته باشد و M_S نسبت به T' تجزیهٔ کراندار داشته باشد.

۳. اگر M فارغ از تاب باشد و نسبت به T تجزیهٔ یکتا داشته باشد (یا تجزیهٔ متناهی داشته باشد یا نیم‌عاملی باشد)، آن‌گاه نسبت به S نیز این خاصیت را دارد و M_S نیز نسبت به T' همین خاصیت را دارد.

اثبات: ۱. فرض کنید $0 \neq m \in M$. از آن‌جاکه بنابر فرض m یک S-تجزیهٔ اتمی مثل $m = s_1 \cdots s_k m'$ دارد، کافی است نشان دهیم m' که S-اولیه است دارای یک T-تجزیهٔ اتمی است. پس می‌توانیم از ابتدا فرض کنیم m عنصری S-اولیه است. حال m در M_S دارای یک T'-تجزیهٔ اتمی مثل $m = t'_1 \cdots t'_k n'$ است. بنابر لم ۱۵، عناصر $t_1 \ldots t_k \in T$ و $n \in M$ وجود دارند به‌طوری‌که $n \approx n'$ در M_S و برای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم $t_i \approx t_i'$ در R_S و $m = t_1 \cdots t_k n$. بنابر لم ۱۶، t_i ها و n، همگی S-اولیه‌اند (توجه کنید که چون M فارغ از تاب است، همهٔ انواع اولیه بودن با هم معادلند و نیز همه انواع تحویل‌ناپذیری بر هم منطبق‌اند). اما چون n'، T'-اولیه است و $n \approx n'$ پس n هم T'-اولیه است و در نتیجه بنابر گزاره ۱۳(۲)، T-اولیه است (در M). مشابهاً با اعمال گزارهٔ ۱۳ (۳) نتیجه می‌شود t_i ها در R تحویل‌ناپذیراند. یعنی $m = t_1 \cdots t_k n$ یک T-تجزیهٔ اتمی m است و حکم اثبات شده است.

۲. فرض کنید $S \cap \mathrm{Z}(M) = \emptyset$. اگر M نسبت به S تجزیهٔ کراندار داشته باشد و M_S نسبت به T' تجزیهٔ کراندار داشته باشد، آن‌گاه طبق قضیه ۳-۹ از [۱۱]، M نسبت به T تجزیهٔ کراندار دارد. برعکس فرض کنید M نسبت به T تجزیهٔ کراندار دارد. آن‌گاه بر مبنای قضیهٔ ۳-۸(i) از [۱۱]، M نسبت به S تجزیهٔ کراندار دارد. پس کافی است نشان دهیم M_S نسبت به T' تجزیهٔ کراندار دارد. چون هر عنصر M_S به‌صورت um است که $u \in \mathrm{U}(R_S)$ و $m \in M$، پس

کافی است نشان دهیم هر $0\neq m\in M$ در M_S نسبت به T' تجزیهٔ کراندار دارد. اگر $m=t'_1\cdots t'_k n'$ و $t'_i\in T'\setminus \mathrm{U}(R_S)$ و $n'\in M_S$، آن‌گاه بنابر لم ۱۵، $m=t_1\cdots t_k n$ که $t_i\in T\setminus \mathrm{U}(R)$ و $n\in M$. چون کران بالایی بر طول T-تجزیه‌های m در M وجود دارد، پس همان کران بالا باید از k بیش‌تر یا با آن مساوی باشد. یعنی همان کران بالا، برای طول T'-تجزیه‌های m در M_S هم یک کران بالا است.

۳. حال گیریم M فارغ از تاب بوده و نسبت به T تجزیهٔ یکتا داشته باشد. بنابر لم ۱۴، M نسبت به T تجزیهٔ کراندار دارد. بنابر قسمت (۲)، M نسبت به S و M_S نسبت به T' تجزیهٔ کراندار دارند. پس بر مبنای لم ۱۴، M نسبت به S و M_S نسبت به T'، اتمی هستند. حال نشان می‌دهیم هر عنصر ناصفر M_S مثل x=m/s که m∈ M و s∈ S، با تقریب T'-یکریختی یک T'-تجزیهٔ اتمی بیش ندارد. چون M نسبت به S اتمی است، پس $m=s'm'$ برای یک عنصر S-اولیه مثل $m'\in M$ و یک s∈ S. چون $x=(s'/s)m'$ و $s'/s\ \in \mathrm{U}(R_S)$، پس کافی است یکتایی تجزیه را برای m' ثابت کنیم.

پس از همان ابتدا فرض می‌کنیم x∈ M عنصری S-اولیه است. اما بنابر لم ۱۵، از هر T'-تجزیهٔ اتمی x در M_S یک T-تجزیه برای x در M با همان طول استخراج می‌شود که همانند اثبات بخش (۱) و با استفاده از لم ۱۶ و گزارهٔ ۱۳، یک T-تجزیهٔ اتمی برای x در M است. هم‌چنین این تجزیه استخراجی به‌عنوان یک T'-تجزیه در M_S و T'-تجزیه ابتدایی x در M_S با یکدگر T'-یکریخت هستند. بنابراین اگر x دو T'-تجزیهٔ غیر T'-یکریخت داشته باشد، T-تجزیه‌های استخراجی این دو نمی‌توانند با یک‌دیگر T-یک‌ریخت باشند (دقت کنید چون $\mathrm{U}(R)\subseteq \mathrm{U}(R_S)$، شریک بودن در R یا M، شریک بودن در R_S یا M_S را نتیجه می‌دهد). اما این خلاف فرض یکتایی T-تجزیه‌های x در M است و از این تناقض نتیجه می‌شود که M_S نسبت به T' تجزیهٔ یکتا دارد.

