حل عددی دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین با استفاده از توابع کلاهی توسعه یافته

الناز بابایی، الهام السادات هاشمی‌زاده*
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرج، گروه ریاضی
دریافت ۹۶/۰۲/۰۹ پذیرش ۹۷/۰۴/۰۴

چکیده

دستگاهی از معادلات انتگرال می‌تواند مسائل مختلفی در علوم و مهندسی را توصیف کند. روش‌های عددی مختلفی برای تقریب جواب‌های دستگاه معادلات انتگرال خطی و غیرخطی وجود دارد. در این مقاله، یک روش عددی بر اساس توابع کلاهی توسعه یافته برای تقریب جواب‌های دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین ارائه شده است. روش ارائه شده دستگاه معادلات انتگرال را به دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی کاهش می‌دهد که به‌راحتی با روش‌های معمول عددی حل می‌شود. برای اثبات درستی و کارایی روش پیشنهادی، چند مثال عددی همراه با مقایسه با سایر روش‌های مشابه ارائه شده است که کارایی روش جدید و برتری آن نسبت به‌سایر روش‌های موجود را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین، توابع کلاهی توسعه یافته، ماتریس عملیاتی، دستگاه معادلات انتگرال.

مقدمه

معادلات انتگرال غیرخطی در بسیاری از مسائل فیزیک و مهندسی ظاهر می‌شوند [۱]. در سال‌های اخیر از توابع پایه‌ای مختلفی مانند پایه‌های متعامد یکه و موجک‌ها برای تخمین جواب‌های معادلات انتگرال استفاده شده است. بی‌آزار و همکارانش دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم غیرخطی را با استفاده از روش تجزیهٔ [۲] و روش موجک لژاندر [۳] حل کرده‌اند. ساهو[1] و ساها[2] روش هم‌مکانی برنشتاین [۴] را برای حل دستگاهی از معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین غیرخطی استفاده کرده‌اند. مالک‌نژاد و همکارانش در [۵]، معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم را با استفاده از ترکیب توابع لژاندر و بلاک-پالس حل کرده‌اند. در [۶] معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین با استفاده از ترکیب توابع لژاندر و بلاک-پالس به‌وسیلهٔ مالک نژاد و همکارانش حل‌شده است. هم‌چنین ترکیب توابع بسیار دیگری برای حل معادلات انتگرال استفاده شده‌اند. در [۷]، مالک نژاد و همکارانش ترکیب توابع متعامد یکه برنشتاین و بلاک-پالس را برای حل معادلات انتگرال فردهلم به‌کار برده‌اند. مسائل گوناگونی با استفاده از ترکیب توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای برنولی در [۸] به‌وسیلهٔ رزاقی و همکارانش حل شده است. هاشمی‌زاده و رستمی در [۹] معادلات

*نویسنده مسئول hashemizadeh@kiau.ac.ir

1. Suhu
2. Saha

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

انتگرال همرشتاین ترکیبی را با استفاده از روش هم‌محلی سینک[1] حل کرده‌اند. عسگری و همکارانش در [۱۰] معادلات انتگرال غیرخطی تصادفی را به‌وسیلهٔ ماتریس‌های عملیاتی برنشتاین حل کرده‌اند.

هم‌چنین دستگاه معادلات انتگرال، با استفاده از روش‌های عددی مختلفی تاکنون حل‌شده‌اند که به چند مورد از آن‌ها اشاره می‌کنیم. در [۱۱] بابلیان و مرداد دستگاه معادلات انتگرال خطی و غیرخطی نوع دوم را با استفاده از توابع کلاهی حل کرده‌اند. الماسیه و رودکی در [۱۲] با استفاده از توابع مثلثی به حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم پرداخته‌اند. مالک نژاد، شاه رضایی و خاتمی در [۱۳] دستگاه معادلات انتگرال نوع دوم را با استفاده از توابع بلاک-پالس حل کرده‌اند. در [۱۴] ساهو و رای[2] با استفاده از ترکیب توابع لژاندر و بلاک-پالس به حل دستگاه معادلات انتگرال همرشتاین پرداخته‌اند. زدان[3] و الایداروس[4] در [۱۵] با استفاده از روش موجک لژاندر دستگاه معادله انتگرال را حل کرده‌اند. در [۱۶]، مالک نژاد و همکارانش ماتریس عملیاتی برنشتاین را برای حل دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم- ولترا به‌کار برده‌اند. رودکی و الماسیه در [۱۷]، به حل دستگاه معادلات انتگرال با استفاده از توابع پایه‌ای دلتا پرداخته‌اند. حسام‌الدینی و شهبازی در [۱۸]، دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- ولترا را با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین و ترکیب توابع بلاک- پالس و برنشتاین حل کرده‌اند. حسن[5] و همکارانش در [۱۹]، روش آیتکن[6] در روش هسته تکراری را برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- ولترا به‌کار برده‌اند. در [۲۰]، نظری و همکارانش روشی بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی ارائه داده‌اند. رحیم خانی و همکارانش با استفاده از ماتریس عملیاتی موجک برنولی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری را حل کرده‌اند [۲۱]، [۲۲]، [۲۳].

در این مقاله، این دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم را بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^{l} g_{i,j} y_j(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \int_0^1 K_{i,j}(x,t) F_{i,j}\left(t, y_j(t)\right) dt, D = [0,1], \quad i = 1,2,\ldots,l \qquad (۱)$$

که در این‌جا، f_i و $K_{i,j}$ توابع معلوم و $y_j(x)$ توابع مجهول برای $i, j = 1,2,\ldots,l$ هستند.

در روش پیشنهادی، از توابع کلاهی توسعه یافته برای حل دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی فردهلم- همرشتاین استفاده می‌شود. در این روش دستگاه معادلات انتگرال به دستگاهی از معادلات جبری کاهش پیدا می‌کند و این دستگاه از معادلات جبری با استفاده از روش عددی نیوتن حل می‌شود. نتایج حاصل از این روش با نتایج متناظر حاصل از روش‌های دیگر مقایسه می‌شوند.

طرح کلی این مقاله بدین‌شرح است: در بخش ۲، توابع کلاهی توسعه یافته و جزئیات آن شرح داده می‌شود. در بخش ۳، از مجموعه توابع کلاهی توسعه یافته برای تقریب جواب دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین استفاده می‌شود. آنالیز همگرایی روش در بخش ۴ بررسی شده است. در بخش ۵، تعداد عمیات لازم محاسبه شده است. در

1. Sinc
2. Ray
3 Zedan
4. Alaidarous
5. Hasan
6. Aitken

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

بخش ۶، به حل مثال‌های عددی مختلف با استفاده از روش ارائه‌شده پرداخته شده و در انتها با یک نتیجه‌گیری در بخش ۷ مقاله را به پایان می‌رسانیم.

