حلقه‌های گروهی که در شرط اِنگِل تعمیم یافته صدق می‌کنند

مجتبی رمضان نسب

دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

دریافت ۹۶/۰۴/۱۰ پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

چکیده

فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار از مشخصه $r \geq 0$ و G یک گروه متناهی موضعی باشد. به‌ازای هر x و y در حلقه گروهی RG تعریف می‌کنیم $[x, y] = xy - yx$ و استقرایی $[x\ ,_{n+1}\ y] = [[x\ ,_n\ y], y]$. در این مقاله نشان می‌دهیم که شرط لازم و کافی برای آن‌که RG در شرط $\left[x^{m(x,y)}\ ,_{n(x,y)}\ y\right] = 0$ صدق کند آن است که: ۱) اگر r توانی از عددی اول مثل p باشد، آن‌گاه G گروهی پوچ‌توان موضعی و G' یک p- گروه است، ۲) اگر $r = 0$ یا r توانی از یک عدد اول نباشد، آن‌گاه G آبلی است. در بخش دیگری از مقاله تعمیمی از گروه‌های اِنگِل ارائه می‌دهیم، سپس حکمی درمورد گروه یکه‌های جبرهای گروهی که در این شرط اِنگِل تعمیم یافته صدق می‌کنند بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌های گروهی، گروه اِنگِل، حلقه‌های اِنگِل لی تعمیم یافته

مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه و x_1 و x_2 اعضایی از آن باشند. قرار می‌دهیم $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ و به‌صورت استقرایی تعریف می‌کنیم $[x_1\ , \dots ,\ x_{n+1}] = \left[[x_1, \dots , x_n]\ , x_{n+1}\right]$. گوییم حلقه R *پوچ‌توان لی* است هرگاه عدد طبیعی‌ای مثل n موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر a_1، a_2، ... و a_n در R داشته باشیم $[a_1, \dots , a_n] = 0$. هم‌چنین R را *اِنگِل لی* نامیم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$ عدد طبیعی $n = n(a, b)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$[a\ ,_n\ b] \coloneqq [a\ , \underbrace{b, \dots , b}_{n \text{ بار}}] = 0.$$

اگر عدد n مستقل از انتخاب a و b باشد و رابطهٔ $[a\ ,_n\ b] = 0$ در R برقرار باشد، آن‌گاه این حلقه را اِنگِل لی *کران‌دار* می‌نامیم. واضح است که هر حلقه پوچ‌توان لی، یک حلقه اِنگِل لی (کران‌دار) است ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست [۱].

حال می‌خواهیم تعمیمی از حلقه‌های اِنگِل لی ارائه دهیم: حلقه R را *اِنگِل لی تعمیم یافته* گوییم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$، اعداد طبیعی $m = m(a, b)$ و $n = n(a, b)$ موجود باشند به‌طوری‌که $[a^m\ ,_n\ b] = 0$. برخی از خواص چنین حلقه‌هایی در [۹] بررسی شده است.

*نویسنده مسئول ramezann@khu.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.3.2]

[DOI: 10.52547/mmr.6.1.57]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.3.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.57]

اکنون فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار از مشخصه $r \geq 0$ و G گروهی دلخواه باشد. در [۱۰، قضیهٔ ۶.۱۲ (ص. ۱۶۰)] نشان داده شده است که شرط لازم و کافی برای این‌که حلقه گروهی RG اِنگِل لی کران‌دار باشد آن است که: الف) اگر r توانی از عددی اول باشد، آن‌گاه G پوچ‌توان است و شامل یک زیرگروه نرمال A است به‌طوری‌که G/A و A' هر دو p- گروه‌هایی متناهی هستند، ب) اگر $r = 0$ یا r توانی از عددی اول نباشد، آن‌گاه G آبلی است. ما در بخش ۲، حکم مشابهی را برای وقتی که RG اِنگِل لی تعمیم یافته باشد ارائه می‌دهیم مشروط به این‌که G گروهی متناهی موضعی باشد (قضیهٔ ۲.۷).