در نهایت باید نشان دهیم هر $0\neq m\in M$، با تقریب S-یک‌ریختی یک S-تجزیهٔ یکتا دارد. فرض کنید $m=s_1\cdots s_k n$ و $m=s'_1\cdots s'_{k'}n'$ دو S-تجزیهٔ اتمی m باشند. با جای‌گذاری T-تجزیه‌های اتمی n و n' به جای آن‌ها در این تساوی‌ها دو T-تجزیهٔ اتمی مثل

$$m=s_1\cdots s_k t_1\cdots t_l x \text{ و } m=s'_1\cdots s'_{k'}t'_1\cdots t'_{l'}x'$$

به‌دست می‌آید که t_i ها و t'_i ها در $T\setminus S$ هستند (زیرا n و n' عناصری S-اولیه‌اند و در تجزیه‌های اتمی آن‌ها نمی‌تواند عناصر S ظاهر شود). بنابر یکتایی T-تجزیه‌های اتمی m، بایستی دو تجزیهٔ فوق T-یک‌ریخت باشند. اما اگر مثلا $s_1\sim t'_1$ آنگاه $r\in R$ هست که $rt'_1=s_1\in S$ و نتیجه می‌شود $t'_1\in S$ که تناقض است. بنابراین در T-یک‌ریختی دو تجزیهٔ فوق باید هر s_i با یکی از s'_i ها شریک باشد و بالاعکس. پس $k=k'$ و مثلا $s_i=u_is'_i$ برای عناصر وارون‌پذیر u_i در R. چون M فارغ از تاب است، نتیجه می‌شود $n'=(u_1\cdots u_k)n$ و در نتیجه دو S-تجزیهٔ اتمی m با یک‌دیگر S-یک‌ریخت هستند. این اثبات (۳) را در مورد تجزیهٔ یکتا تمام می‌کند.

اثبات: برای تجزیهٔ متناهی مشابه اثبات فوق برای تجزیهٔ یکتا است. اگر مدول فارغ از تاب M نسبت به T نیم‌عاملی باشد نیز، کاملاً مشابه فوق نتیجه می‌شود که M نسبت به S اتمی است و M_S نسبت به T' نیم‌عاملی است. بنابراین تنها باید نشان دهیم اگر

$$m=s_1\cdots s_k n \text{ و } m=s'_1\cdots s'_{k'}n'$$

دو S-تجزیهٔ اتمی m∈ M ≠0 باشند، آن‌گاه $k = k'$. اگر طول T-تجزیه‌های اتمی $0 \neq x \in M$ و طول T'-تجزیه‌های اتمی $0 \neq y \in M_S$ را با به‌ترتیب $l_T(x)$ و $l_{T'}(y)$ نشان دهیم، آن‌گاه با جای‌گذاری T-تجزیه‌های اتمی n و n' به جای آن‌ها در S-تجزیه‌های اتمی مذکور برای m نتیجه می‌شود که

$$k' + l_T(n') = l_T(m) = k + l_T(n).$$

از طرف دیگر در اثبات نیم‌عاملی بودن M_S نسبت به T' (یا در واقع در اثبات یکتا بودن T-تجزیهٔ اتمی در M_S در بالا که عملاً نتیجه لم ۱۵ است)، دیده می‌شود که برای یک عنصر S-اولیه ناصفر مثل x∈ M داریم $l_{T'}(x) = l_T(x)$. هم‌چنین چون عناصر S در R_S وارون‌پذیر هستند پس $l_{T'}(m) = l_{T'}(n) = l_{T'}(n')$ بنابراین

$$k' + l_{T'}(m) = k' + l_{T'}(n') = k' + l_T(n') = l_T(m) = k + l_T(n) = k + l_{T'}(n) = k + l_{T'}(m)$$

و در نتیجه $k = k'$، چنان‌که ادعا شده بود.

منابع

1. Ağargün A. G., Anderson D. D., Valdes-Leon S., "Factorization in commutative rings with zero-divisors III", Rocky Mount. J. Math., 31 (2001) 1-21.
2. Anderson D. D., Anderson D. F., Zafrullah M., "Factorization in integral domains II", J. Algebra, 152 (1992) 78-93.
3. Anderson D. D., Valdes-Leon S., "Factorization in commutative rings with zero-divisors" Rocky Mount. J. Math., 26 (1996) 439-480.
4. Anderson D. D., Valdes-Leon S., "Factorization in commutative rings with zero-divisors II", Lecture Notes in Pure and Applied Math., Marcel Dekker, 189 (1997) 197-219.
5. Cohn, P. M., "Bezout rings and their subrings", Proc. Cambridge Philos. Soc., 64 (1968) 251-264.
6. Costa D. L., "Unique factorization in modules and symmetric algebras", Trans. Amer. Math. Soc., 224 (1976) 267-280.
7. Coykendall J., Smith W. W., "On unique factorization domains", J. Algebra, 332 (2011) 62-70.
8. Mooney C. P., "Generalized factorization in commutative rings with zero-divisors", PhD thesis, University of Iowa, (2013), Iowa City, USA.
9. Nagata M., "A remark on the unique factorization theorem", J. Math. Soc. Japan, 9 (1957) 143-145.
10. Nikseresht A., "Factorization in modules and splitting multiplicatively closed subsets", J. Korean Math. Soc., 55 (2018) 83-99.

11. Nikseresht A., Azizi A., "Factorization with respect to a divisor-closed multiplicative submonioid of a ring", Turk. J. Math., 41 (2017) 483-499.

12. Nikseresht A., Azizi A., "On factorization in modules", Comm. Algebra, 39 (2011) 292-311.

13. Zaks A., "Half-factorial domains", Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976) 721-724.