توابع کلاهی توسعه یافته و خواص آن‌ها

تعریف: یک مجموعهٔ $(m+1)$تایی از توابع کلاهی توسعه یافته[1] $(MHFs)$ شامل $(m+1)$ تابع هستند که بدین‌صورت تعریف می‌شوند [۲۴]:

$$h_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}(x-h)(x-2h) & 0\le x\le 2h\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

اگر i فرد باشد و $1\le i\le m-1$،

$$h_i(x)=\begin{cases}\frac{-1}{h^2}\big(x-(i-1)h\big)\big(x-(i+1)h\big) & (i-1)h\le x\le (i+1)h\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

اگر i زوج باشد $2\le i\le m-2$،

$$h_i(x)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}\big(x-(i-1)h\big)\big(x-(i-2)h\big) & (i-2)h\le x\le ih\\ \frac{1}{2h^2}\big(x-(i+1)h\big)\big(x-(i+2)h\big) & ih\le x\le (i+2)h\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

و

$$h_m(x)=\begin{cases}\frac{1}{2h^2}\big(x-(1-h)\big)\big(x-(1-2h)\big) & (i-1)h\le x\le (i+1)h\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

که در این‌جا $m\ge 2$ یک عدد زوج است و $h=\frac{1}{m}$.

متناظر با تعریف $MHFs$ داریم:

$$h_i(jh)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases} \qquad (۲)$$

$$h_i(x)h_J(x)=\begin{cases}0, & ieven,|i-j|\ge 3\\ 0, & iodd,|i-j|\ge 2\end{cases} \qquad (۳)$$

و

$$\sum_{i=0}^{m}h_i(x)=1$$

توابع $MHFs$ را به‌صورت بردار $H(x)$ می‌نویسیم:

1 Modification of Hat Functions

$$H(x)=\left[h_0(x),h_1(x),...,h_m(x)\right]^T,\ x\in D \tag{۴}$$

هر تابع دلخواه f در D را با استفاده از توابع $MHFs$ می‌توان بسط داد [۲۱]:

$$f(x)\approx F^T H(x)=H^T(x)F$$

در این‌جا:

$$F=[\,f_0,f_1,...,f_m]^T$$

و

$$f_i=f(ih),\ i=0,1,...,m.$$

به‌طور مشابه هر تابع دلخواه دو متغیره، k در $D\times D$ را با استفاده از توابع $MHFs$ می‌توانیم بدین‌صورت بسط دهیم:

$$k(x,y)\approx H^T(x)KH(y)$$

در این‌جا $H(x)$ و $H(\mathrm{y})$ بردارهای $(m+1)$-تایی از توابع $MHFs$ هستند و K ماتریسی $(m+1)\times(m+1)$ از آن‌ها است.

متناظر با (۲) و بسط، $\int_0^x h_i(y)dy,\ \ i=0,1,...,m$ به‌وسیلهٔ MHF، انتگرال بردار $H(x)$ تعریف شده در رابطهٔ (۴) را می‌توان به‌صورت (۵) بیان می‌شود:

$$\int_0^x H(y)dy\approx P_1H(x). \tag{۵}$$

که در این‌جا P_1 ماتریسی بدین‌صورت است:

$$P_1=\frac{h}{12}\begin{pmatrix}0&5&4&4&4&4&4&\cdots&4&4\\0&8&16&16&16&16&16&\cdots&16&16\\0&-1&4&9&18&8&8&\cdots&8&8\\0&0&8&16&16&16&16&\cdots&16&16\\0&0&0&-1&4&9&8&\cdots&8&8\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&0&0&\cdots&8&16\\0&0&0&0&0&0&0&\cdots&-1&4\end{pmatrix}$$

از (۲) و (۴) داریم:

$$H(x)H^{T}(x)=\begin{pmatrix}
h_0^2(x) & h_0(x)h_1(x) & h_1(x)h_2(x) & & & & & & & \\
h_1(x)h_0(x) & h_1^2(x) & h_1(x)h_2(x) & & & & & & & \\
h_2(x)h_0(x) & h_2(x)h_1(x) & h_2^2(x) & h_2(x)h_3(x) & h_2(x)h_4(x) & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
 & & & & & h_{m-2}(x)h_{m-4}(x) & h_{m-2}(x)h_{m-3}(x) & h_{m-2}^2(x) & h_{m-2}(x)h_{m-1}(x) & h_{m-2}(x)h_m(x) \\
 & & & & & & & h_{m-1}(x)h_{m-2}(x) & h_{m-1}^2(x) & h_{m-1}(x)h_m(x) \\
 & & & & & & & h_m(x)h_{m-2}(x) & h_m(x)h_{m-1}(x) & h_m^2(x)
\end{pmatrix}$$

و

$$\int_0^1 H(x)H^{T}(x)dx=P_2 \tag{۶}$$

در این‌جا P_2 یک ماتریس $(m+1)\times(m+1)$ بدین‌صورت است:

$$P_2=\frac{h}{15}\begin{pmatrix}
4 & 2 & -1 & & & & & & & & \\
2 & 16 & 2 & 0 & & & & & & & \\
-1 & 2 & 8 & 2 & -1 & & & & & & \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & & \\
 & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & & & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & \\
 & & & & & & 0 & 2 & 16 & 2 & \\
 & & & & & & & -1 & 2 & 4 &
\end{pmatrix}$$

متناظر با (۲) و بسط $H(x)H^{T}(x)$ به‌وسیلهٔ MHF ها به‌دست می‌آوریم:

$$H(x)H^{T}(x)\approx diag\left(H^{T}(x)\right)$$

بنابراین داریم:

$$H(x)H^{T}(x)F\approx \tilde{F}H(x) \tag{۷}$$

در این‌جا F یک بردار $(m+1)$تایی و $\tilde{F}$ یک ماتریس قطری $(m+1)\times(m+1)$ است. هم‌چنین، اگر A یک ماتریس $(m+1)\times(m+1)$ باشد، داریم:

$$H^{T}(x)AH(x)\approx H^{T}(x)\hat{\mathrm{A}} \tag{۸}$$

در این‌جا $\hat{\mathrm{A}}$ برداری $(m+1)$تایی با اعضای روی قطر اصلی از ماتریس A است.

حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی

در این بخش، با استفاده از توابع کلاهی توسعه یافته ($MHFs$) به حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین نوع دوم که در (۱) تعریف شده است، می‌پردازیم.

به‌منظور حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین بدین‌صورت:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]

[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

$$\sum_{j=1}^{l} g_{i,j} y_j(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \int_0^1 K_{i,j}(x,t) F_{i,j}\left(t, y_j(t)\right) dt, \tag{۹}$$

با استفاده از توابع MHF، تقریب و خواص این توابع بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$f(x) \approx F^T H(x) = H^T(x) F \tag{۱۰}$$

$$k(x,y) \approx H^T(x) K H(\mathrm{y}) \tag{۱۱}$$

$$\int_0^1 H(x) H^T(x) dx = P_2 \tag{۱۲}$$

$$H(x) H^T(x) F \approx \tilde{F} H(x) \tag{۱۳}$$

$$H^T(x) A H(x) \approx H^T \hat{\mathrm{A}} \tag{۱۴}$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۰) توابع y_j و f بسط داده می‌شوند:

$$\begin{cases} y_j(x) \approx H^T(x) y_j \\ f(x) \approx H^T(x) F \end{cases} \tag{۱۵}$$