در بخش ۳، گروه یکه‌های یک جبر گروهی که در شرط نوع تعمیم یافته‌ای از گروه‌های اِنگِل صدق می‌کنند را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم G یک گروه باشد. به‌ازای هر x و y در G قرار می‌دهیم $(x,y) = x^{-1}y^{-1}xy$ و استقرایی به‌ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، $(x\ ,_n\ y) = ((x\ ,_{n-1}\ y), y)$. به یاد آورید که گروه G اِنگِل نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر x و y در G عدد طبیعی $n = n(x,y)$ موجود باشد به‌طوری‌که $(x\ ,_n\ y) = 1$. اگر عدد n مستقل از انتخاب x و y باشد، G را اِنگِل کران‌دار می‌نامیم. بدیهی است که هر گروه پوچ‌توان، اِنگِل کران‌دار است و هر گروه پوچ‌توان موضعی، اِنگِل است. حال اجازه دهید که تعمیمی از گروه‌های اِنگِل ارائه دهیم:

تعریف ۱. *می‌گوییم G یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ است هرگاه به‌ازای هر x و y از G، عددهای طبیعی $m = m(x)$ و $n = n(x,y)$ موجود باشند به‌طوری‌که $(x^m\ ,_n\ y) = 1$. گروه G را اِنگِل تعمیم یافته راست گوییم هرگاه به‌ازای هر x و y از G، عددهای $k = k(y)$ و $n = n(x,y)$ موجود باشند که $(x\ ,_n\ y^k) = 1$.*

با توجه به تعریف، هر گروه متناهی، اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) است. از طرفی، بنا به قضیه معروفی از زُرن، هر گروه اِنگِل متناهی، پوچ‌توان است. بنابراین خانواده همه گروه‌های اِنگِل، به‌طور سره، زیرمجموعه خانواده همه گروه‌های اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) است.

فرض کنیم G یک گروه متناهی موضعی و F یک میدان از مشخصه $p \geq 0$ باشد. گروه یکه‌های جبر گروهی FG را با نماد $\mathfrak{U}(FG)$ نشان می‌دهیم. در [۷، قضیهٔ ۱.۱] نشان داده شده است که $\mathfrak{U}(FG)$ یک گروه اِنگِل است اگر و تنها اگر G پوچ‌توان موضعی و G' یک p- گروه باشد (در این‌جا $G' = 1$، یعنی G آبلی است، هرگاه $p = 0$). ما در قضیه ۳.۳ نشان خواهیم داد که اگر $p = 0$، آنگاه $\mathfrak{U}(FG)$ یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) است اگر و تنها اگر G آبلی باشد.

شرط اِنگِل لی تعمیم یافته برای حلقه‌های گروهی

فرض کنیم G یک گروه متناهی موضعی و R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد. در این بخش یک شرط لازم و کافی برای این‌که حلقه گروهی RG در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق کند ارائه می‌دهیم. برای این منظور ابتدا به چند لم نیاز داریم.

لم ۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و به‌ازای هر جفت x و y از عناصر R اعداد طبیعی $m = m(x,y)$ و $n = n(x,y)$ موجود باشند به‌طوری‌که داشته باشیم $x^m y^n = y^n x^m$ اگر R فاقد ایده‌آل پوچ ناصفر باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای جابه‌جایی است.*

اثبات. رجوع کنید به [۳].

برای اثبات لم بعدی به روابط زیر نیاز داریم. این روابط به‌راحتی با استقرا روی n ثابت می‌شوند.

$$[x\,,_n\, y] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y^i x y^{n-i}, \qquad (*)$$

$$[xy\,,_n\, z] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [x\,,_i\, y][y\,,_{n-i}\, z], \qquad (**)$$

لم ۳. *اگر R یک حلقه J- نیم‌ساده باشد و به‌ازای هر x و y از R داشته باشیم $[x^{m(x,y)}\,,_{n(x,y)}\, y] = 0$، آن‌گاه R حلقه‌ای جابه‌جایی است.*

اثبات. از آن‌جاکه هر حلقه J- نیم‌ساده، حاصل‌ضرب نیم‌مستقیمی از حلقه‌های ابتدایی است [۵، قضیهٔ ۱۲.۵] و هر تصویر همریخت R نیز در شرط داده شده صدق می‌کند، از این‌رو، از ابتدا می‌توانیم فرض کنیم که R حلقه‌ای است ابتدایی. در نتیجه، طبق قضیه چگالی جیکوبسن، R یا یک حلقه تقسیم است یا به‌ازای حلقه تقسیمی مثل D، $M_2(D)$ یک تصویر همریخت زیرحلقه‌ای از R است. نشان می‌دهیم که حالت دوم نمی‌تواند روی دهد، زیرا با در نظر گرفتن ماتریس‌های

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

درمی‌یابیم که به‌ازای هیچ یک از اعداد طبیعی m و n، رابطهٔ $[x^m,_n\; y] = 0$ برقرار نیست.