هم‌چنین با استفاده از رابطه (۱۱) کرنل $k_{i,j}$ بسط داده می‌شود:

$$k_{i,j}(x,t) \approx H^T(x) k_{i,j} H(t) \tag{۱۶}$$

با تعریف مجهول کمکی $R_{i,j}(t)$، تابع غیرخطی $F_{i,j}(x,y)$ به‌صورت (۱۷) برابر با مجهول کمکی در نظر گرفته می‌شود و سپس با استفاده از رابطهٔ (۱۰) بدین‌صورت بسط داده می‌شود:

$$F_{i,j}\left(t, y(t)\right) = R_{i,j}(t) \approx H^T(t) R_{i,j} \tag{۱۷}$$

با جای‌گذاری روابط (۱۷)، (۱۶)، (۱۵) در رابطهٔ (۹) و تبدیل $\approx$ به $=$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l} g_{i,j} H^T(x) y_j &= H^T(x) F + \sum_{j=1}^{l} \int_0^1 H^T(x) k_{i,j} H(t) H^T(t) R_{i,j} dt \\ &= H^T(x) F + \sum_{j=1}^{l} H^T(x) k_{i,j} \int_0^1 H(t) H^T(t) R_{i,j} dt \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۲) رابطهٔ (۱۷) بدین‌صورت تبدیل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{l} g_{i,j} H^T(x) y_j = H^T(x) F + H^T(x) \sum_{j=1}^{l} k_{i,j} P_2 R_{i,j}.$$

با توجه به نامنفرد بودن ماتریس P_2 در (۶)،

$$\sum_{j=1}^{l} g_{i,j} y_j = F + \sum_{j=1}^{l} k_{i,j} P_2 R_{i,j} \tag{۱۹}$$

باهم محلی کردن رابطهٔ (۱۷) در نقاط $t_r = \dfrac{2r-1}{2(m+1)}, \quad r = 1,\ldots,m+1$ داریم:

$$H^T(t) R_{i,j} = F_{i,j}\left(t_r, H^T(t_r) y_j\right), r = 1,\ldots,m+1 \;\; i,j = 1,\ldots,l \tag{۲۰}$$

در این صورت با استفاده از رابطهٔ (۱۹) و (۲۰) در مجموع $\left(l^2+l\right)\left(m+1\right)$ معادله به‌وجود می‌آید. از طرفی به تعداد l بردار y_j که هرکدام $\left(m+1\right)$ مؤلفهٔ مجهول دارند و نیز l^2 بردار $R_{i,j}$ که هر یک $\left(m+1\right)$ مؤلفهٔ مجهول دارند

در مجموع $\left(l^2+l\right)\left(m+1\right)$ مجهول وجود دارد، بنابراین با حل دستگاه (۱۹) و (۲۰) که شامل $\left(l^2+l\right)\left(m+1\right)$ معادله و مجهول است، جواب دستگاه معادله انتگرال تعریف شده در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

آنالیز همگرایی

در این بخش همگرایی روش ارائه‌شده را بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم روش $MHFs$ دارای مرتبه همگرایی $O\left(h^3\right)$ است. دستگاه معادله انتگرال تعریف شده در (۱) را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{j=1}^{l} g_{i,j} y_j(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{l}\int_0^1 K_{i,j}(x,t) F_{i,j}\left(t, y_j(t)\right)dt, D=\left[0,1\right], i=1,2,...,l.$$

می‌توان این دستگاه را بدین‌صورت بازنویسی کرد:

$$gy\left(x\right) = f\left(x\right) + \int_0^1 K\left(x,t\right) F\left(t, y\left(t\right)\right)$$

که در این‌جا داریم:

$$g = g\left[i,j\right] \qquad i,j = 1,2,...,l.$$

که $g\left[i,j\right]$ها اعداد ثابتی هستند و

$$y\left(x\right) = \left[y_1(x), y_2\left(x\right),...., y_l\left(x\right)\right]^T$$
$$f\left(x\right) = \left[f_1\left(x\right), f_2\left(x\right),..., f_l\left(x\right)\right]^T$$
$$K\left(x,t\right) = \left[K_{i,j}\left(x,t\right)\right] \qquad i,j = 1,2,\ldots,l.$$

هم‌چنین تعریف می‌کنیم:

$$\left\|u\right\| = \max_{i=1,2,...,l}\left\|u_i\right\|_\infty \tag{۲۱}$$

که در این‌جا:

$$u\left(x\right) = \left[u_1\left(x\right), u_2\left(x\right),..., u_l\left(x\right)\right] \tag{۲۲}$$

و

$$\left\|u\right\| = \max_{i=1,2,...,l}\sum_{j=0}^{l}\left\|u_{i,j}\right\|_\infty \tag{۲۳}$$

در این‌جا:

$$u = \left[u_{i,j}\right] \; i,j = 1,2,...,l \tag{۲۴}$$

قضیهٔ ۱. فرض کنید $x_j = jh, j = 1,2,...,m$ و $u_{i,m}$بسط توابع u_i به‌وسیلهٔ $MHFs$ است. تعریف می‌کنیم [۲۴]:

$$u_{i,m}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{m} u_i\left(x_j\right) h_i\left(x\right), i = 1,2,...,n$$

فرض کنیم:

$$e_{i,m}\left(x\right) = u_i(x) - u_{i,m}\left(x\right), x \in D,$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

آن‌گاه:

$$\left\| e_{i,m} \right\| = O\left(h^3\right).$$

لم ۲: فرض کنید $u(x)$ رابطهٔ تعریف شده در (۲۲) باشد و $u_m(x)$ تقریب $u(x)$ با استفاده از $MHFs$ باشد و $e_u(x) = u(x) - u_m(x)$ آن‌گاه:

$$\left\| e_u \right\| = O\left(h^3\right).$$

اثبات: از رابطهٔ (۲۱) داریم:

$$\left\| e_u \right\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \left\| u_i - u_{i,m} \right\|_\infty$$

و از (۱) داریم: $\left\| u_i - u_{i,m} \right\|_\infty \le C_i h^3$. فرض کنید C_r بیشینهٔ مقادیر C_i, i ، $i = 1,2,\dots,n$ باشد، آن‌گاه:

$$\left\| e_u \right\| \le C_r h^3. \qquad (۲۵)$$

قضیهٔ ۳.[۲۴] قرار دهید $x_k = y_k = kh, k = 0,1,\dots,m$ و $u_{i,j,m}(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} u_{i,j}\left(x_k, y_l\right) h_k(x) h_l(y)$ که $u_{i,j,m}$ بسط $MHFs$ تابع $u_{i,j}$ است، آن‌گاه:

$$\left\| e_{i,j,m} \right\| = O\left(h^3\right).$$

که در این‌جا:

$$e_{i,j,m}(x,y) = u_{i,j}(x) - u_{i,j,m}(x,y),\ (x,y) \in D \times D,$$

لم ۴. فرض کنید $u_m(x,y)$ تقریب $MHFs$ از $u(x,y)$ باشد و $e_u(x,y) = u(x,y) - u_m(x,y)$ آن‌گاه:

$$\left\| e_u \right\| = O(h^3).$$

اثبات: از (۲۲) داریم:

$$\left\| e_u \right\| = \max_{i=1,2,..,n} \sum_{j=0}^{n} \left\| u_{i,j} - u_{i,j,m} \right\|_\infty$$

از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌گیریم که $\left\| u_{i,j} - u_{i,j,m} \right\| \le C_{i,j} h^3$. فرض کنید:

$$\sum_{j=0}^{n} C_{r,j} = \max_{i=1,2,..,n} \sum_{j=0}^{n} C_{i,j}$$

بنابراین:

$$\left\| e_u \right\| \le \left(\sum_{j=0}^{n} C_{r,j} \right) h^3 \qquad (۲۶)$$

که از رابطهٔ بالا لم نتیجه می‌شود.

$$\left\| e_u \right\| = O\left(h^3\right).$$

اکنون مفروضات زیر را در نظر می گیریم:

$(M۱)$ فرض کنید خطای تقریب جواب معادلهٔ (۱) به‌وسیلهٔ $MHFs$ بدین‌صورت تعریف شده است:

$$E_m = \left\| y - y_m \right\|.$$

$(M۲)$ فرض کنیدبرای توابع دلخواه y و p بر D، $F\left(t, y(t)\right)$ در شرط لیب‌شیتز صدق کند.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

$$\left\|F\left(0,y(0)\right)-F\left(0,q(0)\right)\right\|\leq L\left\|y-q\right\|$$

$(M۳)$ $\left\|F\left(0,y(0)\right)\right\|\leq N_1$

$(M۴)$ $\left\|K\right\|\leq M_1$

$(M۵)$ متناظر با لم ۱ و لم ۲ داریم:

$$E_f=\left\|e_f\right\|\leq C_1h^3$$
$$E_k=\left\|e_k\right\|\leq C_1^{'}h^3$$

$(M۶)$ فرض کنید:

$$LM_1<1$$

قضیهٔ ۵. فرض کنید y_m و y به‌ترتیب جواب‌های تقریبی و واقعی معادلهٔ (۱) هستند. هم‌چنین در مفروضات $(M۱)-(M۶)$ صدق می‌کنند. آن‌گاه داریم:

$$E_m\leq\frac{C_1h^3+C_1^{'}h^3N_1}{1-LM_1}$$

که در این‌جا C_1 ضریب تعریف شده در (۲۵) است.

اثبات: متناظر با معادلهٔ (۱) داریم:

$$y(x)-y_m(x)=f(x)-f_m(x)+\int_0^1\left(K(x,t)F\left(t,y(t)\right)-K_m(x,t)F\left(t,y_m(t)\right)\right)dt$$

بنابراین:

$$E_M\leq\left\|e_f(x)\right\|+\left\|K(x,t)F\left(t,y(t)\right)-K_m(x,t)F\left(t,y_m(t)\right)\right\| \tag{۲۷}$$

با استفاده از قضیهٔ (۳) و فرض‌های $(M۲)-(M۴)$ داریم:

$$\begin{aligned}E_m=\left\|y-y_m\right\|\leq\left\|f-f_m\right\|+\max_t\Big(&\left|K(x,t)F\left(t,y(t)\right)-K_m(x,t)F\left(t,y(t)\right)\right|\\&+\left|K_m(x,t)F\left(t,y(t)\right)-K_m(x,t)F\left(t,y_m(t)\right)\right|\Big)\\&\leq C_1h^3+C_1'h^3N_1+LM_1E_m\end{aligned} \tag{۲۸}$$

بنابراین:

$$E_M\leq\frac{C_1h^3+C_1^{'}h^3N_1}{1-LM_1}$$

لم ۶. فرض کنید $y_m(x)$ و $y(x)$ به‌ترتیب جواب‌های تقریبی و دقیق معادلهٔ (۱) باشند و

$$y_m=\left[y_{1,m}(x),y_{2,m}(x),\dots,y_{l,m}(x)\right]^T$$

آن‌گاه:

$$e_{i,m}=\left\|y_i-y_{i,m}\right\|=O\left(h^3\right).$$

اثبات: از قضیهٔ (۳-۴) داریم $E_m\leq Ch^3$ و متناظر با (۲۱) نتیجه می‌گیریم:

$$e_{i,m}\leq E_m\leq Ch^3.$$

و اثبات کامل است.

محاسبهٔ تعداد عملیات لازم

هدف این بخش، محاسبه تعداد عملیات به‌کار برده شده روش توابع کلاهی توسعه یافته برای حل دستگاه به‌دست آمده در معادلهٔ (۲۰) است. برای آسانی ابتدا همهٔ عملیات لازم برای معادلهٔ (۱۹) را محاسبه می‌کنیم. به آسانی می‌توانیم این محاسبات را برای دستگاه به‌دست آمده گسترش دهیم. تعداد عملیات به‌کار برده شده در روابط (۱۰) و (۱۴) و (۱۵)، $(m+1)$، در رابطهٔ (۱۱) $(m+1)^3$، در روابط (۱۲) و (۱۳) $(m+1)^2$، است. با استفاده از این محاسبات تعداد عملیات استفاده شده در رابطهٔ (۱۹)، $(m+1)^4$ است. دستگاه (۲۰) دارای $(l^2+l)(m+1)$ معادله است که هرکدام از این معادلات نیاز به $(m+1)^4$عملیات است. بنابراین تعداد عملیات لازم برای حل دستگاه (۲۰)، $(l^2+l)(m+1)^5$ است.

نتایج عددی

در این بخش به حل چند مثال عددی پرداخته‌شده است و نتایج حاصل از این روش با روش‌های دیگر مقایسه می‌شود.

مثال ۱: دستگاه معادله انتگرال فردهلم- همرشتاین [۱۴]:

$$\begin{cases} y_1(x) = \dfrac{23}{35}x + \int_0^1 xt^2 y_1^2(t)dt + \int_0^1 x^2 t y_2^2(t)dt \\ y_1(x) = \dfrac{11}{12}x^2 + \int_0^1 x^2 t y_1^2(t)dt - \int_0^1 y_2^2(t)dt \end{cases}$$

را بررسی می‌کنیم. $y_1(x)=x, y_2(x)=x^2$ جواب دقیق مسئله است. نتایج حاصل از این روش برای m=۳۲ و m=۱۲ و روش لژاندر و بلاک- پالس برای m=۴،n=۸ و m=۳،n=۴ در جدول ۱ آورده شده است. مشاهده می‌شود در شرایط یک‌سان روش توابع کلاهی توسعه یافته جواب‌های بهتری تولید می‌کند که کارایی روش را نشان می‌دهد. جدول ۲ شامل مقادیر قدر مطلق خطای حاصل از روش ارائه‌شده و روش لژاندر و بلاک-پالس هست که نتایج آن‌ها در این جدول با یک‌دیگر مقایسه شده که در شرایط یک‌سان روش توابع کلاهی کاهش خطای بیش‌تری را نشان می‌دهد. جدول ۳ شامل قدر مطلق خطای حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته برای مقادیر مختلف m است که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار m خطای حاصل کاهش یافته و تقریب بهتری برای جواب به‌دست می‌آید.