بنابراین فرض کنیم R یک حلقه تقسیم باشد. از این‌رو، به‌ازای هر x و y از R، اعداد طبیعی $m = m(x,y)$ و $n = n(x,y)$ موجودند به‌طوری‌که $[x^m\,,_n\; y] = 0$. اگر مشخصه R عدد اولی مثل p باشد، آن‌گاه عدد طبیعی $s = s(x,y)$ را به‌گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $p^s \geq n$. در این صورت از تساوی (*) داریم

$$0 = \left[x^m\,,_{p^s}\; y\right] = \sum_{i=0}^{p^s} (-1)^i \binom{p^s}{i} y^i x^m y^{p^s-i}$$
$$= x^m y^{p^s} - y^{p^s} x^m.$$

اکنون لم ۲ نتیجه می‌دهد که R حلقه‌ای جابه‌حایی باشد.

حال فرض کنیم که مشخصه R صفر است. مطابق لم ۲ کافی است نشان دهیم که $n = 1$. فرض کنیم که این طور نباشد. با فرض $a = [x^m\,,_{n-1} y] \neq 0$ ، $b = [x^m\,,_{n-2} y]$ و $c = -a^{-1}b$ داریم

$$[y, c] = a^{-1}[b, y] = 1,$$

زیرا a، و در نتیجه a^{-1}، با y جابه‌جا می‌شود. حال اگر قرار دهیم $d = yc$ آن‌گاه $[y, d] = y$.

حال نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی m_1 و n_1 داریم $\left[y^{m_1},_{n_1} d\right] = uy^{m_1}$، که در آن $u \neq 0$ یک عددی صحیح است. این کار را با استفاده از استقرا روی m_1 انجام می‌دهیم. طبق تساوی (**)، رابطهٔ $[y, d] = y$ ایجاب می‌کند که

$$[y^{m_1+1}\,,_{n_1} d] = [y^{m_1}y\,,_{n_1} d] = \sum_{i=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}\,[y^{m_1},_i\ d][y\,,_{n_1-i}\ d]$$
$$= \sum_{i=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}u_i y^{m_1}y$$
$$= Uy^{m_1+1}.$$

بنابراین ادعا ثابت شد. حال چون R یک حلقه تقسیم از مشخصه صفر است، $0 = [y^{m_1}\,,_{n_1} d] = uy^{m_1}$ نتیجه می‌دهد که $y = 0$، که این یک تناقض است. پس $n = 1$ و ادعا ثابت شده است. بنابراین R جابه‌جایی است.

قضیهٔ ۴. *فرض کنیم F یک میدان و G یک گروه متناهی باشد. اگر حلقه گروهی FG در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق کند، آن‌گاه FG یک حلقه پوچ‌توان لی است.*

اثبات. فرض کنیم $J = J(FG)$ رادیکال جیکوبسن حلقه FG باشد. طبق لم قبل، FG/J حلقه‌ای جابه‌جایی است. چون G گروهی متناهی است، پس FG حلقه‌ای آرتینی است، از این‌رو، دارای ایده‌آل مینیمالی چون M است. در این صورت داریم $MJ = JM = 0$، زیرا J یک ایده‌آل پوچ‌توان است. حال نشان می‌دهیم که به‌ازای هر عضو $r \in FG$، مرکزساز $C_M(r)$ ایده‌آلی از FG است. برای این منظور فرض کنیم $a \in C_M(r)$ و $s \in FG$. داریم