مثال ۲: دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین زیر را بررسی می‌کنیم [۴]:

$$\begin{cases} y_1(x) = 1 - \dfrac{17}{20}x - \dfrac{7}{6}x^2 + \int_0^1 xt^2 y_1^3(t)dt + \int_0^1 x^2 t y_2^2(t)dt \\ y_1(x) = 1 - \dfrac{17}{12}x + x^2 - \dfrac{31}{10}x^3 + \int_0^1 xt y_1^2(t)dt + \int_0^1 x^3 t y_2^4(t)dt \end{cases}$$

$y_1(x)=x+1, y_2(x)=x^2+1$ جواب دقیق مسئله است. جدول ۴ نتایج از روش را برای m=۳۲ و m=۱۲ و روش لژاندر و بلاک- پالس برای m=۴،n=۸ و m=۳،n=۴ را نشان می‌دهد مشاهده می‌شود در شرایط یک‌سان روش توابع کلاهی توسعه یافته جواب‌های بهتری تولید می‌کند. جدول ۵ شامل مقادیر قدر مطلق خطای حاصل از روش ارائه‌شده و روش لژاندر و بلاک-پالس است که در شرایط یک‌سان خطای روش توابع کلاهی کاهش بیش‌تری پیدا کرده است. قدر مطلق خطای حاصل از این روش به ازای مقادیر مختلف m در جدول ۶ آمده است. مشاهده می‌شود با افزایش مقدار m خطای حاصل کاهش یافته و تقریب بهتری برای جواب به‌دست می‌آید.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

مثال ۳: در این مثال به حل معادلهٔ [۱۰،۱۱]:

$$\begin{cases} y_1(x) = 2e^x + \dfrac{e^{x+1}-1}{x+1} - \int_0^1 e^{x-t} y_1(\mathrm{t})dt - \int_0^1 e^{(\mathrm{t}+2)x} y_2(\mathrm{t})dt \\ y_2(x) = e^x + e^{-x} + \dfrac{e^{x+1}-1}{x+1} - \int_0^1 e^{xt} y_1(\mathrm{t})dt - \int_0^1 e^{t+x} y_2(\mathrm{t})dt \end{cases}$$

می‌پردازیم، $y_1(x)=e^x, y_2(x)=e^{-x}$ جواب دقیق مسئله است. جدول ۷ نتایج حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته را به‌ازای m=۳۲ نشان می‌دهد که روش ارائه‌شده منجر به جواب‌های تقریبی مناسب می‌شود.

در جدول ۸ نتایج حاصل از این روش را با نتایج روش BPF و روش TF مقایسه می‌شود که نشان می‌دهد در شرایط یک‌سان خطای روش توابع کلاهی کم‌تر است.

جدول ۹ قدر مطلق خطای حاصل از روش را برای مقادیر مختلف m نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش مقدار m خطای حاصل از این روش کاهش‌یافته و تقریب بهتری برای جواب به‌دست می‌آید.

جدول ۱. جواب‌های تقریبی حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته و لژاندر و بلاک- پالس مثال ۱

جواب دقیق	جواب $(y_1(x),y_2(x))$ به‌دست‌آمده حاصل از روش توابع لژاندر و بلاک-پالس [۱۲] **m=۴ n=۸**	**m=۳ n=۴**	جواب $(y_1(x),y_2(x))$ به‌دست‌آمده حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته **m=۳۲**	**m=۱۲**	x
(۰/۰۴، ۰/۲)	(۰/۰۴، ۰/۲)	(۰/۰۴، ۰/۱۹۹۹۸۷)	(۰/۰۴، ۰/۲)	(۰/۰۴، ۰/۲۰۰۰۰۶)	۰/۲
(۰/۱۶، ۰/۴)	(۰/۱۶، ۰/۴)	(۰/۱۶، ۰/۳۹۹۹۷۵)	(۰/۱۶، ۰/۴)	(۰/۱۶، ۰/۴۰۰۰۱۳)	۰/۴
(۰/۳۶، ۰/۶)	(۰/۳۶، ۰/۶)	(۰/۳۶، ۰/۵۹۹۹۶۲)	(۰/۳۶، ۰/۶)	(۰/۳۶، ۰/۶۰۰۰۱۶)	۰/۶
(۰/۶۴، ۰/۸)	(۰/۶۴، ۰/۸)	(۰/۶۴، ۰/۷۹۹۹۵)	(۰/۶۴، ۰/۸۰۰۰۰۱)	(۰/۶۴، ۰/۸۰۰۰۲۶)	۰/۸

جدول ۲. قدر مطلق خطای حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته و لژاندر و بلاک- پالس مثال ۱

خطای مطلق $(y_1(x),y_2(x))$ حاصل از روش لژاندر و بلاک_پالس [۱۲] **m=۴n=۸**	**m=۳ n=۴**	خطای مطلق $(y_1(x),y_2(x))$ حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته **m=۳۲**	**m=۱۲**	x
(۳/۲۸۴۳E-۹، -۸ ۳/۸۰۶۶۴E)	(۱/۱۸۵۳۷E-۸، ۱/۲۵۰۱۵E-۵)	(۹/۷۱۱۹۹E-۱۲، ۱/۲۷۰۲۷E-۷)	(۳/۴۷۹۰۸E-۹، ۶/۳۸۳۵۳E-۳)	۰/۲
(۸/۳۱۳۷E-۸، ۷/۶۱۳۲۷E-۱)	(۴/۷۴۱۴۸E-۸، ۲/۵۰۰۳E-۵)	(۳/۸۸۴۸E-۱۱، ۲/۵۴۰۵۴E-۷)	(۱/۳۹۱۶۳E-۸، ۱/۲۷۶۷۱E-۵)	۰/۴
(۷/۹۵۵۸۷E-۸، ۱/۱۴۱۹E-۲)	(۱/۰۶۶۸۳E-۷، ۳/۷۵۰۴۵E-۵)	(۸/۷۴۰۷۹E-۱۱، ۳/۸۱۰۸۱E-۷)	(۳/۱۳۱۱۸E-۸، ۱/۹۱۵۰۷E-۵)	۰/۶
(۷/۲۵۴۸E-۸، ۱/۵۲۲۶۳E-۵)	(۱/۸۹۶۵۹E-۷، ۵/۰۰۰۶E-۵)	(۱/۵۵۳۹۲E-۱۰، ۵/۰۸۱۰۸E-۷)	(۵/۵۶۶۵۳E-۸، ۲/۵۵۳۴۲E-۵)	۰/۸

جدول ۳. قدر مطلق خطای روش توابع کلاهی توسعه یافته برای مقادیر مختلف m

m=۳۰	**m=۲۴**	**m=۱۶**	**m=۱۰**	x
(۷/۴۳۰۳۶E-۱۱، ۱/۶۴۴۱۸E-۱)	(۵/۴۵۴۱۷E-۱۱، ۴/۰۱۱۵E-۷)	(۶/۲۰۴E-۱۰، ۲/۰۲۶۲۲E-۶)	(۵/۰۳۶۸۵E-۸، ۱/۳۱۹۴۶E-۱)	۰/۲
(۷/۷۲۱۴۳E-۱۱، ۳/۲۸۸۳۷E-۵)	(۲/۱۸۱۶۷E-۱۰، ۸/۰۲۳E-۷)	(۲/۴۸۱۶E-۹، ۴/۰۵۲۴۵E-۶)	(۵/۱۴۷۴۲E-۸، ۲/۶۳۸۹۳E-۴)	۰/۴
(۱/۲۸۷۳۴E۱۰، ۴/۹۳۲۵۵E-۷)	(۴/۹۰۸۷۶E-۱۰، ۱/۲۰۳۴۵E-۶)	(۵/۵۸۳۶E-۹، ۶/۰۷۸۶۷E-۶)	(۵/۳۳۱۶۹E-۸، ۳/۹۵۸۳۹E-۹)	۰/۶
(۷/۲۸۸۵۷E-۱۰، ۶/۵۷۶۷۳E-۲)	(۸/۷۲۶۶۶E-۱۰، ۱/۶۰۴۶E-۶)	(۹/۹۲۶۳۹E-۹، ۸/۱۰۴۸۹E-۶)	(۵/۶۵۸۹۷E-۷، ۵/۲۷۷۸۶E-۱)	۰/۸

جدول۴. جواب‌های تقریبی حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته و لژاندر و بلاک- پالس مثال ۲

جواب دقیق	جواب $(y_1(x),y_2(x))$ به‌دست‌آمده حاصل از روش توابع لژاندر و بلاک-پالس [۱۲]		جواب $(y_1(x),y_2(x))$ به‌دست‌آمده حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته		x
	m =۴ n=۸	**m=۳ n=۴**	**m=۳۲**	**m=۱۲**	
(۱/۰۴، ۱/۲)	(۱/۰۴، ۱/۲)	(۱/۰۳۹۹۸، ۱/۹۹۶)	(۱/۰۴، ۱/۲)	(۱/۰۴۰۰۱، ۱/۲۰۰۰۲)	۰/۲
(۱/۱۶، ۱/۴)	(۱/۱۶، ۱/۴)	(۱/۱۵۹۹۸، ۱/۳۹۹۹۳)	(۱/۱۶، ۱/۴)	(۱/۱۶۰۰۱، ۱/۴۰۰۰۴)	۰/۴
(۱/۳۶، ۱/۶)	(۱/۳۶، ۱/۶)	(۱/۳۶۰۰۳، ۱/۵۹۹۹۲)	(۱/۳۶، ۱/۶)	(۱/۳۵۹۹۸، ۱/۶۰۰۰۴)	۰/۶
(۱/۶۴، ۱/۸)	(۱/۶۴، ۱/۸)	(۱/۶۴۰۱۶، ۱/۷۹۹۹۲)	(۱/۶۴، ۱/۸)	(۱/۶۳۹۹۲، ۱/۸۰۰۰۴)	۰/۸

جدول ۵. مطلق خطای حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته و لژاندر و بلاک- پالس مثال ۲

خطای مطلق $(y_1(x),y_2(x))$ حاصل از روش لژاندر و بلاک-پالس [۱۲]		خطای مطلق $(y_1(x),y_2(x))$ حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته		x
m=۴n=۸	**m=۳ n=۴**	**m= ۳۲**	**m=۱۲**	
(۷/۴۴۴۵۴E-۷، ۶/۶۱۹۰۳E-۳)	(۲/۰۰۰۷۷E-۵، ۴/۱۰۵۳۶E-۵)	(۲/۰۹۱۰۱E-۷، ۴/۲۵۸۶E-۷)	(۱/۰۴۶۸۱E-۵، ۲/۱۱۹۱E-۵)	۰/۲
(۶/۳۰۴۷۱E-۷، ۱/۱۰۲۹۹E-۳)	(۱/۶۴۷۶۸E-۵، ۶/۷۸۲۸۲E-۵)	(۱/۷۳۳۸۶E-۷، ۷/۰۲۵۰۸E-۷)	(۸/۶۳۵۴۸E-۶، ۳/۵۰۱۶۹E-۵)	۰/۴
(۶/۴۰۰۳۹E-۷، ۱/۳۲۳۲۶E-۴)	(۳/۴۲۸۵۳E-۵، ۸/۰۳۲۳۸E-۵)	(۳/۵۱۸۱۱E-۷، ۸/۳۲۲۶۹E-۷)	(۱/۷۶۵۶۹E-۵، ۴/۱۴۷۷۵E-۵)	۰/۶
(۶/۲۰۶۵۷E-۶، ۱/۳۲۲۷۲E-۲)	(۱/۵۶۳۵۷E-۴، ۷/۸۵۴۰۵E-۵)	(۱/۶۱۱۱۶E-۶، ۸/۱۴۳۶۶E-۷)	(۸/۰۵۸۴E-۵، ۴/۰۵۷۳E-۵)	۰/۸

جدول ۶. قدر مطلق خطای روش توابع کلاهی توسعه یافته برای مقادیر مختلف m

m=۳۰	**m=۲۴**	**m=۱۶**	**m=۱۰**	x
(۲/۷۰۵۲۴E-۷، ۵/۵۰۱۲۲E-۷)	(۶/۵۹۶۷۹E-۷، ۱/۳۴۱۱۵E-۶)	(۳/۳۱۶۶۷E-۶، ۶/۷۵۵۱۴E-۶)	(۲/۱۴۰۹۵E-۵، ۴/۳۵۹۷E-۵)	۰/۲
(۲/۲۴۳۲۷E-۷، ۹/۰۹۱۴۴E-۷)	(۵/۴۶۲۲E-۷، ۲/۲۱۶۴E-۶)	(۲/۷۵۷۰۶E-۶، ۱/۱۱۶۳۱E-۵)	(۱/۷۶۷E-۵، ۷/۲۰۳۶۹E-۵)	۰/۴
(۴/۵۵۳۰۹E-۷، ۱/۰۷۷۰۷E-۶)	(۱/۱۱۰۱۶E-۶، ۲/۶۲۵۷۳E-۶)	(۵/۶۱۲۱۱E-۶، ۱/۳۲۲۳۹E-۵)	(۳/۶۳۶۷۴E-۵، ۸/۵۳۱۹۹E-۵)	۰/۶
(۲/۰۸۵۱E-۶، ۱/۰۵۳۸۹E-۶)	(۵/۰۸۴۸۴E-۶، ۲/۵۶۹۱۵E-۶)	(۲/۵۶۲۹۱E-۵، ۱/۲۹۳۷۶E-۵)	(۱/۶۵۸۵۲E-۴، ۸/۳۴۴۵۷E-۵)	۰/۸

جدول ۷. نتایج حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته مثال ۳

جواب دقیق	جواب $y_2(x)$ حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته m=۳۲	جواب دقیق	جواب $y_1(x)$ حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته m=۳۲	x
۱	۱	۱	۱	۰
۰/۹۰۴۸۳۷	۰/۹۰۴۸۳۶	۱/۱۰۵۱۷	۱/۱۰۵۱۷	۰/۱
۰/۸۱۸۷۳۱	۰/۸۱۸۷۳۲	۱/۲۲۱۴	۱/۲۲۱۴	۰/۲
۰/۷۴۰۸۱۸	۰/۷۴۰۸۱۶	۱/۳۴۹۸۶	۱/۳۴۹۸۶	۰/۳
۰/۶۷۰۳۲	۰/۶۷۰۳۲	۱/۴۹۱۸۲	۱/۴۹۱۸۲	۰/۴
۰/۶۰۶۵۳۱	۰/۶۰۶۵۳	۱/۶۴۸۷۲	۱/۶۴۸۷۲	۰/۵
۰/۵۴۸۸۱۲	۰/۵۴۸۸۱۱	۱/۸۲۲۱۲	۱/۸۲۲۱۲	۰/۶
۰/۴۹۶۵۸۵	۰/۴۹۶۵۸۶	۲/۰۱۳۷۵	۲/۰۱۳۷۵	۰/۷
۰/۴۴۹۳۲۹	۰/۴۴۹۳۲۸	۲/۲۲۵۵۵	۲/۲۲۵۵۵	۰/۸
۰/۴۰۶۵۷	۰/۴۰۶۵۷	۲/۴۵۹۶	۲/۴۵۹۶	۰/۹
۰/۳۶۷۸۷۹	۰/۳۶۷۸۷۹	۲/۷۱۸۲۸	۲/۷۱۸۲۸	۱