$$(as)r = a(sr - rs) + ars = ars = r(as),$$

که این رابطه ایجاب می‌کند $C_M(r)FG \subseteq C_M(r)$. به‌طور مشابه داریم $FGC_M(r) \subseteq C_M(r)$. پس $C_M(r)$ ایده‌آلی از FG است. از طرفی به‌ازای هر $s \in M$ کوچک‌ترین عدد طبیعی‌ای مثل $n = n(s, r)$ موجود است که $[s^{m(s,r)}\,,_n\ r] = 0$، لذا $0 \neq [s^{m(s,r)}\,,_{n-1}\ r] \in C_M(r)$ (توجه داریم که اگر M یک ایده‌آل پوچ باشد، آن‌گاه $M \subseteq J$، در نتیجه $1 + s$ وارون‌پذیر است. پس اگر داشته باشیم $[(1+s)^m\,,_n\ r] = 0$، آن‌گاه $0 \neq [(1+s)^m\,,_{n-1}\ r] \in C_M(r)$). از این‌رو، $C_M(r) \neq \{0\}$ و چون M یک ایده‌آل مینیمال بود داریم $M = C_M(r)$. بنابراین نشان داده‌ایم که هر ایده‌آل مینیمال FG در مرکز FG قرار دارد.

حال برای حلقه FG سری ترکیبی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0 = L_k \subset L_{k-1} \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0 = FG,$$

که در آن به‌ازای هر i، $0 \leq i \leq k-1$، ایده‌آل L_{i+1} یک ایده‌آل ماکسیمال L_i است. یعنی L_i/L_{i+1} یک ایده‌آل مینیمال حلقه آرتینی FG/L_{i+1} است. حال مشابه آن‌چه‌که در بند قبل نشان دادیم، L_i/L_{i+1} مشمول در مرکز FG/L_{i+1} است. یعنی برای هر i داریم $[L_i\,, FG] \subseteq L_{i+1}$. این رابطه نشان می‌دهد که FG یک حلقه پوچ‌توان لی است.

لم ۵. *فرض کنیم F میدانی از مشخصه $p \geq 0$ و G گروهی تابدار باشد. در این صورت $\mathfrak{U}(FG)$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر FG پوچ‌توان لی باشد، اگر و تنها اگر G گروهی پوچ‌توان باشد و گروه مشتق آن G' یک p- گروه متناهی باشد.*

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.3.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.57]

اثبات. رجوع کنید به نتایج ۶،۲،۴ و ۷،۲،۴ از [۵].

قضیهٔ ۶. *فرض کنیم F میدانی از مشخصه $p \geq 0$ و G یک گروه متناهی موضعی باشد. اگر FG در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق کند، آن‌گاه G گروهی پوچ‌توان موضعی و G' یک p- گروه است.*

اثبات. فرض کنیم x_1، x_2، ... و x_t عناصری دلخواه از G باشند. قرار می‌دهیم $H = \langle x_1, x_2, \ldots, x_t \rangle$. در این صورت H گروهی متناهی است و FH در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. در نتیجه، بنا به قضیهٔ ۴، FH پوچ توان لی است. حال لم ۵ ایجاب می‌کند که H یک گروه پوچ‌توان باشد. بنابراین G گروهی پوچ‌توان موضعی است.

حال نشان می‌دهیم که G' یک p- گروه است. برای این منظور فرض کنیم که $g \in G'$. در این صورت می‌توان نوشت $g = (x_1\,, y_1)^{n_1} \cdots (x_s\,, y_s)^{n_s}$، که در آن x_iها و y_iها در G اند و $n_i \in \mathbb{Z}$. اگر G_1 زیرگروه G تولید شده به‌وسیلهٔ تمام این x_iها و y_iها باشد، آن‌گاه G_1 گروهی متناهی است و FG_1 در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. باز هم از لم ۵ نتیجه می‌گیریم که G_1' یک p- گروه است. از آن‌جایی که $g \in G_1'$، از این‌رو، g یک p-عنصر است و این اثبات را کامل می‌کند.

با ادغام قضیه‌های ۶ و [۸، قضیهٔ ۱.۴] داریم:

نتیجه ۷. *فرض کنیم F میدانی از مشخصه $p \geq 0$ و G یک گروه متناهی موضعی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل اند:*

۱. *FG در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند.*

۲. *G گروهی پوچ‌توان موضعی و G' یک p- گروه است.*

۳. *FG اِنگِل لی است.*

۴. *$\mathfrak{U}(FG)$ پوچ‌توان موضعی است.*

اکنون آماده‌ایم که قضیه اصلی این بخش را بیان کنیم:

قضیهٔ ۸. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار از مشخصه $n \geq 0$ و G یک گروه متناهی موضعی باشد. شرط لازم و کافی برای آن‌که RG در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق کند آن است که:*

۱. *اگر n توانی از عددی اول مثل p باشد، آنگاه G گروهی پوچ‌توان موضعی و G' یک p- گروه است.*

۲. *اگر $n = 0$ یا n توانی از یک عدد اول نباشد، آن‌گاه G گروهی آبلی است.*

اثبات. ($\Longleftarrow$) ابتدا فرض کنیم RG در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق کند. اگر $n = p^s$، با فرض $\bar{R} = R/p^{s-1}R$، به‌وضوح حلقه $\bar{R}G$ در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. از آن‌جاکه میدان $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$ در حلقه $\bar{R}$ می‌نشیند، از این‌رو، حلقه $\mathbb{Z}_\mathrm{p}G$ در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. حال از قضیهٔ ۶ می‌توان نتیجه گرفت که G گروهی پوچ‌توان موضعی و G' یک p- گروه است.

حال فرض کنیم $n = 0$ (برای زمانی که $n = p^s q^r k$، که در آن p و q دو عدد اول متمایزند، استدلال مشابه است). در این صورت حلقه $\mathbb{Z}G$ (به عنوان زیرحلقه‌ای از RG) در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. حال اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، آن‌گاه هر دو حلقه $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}G$ و $\frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}G$ در شرط اِنگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کنند. از

این‌رو، قضیهٔ ۶ ایجاب می‌کند که G' هم یک p- گروه و هم یک q- گروه باشد. در نتیجه $G' = 1$، یعنی G گروهی آبلی است.

$(\Longrightarrow)$ گیریم شرط (۱) یا شرط (۲) برقرار باشد. به‌ازای α و β در RG، فرض کنیم H زیر گروه G تولید شده به‌وسیلهٔ محمل این عناصر باشد، یعنی $H = \langle supp(\alpha), supp(\beta) \rangle$. چون G متناهی موضعی است از این‌رو، H گروهی پوچ‌توان و متناهی است. اکنون [۹، قضیهٔ ۴.۹] (ص. ۱۵۳) نتیجه می‌دهد که RH یک حلقه پوچ‌توان لی است. پس به‌ازای عدد طبیعی‌ای مثل m داریم $[\alpha\ ,_m\ \beta] = 0$. بنابرین RG یک حلقه اِنگِل لی است.

جبرهای گروهی با گروه یکه‌های اِنگِل تعمیم یافته

عنصر x از گروه G را اِنگِل راست (چپ) گوییم هرگاه به‌ازای هر $g \in G$ عدد طبیعی $n = n(x, g)$ موجود باشد به‌طوری‌که $(x\ ,_n\ g) = 1$ ($(g\ ,_n\ x) = 1$). فرض کنیم $R(G)$ و $L(G)$ مجموعه همه عناصر به‌ترتیب اِنگِل راست و اِنگِل چپ گروه G باشند. توجه کنید که به‌طور دقیق هنوز معلوم نیست که این دو مجموعه زیرگروه‌های G هستند یا خیر.

فرض کنیم $\eta(G)$ رادیکال هایرش-پلاتکین و $\zeta(G)$ ابرمرکز G باشند. تأکید می‌کنیم که هر دوی اینها زیرگروه‌های نرمال پوچ‌توان موضعی G هستند.

لم ۹. *فرض کنیم G یک گروه خطی باشد. در این صورت، $L(G) = \eta(G)$ و $R(G) = \zeta(G)$.*

اثبات. رجوع کنید به [۲].

لم ۱۰. *فرض کنیم D یک حلقه تقسیم از مشخصه صفر باشد و $\dim_{Z(D)} D < \infty$. اگر به‌ازای عدد طبیعی‌ای مانند r، $GL_r(D)$ یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) باشد، آن‌گاه D یک میدان است و $r = 1$.*

اثبات. فرض کنیم $D^* = D \setminus \{0\}$ یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ باشد و $x \in D^*$. بنا به فرض $m = m(x)$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $y \in D^*$ داریم $(x^m\ ,_n\ y) = 1$ که در آن $n = n(x, y)$. در نتیجه $x^m \in R(D^*)$. از آن‌جاکه $\dim_{Z(D)} D < \infty$، می‌توان D^* را به‌عنوان یک گروه خطی در نظر گرفت. در این صورت مطابق لم ۹ داریم $R(D^*) = \zeta(D^*)$. از طرفی، بنا به حکمی در [۴]، هر زیرگروه نرمال و پوچ‌توان موضعی D^* مشمول در مرکز D^* است. در نتیجه

$$x^m \in R(D^*) = \zeta(D^*) \subseteq Z(D).$$

از این‌رو، D روی مرکزش رادیکال است. در نتیجه طبق قضیه‌ای از کاپلانسکی [۵، قضیهٔ ۱۵.۱۵]، D یک میدان است. اگر D^* یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ باشد، با استدلالی مشابه D یک میدان است.

حال نشان می‌دهیم که برای هر میدان از مشخصه صفر مانند D گروه $GL_2(D)$ نمی‌تواند یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) باشد (که در این صورت نتیجه می‌شود $r = 1$). ابتدا توجه کنید که با محاسباتی ساده می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که دارای دترمینان ۱ باشد داریم

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.3.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.57]

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & b^2 s \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

که در آن a_{11}، a_{21} و a_{22} اعضایی از D هستند. به‌علاوه به‌ازای هر عدد طبیعی m و k داریم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

حال با در نظر گرفتن $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$، با توجه به تساوی‌های فوق و استقرای ریاضی می‌توان دید که به‌ازای هر عدد طبیعی m، n و k داریم $(\alpha^m ,_n \beta) \neq 1$ و $(\alpha ,_n \beta^k) \neq 1$.

قضیهٔ ۱۱. *فرض کنیم F یک میدان از مشخصه صفر و G یک گروه متناهی موضعی باشد. $\mathfrak{U}(FG)$ یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) است اگر و تنها اگر G آبلی باشد.*

اثبات. فرض کنیم $\mathfrak{U}(FG)$ یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) باشد و $g \in G'$. در این صورت می‌توان نوشت $g = (x_1, y_1)^{n_1} \cdots (x_s , y_s)^{n_s}$، که در آن x_iها و y_iها در G اند و $n_i \in \mathbb{Z}$. اگر H زیرگروه G تولید شده به‌وسیلهٔ تمام این x_iها و y_iها باشد، آن‌گاه H گروهی متناهی است. حال طبق قضیه ودربرن- آرتین داریم

$$\mathfrak{U}(FH) \simeq \oplus_{i=1}^{r} GL_{n_i}(D_i),$$

که در آن، هر n_i عددی طبیعی و هر D_i یک جبر تقسیم با بعد متناهی روی F است. از آن‌جاکه $\mathfrak{U}(FH)$ یک گروه اِنگِل تعمیم یافته چپ (راست) است، از این‌رو، مطابق لم ۱۰، به‌ازای هر i ای، D_i یک میدان است و $n_i = 1$، پس $\mathfrak{U}(FH)$ یک گروه آبلی است. در نتیجه $g = 1$، یعنی G گروهی آبلی است.

منابع

1. Cohn P. M., "A non-nilpotent Lie ring satisfying the Engel condition and a non-nilpotent Engel group", Proc. Cambridge Philos. Soc., 51 (1955) 401-405.
2. Gruenberg K. W., "The Engel structure of linear groups", J. Algebra, 3 (1966) 291-303.
3. Herstein I. N., "A commutativity theorem", J. Algebra, 38 (1976) 112-118.
4. Huzurbazar M. S., "The multiplicative group of a division ring", Soviet Math. Dokl., 1 (1960) 433-435.
5. Lam T. Y., "A First Course in Noncommutative Rings", Second Edition, Springer-Verlag, New. York (2001).
6. Lee G. T., "Group identities on units and symmetric units of group rings", Algebra and applications 12, Springer-Verlag, London (2010).
7. Ramezan-Nassab M., "Group algebras with Engel unit groups", J. Aust. Math. Soc., 101 (2016) 244-252.

8. Ramezan-Nassab M., "Group algebras with locally nilpotent unit groups", Comm. Algebra, 44 (2016) 604-612.
9. Ramezan-Nassab M., Kiani D., "Rings satisfying generalized Engel conditions, J. Algebra Appl., 11 (2012) 1250121 (8 pages).
10. Sehgal S. K., "Topics in Group Rings", Dekker, New York (1978).