جدول ۸. خطای حاصل روش توابع کلاهی توسعه یافته و روش BFP و روش TF مثال ۳

x	قدر مطلق خطای $\left(y_1(x), y_2(x)\right)$ حاصل از روش توابع کلاهی توسعه یافته m=۳۲	قدر مطلق خطای $\left(y_1(x), y_2(x)\right)$ حاصل از روش BPF [۱۱] m=۳۲	قدر مطلق خطای $\left(y_1(x), y_2(x)\right)$ حاصل از روش TF [۱۰] m=۳۲
۰	(۶/۴۳۳۶E-۷ ،۳/۳۹۴۵E-۷)	(۱/۰۴۷E-۲ ،۱/۵۳۰E-۲)	(۱/۱۵۱E-۳ ،۶/۶۹۹E-۴)
۰/۱	(۱/۷۵۸۷۶E-۶ ،۱/۲۲۳۹۸E-۶)	(۲/۱۲۴E-۲ ،۸/۲۶۰E-۳)	(۱/۱۵۱E-۳ ،۷/۳۰۷E-۴)
۰/۲	(۱/۶۹۱۵E-۶ ،۱/۲۴۵۶۲E-۶)	(۳/۵۶۰E-۳ ،۲/۳۷۰E-۳)	(۱/۱۹۲E-۳ ،۷/۴۳۰E-۴)
۰/۳	(۳/۳۷۳۴۱E-۶ ،۱/۷۹۲۱۷E-۶)	(۴/۹۳۰E-۳ ،۲/۷۰۰E-۳)	(۱/۲۸۵E-۳ ،۷/۱۳۱E-۴)
۰/۴	(۶/۴۲۵۶۲E-۷ ،۳/۳۴۸۶۷E-۷)	(۱/۴۰۶E-۲ ،۶/۵۰۰E-۳)	(۱/۴۴۶E-۳ ،۶/۴۸۴E-۴)
۰/۵	(۸/۷۰۹۹E-۷ ،۳/۰۷۵۲۱E-۷)	(۲/۵۷۲E-۲ ،۹/۶۸۰E-۳)	(۱/۶۹۴E-۳ ،۵/۵۴۹E-۴)
۰/۶	(۲/۶۹۱۵۲E-۶ ،۸/۳۵۹۵۵E-۷)	(۱/۶۹۹E-۲ ،۴/۹۵۰E-۳)	(۱/۶۹۹E-۳ ،۵/۴۴۰E-۴)
۰/۷	(۳/۰۱۸۴۲E-۶ ،۶/۶۹۳۷E-۷)	(۶/۰۶۰E-۳ ،۱/۳۹۰E-۳)	(۱/۷۶۹E-۳ ،۴/۹۱۷E-۴)
۰/۸	(۵/۳۰۶۴۳E-۶ ،۱/۱۶۷E-۶)	(۶/۵۴۰E-۳ ،۷/۸۰۰E-۴)	(۱/۹۲۷E-۳ ،۴/۰۲۳۴E-۴)
۰/۹	(۱/۳۴۵۶۶E-۶ ،۱/۲۷۱۸E-۷)	(۲/۳۰۹E-۲ ،۴/۱۳۰E-۳)	(۲/۱۹۹E-۳ ،۲/۷۸۶E-۴)

جدول ۹. قدر مطلق خطای روش توابع کلاهی توسعه یافته برای مقادیر مختلف m

x	m=۱۰	m=۱۶	m=۲۴	m=۳۰
۰	(۶/۷۵۵۴۲E-۵ ،۳/۵۶۶۲۵E-۵)	(۱/۰۲۹۸۳E-۵ ،۵/۴۳۴۵۲E-۶)	(۲/۰۳۳۵۸E-۶ ،۱/۰۷۳E-۶)	(۸/۳۲۸۷۹E-۴،۷/۳۹۴۴۴E-۷)
۰/۱	(۷/۱۸۷۳۶E-۵ ،۳/۵۳۱۶۹E-۵)	(۲/۷۴۷۹E-۵ ،۱/۹۹۲۶۴E-۵)	(۳/۰۵۰۳۱E-۶ ،۳/۰۴۹۰۶E-۶)	(۸/۸۶۱۱۶E-۴،۷/۳۵۱۸۱E-۷)
۰/۲	(۷/۶۴۴۱۳E-۵ ،۳/۷۴۹۸E-۵)	(۲/۱۱۰۷۸E-۵ ،۱/۱۷۶۰۶E-۵)	(۵/۴۴۲۷۷E-۷ ،۸/۳۶۵۹۵E-۷)	(۹/۴۲۴۰۹E-۴،۷/۲۸۷۸۴E-۷)
۰/۳	(۸/۱۲۳۹E-۵ ،۳/۴۱۱۲E-۵)	(۱/۷۳۶۷۲E-۶ ،۵/۳۶۵۶۹E-۷)	(۵/۵۵۰۸۵E-۶ ،۲/۷۵۲۱E-۶)	(۱/۰۰۱۵۳E-۴،۶/۲۰۳۳۵E-۷)
۰/۴	(۸/۶۲۳۸E-۵ ،۳/۳۲۷۳E-۵)	(۱/۰۸۳۴۳E-۵ ،۵/۱۱۵۱۳E-۶)	(۹/۳۷۴۷۲E-۶ ،۱/۱۶۳۵۱E-۶)	(۱/۰۶۳۱۲E-۶ ،۴/۱۰۰۱E-۷)
۰/۵	(۹/۱۳۹۶۹E-۵ ،۳/۲۳۰۴۹E-۵)	(۱/۳۹۳۱۵E-۵ ،۴/۹۲۳۱۹E-۶)	(۲/۷۵۰۹۲E-۶ ،۹/۷۲۰۶۳E-۷)	(۱/۱۲۶۶E-۶ ،۳/۹۸۱۰۸E-۷)
۰/۶	(۹/۶۶۵۸۶E-۵ ،۳/۱۲۴۴E-۵)	(۴/۲۴۱۹۸E-۵ ،۱/۳۵۸۳۸E-۵)	(۵/۶۸۷۱۲E-۶ ،۱/۵۵۳۶E-۶)	(۱/۱۹۱۴۴E-۳،۶/۸۵۰۸۴E-۷)
۰/۷	(۱/۰۱۹۴۷E-۴ ،۳/۰۱۴۱۷E-۵)	(۳/۱۱۲۶۶E-۵ ،۸/۵۱۱۶۵E-۶)	(۱/۶۲۳۰۸E-۶ ،۲/۳۵۱۷۱E-۷)	(۱/۲۵۶۵۲E-۳،۶/۷۱۵۸۴E-۷)
۰/۸	(۱/۰۷۱۶۲E-۴ ،۲/۹۰۶۸۳E-۵)	(۱/۲۲۲۶۵E-۶ ،۹/۵۳۷۶۳E-۷)	(۸/۳۴۴۶۶E-۶ ،۱/۹۲۲۰۱E-۶)	(۱/۳۲۰۶۴E-۳،۶/۵۸۴۸۹E-۷)
۰/۹	(۱/۱۲۱۷۶E-۴ ،۲/۸۱۱۷۳E-۵)	(۲/۲۴۴۲۱E-۵ ،۱/۸۸۹۲E-۶)	(۱/۴۵۵۱۶E-۵ ،۲/۷۶۵۲۲E-۶)	(۱/۳۸۲۲۱E-۳،۶/۴۶۹۷۱E-۷)
۱	(۱/۱۶۸۲۹E-۴ ،۲/۷۴۱۰۲E-۵)	(۱/۷۸۰۰۱E-۵ ،۴/۱۸۳۷۵E-۶)	(۳/۵۱۴۲۶E-۶ ،۸/۲۶۵۱۸E-۷)	(۱/۴۳۹۲۳E-۳،۶/۳۸۵۵۴E-۷)

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی بر اساس توابع کلاهی توسعه یافته برای حل دستگاه معادلات فردهلم- همرشتاین ارائه شده است. در ابتدا جزئیات توابع کلاهی توسعه یافته بیان شد. سپس روش را برای دستگاه معادلات انتگرال فردهلم- همرشتاین اعمال کردیم که این دستگاه به دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی کاهش پیدا کرد که با روش‌های عددی معمول به‌راحتی قابل‌حل است. در ادامه به حل چند مثال با روش ارائه‌شده پرداخته شد. جواب‌های به‌دست آمده از روش پیشنهادی به‌وسیلهٔ توابع کلاهی با جواب‌های دیگر روش‌های موجود برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرالی فردهلم-همرشتاین مقایسه شد. مقایسه نتایج حاصل از این روش با جواب دقیق مسائل و جواب سایر روش‌های موجود، کارایی و موجه بودن روش ارائه شده را نشان می‌دهد.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

منابع

1. Wazwaz A. M., "Linear and nonlinear integral equations: methods and applications", Springer Science & Business Media; (2011 Nov 24).
2. Babolian E. S., Biazar J., Vahidi A. R., "The decomposition method applied to systems of Fredholm integral equations of the second kind. Applied Mathematics and Computation", (2004 Jan 26)148 (2) 443-452.
3. Biazar J., Ebrahimi H., "Legendre wavelets for systems of Fredholm integral equations of the second kind", World Applied Sciences Journal (2010) 9 (9) 1008-1012.
4. Sahu P. K., Saha Ray S., "A new numerical approach for the solution of nonlinear Fredholm integral equations system of second kind by using Bernstein collocation method", Mathematical Methods in the Applied Sciences (2015 Jan 30) 38 (2) 274-280.
5. Maleknejad K., Kajani M. T., "Solving second kind integral equations by Galerkin methods with hybrid Legendre and Block-Pulse functions", Applied Mathematics and Computation, (2003 Dec 25) 145 (2) 623-629.
6. Maleknejad K., Hashemizadeh E., Basirat B., "Numerical Solvability of Hammerstein Integral Equations Based on Hybrid Legendre and Block-Pulse Functions", InPDPTA (2010) 172-175.
7. Maleknejad K., Mohsenyzadeh M., Hashemizadeh E., "Hybrid orthonormal Bernstein and Block-Pulse functions for solving Fredholm integral equations", InProceedings of the World Congress on Engineering (2013 Jul 3) (Vol. 1).
8. Razzaghi M., Ordokhani Y., Haddadi N., "Direct method for variational problems by using hybrid of block-pulse and Bernoulli polynomials", Rom. J. Math. Comput. Sci., 2 (2012)1-7.
9. Hashemizadeh E., Rostami M., "Numerical solution of Hammerstein integral equations of mixed type using the Sinc-collocation method", Journal of Computational and Applied Mathematics, 279 (2015 May 1) 31-39.
10. Asgari M., Hashemizadeh E., Khodabin M., Maleknejad K., "Numerical solution of nonlinear stochastic integral equation by stochastic operational matrix based on Bernstein polynomials", Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 57 (1) (2014 Jan 1) 3-12.
11. Babolian E., Mordad M., "A numerical method for solving systems of linear and nonlinear integral equations of the second kind by hat basis functions", Computers & Mathematics with Applications, 62 (1) (2011 Jul 31) 187-198.
12. Almasieh H., Roodaki M., "Triangular functions method for the solution of Fredholm integral equations system", Ain Shams Engineering Journal, 3 (4) (2012 Dec 31) 411-416.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]

[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]

13. Maleknejad K., Shahrezaee M., Khatami H., "Numerical solution of integral equations system of the second kind by block-pulse functions", Applied Mathematics and Computation, 166 (1) (2005 Jul 6) 15-24.

14. Sahu P. K., Ray S. S., "Hybrid Legendre Block-Pulse functions for the numerical solutions of system of nonlinear Fredholm-Hammerstein integral equations", Applied Mathematics and Computation, 270 (2015 Nov 1) 871-878.

15. Zedan H. A., Alaidarous E., "Haar wavelet method for the system of integral equations", InAbstract and Applied Analysis (Vol. 2014) Hindawi Publishing Corporation (2014 Jul 21).

16. Maleknejad K., Basirat B., Hashemizadeh E., "A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra-Fredholm integro-differential equations", Mathematical and Computer Modelling, 55 (3) (2012 Feb 29) 1363-1372.

17. Roodaki M., Almasieh H., "Delta basis functions and their applications to systems of integral equations", Computers & Mathematics with Applications, 63 (1) (2012 Jan 31) 100-109.

18. Hesameddini E., Shahbazi M., "Solving system of Volterra–Fredholm integral equations with Bernstein polynomials and hybrid Bernstein Block-Pulse functions", Journal of Computational and Applied Mathematics, 315 (2017 May 1) 182-194.

19. Hasan T. I., Sulaiman N. A., Salleh S., "Aitken method on iterative kernel method for solving system of Volterra-Fredholm integral equations of the second kind", ZANCO Journal of Pure and Applied Sciences, 28 (6) (2017 Apr 14) 79-88.

20. Nazari J., Nili Ahmadabadi M., Almasieh H., "The method of radial basis functions for the solution of nonlinear Fredholm integral equations system. Qqq", Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA) 6 (1) (2017 Mar 1) 11-28.

21. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations", Numerical Algorithms, 74 (1) (2017 Jan 1) 223-245.

22. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-order Bernoulli wavelets and their applications", Applied Mathematical Modelling, 40 (17-18) (2016 Sep 1) 8087-8107.

23. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholem-Volterra integro-differential equations", Applied Numerical Mathematics, 122 (2017 Dec 1) 66-81

24. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations via modification of hat functions", Applied Mathematics and Computation, 280 (2016 Apr 20) 110-123.

25. Gasca M., Sauer T., "On the history of multivariate polynomial interpolation", InNumerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century (2001) 135-147.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.5.9]

[DOI: 10.29252/mmr.5.2.121]