

گروه خودریختی گروه‌های ناآبلی از مرتبه p^4

رضا عرفی؛ دانشگاه خوارزمی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

دریافت ۹۶/۰۳/۰۷

چکیده

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی از مرتبه p^4 باشد در این مقاله یک ساختار برای p -زیرگروه سیلوی گروه خودریختی‌های G معرفی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گروه خودریختی، خودریختی‌های مرکزی و p -گروه متناهی

مقدمه

مشخص کردن مرتبه و ساختار گروه خودریختی‌های p -گروه‌های متناهی یکی از مسائل مهم و کاربردی در نظریه گروه‌ها است. در این زمینه مقاله‌های زیادی به چاپ رسیده است که بیش‌تر این مقالات مربوط به بررسی مرتبه گروه خودریختی‌های p -گروه‌های متناهی است. به‌عنوان مثال می‌توان به مراجع [۱] و [۱۰] اشاره کرد. قابل ذکر است که تلاش‌های فراوانی برای مشخص کردن یک ساختار برای گروه خودریختی‌های p -گروه‌های متناهی انجام شده است که در این رابطه می‌توان به‌عنوان مثال به مقالات [۴] و [۹] مراجعه کرد.

جیمز به رده‌بندی گروه‌هایی از مرتبه p^n که در آن $n \leq 6$ بر حسب خانواده‌های همبر^۱ است، پرداخته است [۵]. با توجه به [2, §29] دو گروه را همبر گویند در صورتی که زیرگروه‌های مشتق آن‌ها با یکدیگر و هم‌چنین گروه‌های خارج قسمتی آن‌ها با یکدیگر یکریخت باشند و به‌علاوه روابط جابه‌جاگرها در آن‌ها اساساً هم‌شکل باشند. با استفاده از مقاله جیمز معلوم می‌شود که تعداد ۱۰ گروه ناآبلی دو به دو غیر یکریخت از مرتبه p^4 موجود است که در خانواده‌های غیرهمبر قرار دارند.

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی از مرتبه p^4 باشد گروه خودریختی‌های G و p -زیرگروه سیلوی گروه خودریختی‌های G را به ترتیب با علائم $Aut(G)$ و $Aut_p(G)$ نشان می‌دهیم. اگر $\phi = \phi(G)$ بیان‌کننده زیرگروه فراتینی گروه باشد مجموعه $Aut^\phi(G)$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$Aut^\phi(G) = \{ \alpha \in Aut(G) \mid g^{-1} g^\alpha \in \phi(G), \quad \forall g \in G \}.$$

با توجه (Satz III. ۳.۱۷ از [۷]) داریم $Aut^\phi(G)$ یک p -زیرگروه نرمال گروه $Aut(G)$ است. هدف اصلی این مقاله بررسی یک ساختار برای $Aut_p(G)$ است. در این مقاله نشان می‌دهیم اگر G پوچتوان از رده ماکزیمال باشد آن‌گاه $Aut_p(G)$ برابر با $Aut^\phi(G)$ و یا توسیع شکافته شده $Aut^\phi(G)$ با یک گروه دوری از مرتبه p است (قضیه ۸). به‌علاوه اگر G پوچتوان از رده ۲ باشد با استفاده از ساختار خودریختی‌های مرکزی گروه یک ساختار برای $Aut_p(G)$ ارائه می‌شود.

در این مقاله از علامتها و قراردادهای مرجع [۲] استفاده می‌شود. گروه خودریختی‌های مرکزی گروه G را با علامت $Aut_c(G)$ و مجموعه تمام اعضای $Aut_c(G)$ که مرکز گروه را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد را با علامت $Aut_Z^Z(G)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم G یک گروه، H و K زیرگروه‌های G باشند به طوری که K نرمال در G باشد. حاصل ضرب نیم‌مستقیم H در K را با علامت $K \rtimes H$ نشان می‌دهیم. گروه دوری از مرتبه n را با علامت \mathbb{Z}_n و حاصل ضرب مستقیم Γ بار گروه \mathbb{Z}_n را به صورت $(\mathbb{Z}_n)^r$ نشان می‌دهیم. اثر خودریختی α روی عضو x را با علامت x^α نشان می‌دهیم. هم‌چنین گروه G را ناآبلی محض^۱ گوئیم در صورتی که عامل مستقیم آبدی نابدیهی نداشته باشد.

پیش‌نیازها

در این بخش ابتدا به بیان برخی نتایج بنیادی و اساسی می‌پردازیم که برای نتایج اصلی این مقاله مورد نیاز است. با توجه به مقاله جیمز [۵] تعداد ۱۰ گروه ناآبلی از مرتبه p^4 داریم ($p > 2$). در ذیل نمایش گروه‌های ذکر شده را برای حالت $p \geq 5$ می‌آوریم قابل ذکر است برای حالت 3 یا $p = 2$ نمایش گروه با نمایش در حالت $p \geq 5$ متفاوت است از این‌رو، با استفاده از نرم‌افزار GAP می‌توانیم نتایج را برای 3 یا $p = 2$ به راحتی مشاهده کنیم. برای خلاصه‌نویسی روابطی که به صورت $[a, b] = 1$ در آن a و b مولد گروه هستند از نمایش حذف شده است و روابط جابه‌جاگرهای مولدها در صورتی که نابدیهی باشند فقط در نمایش ذکر می‌شود.

$$G_1 = \langle a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, a^p = a_2, a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 \rangle,$$

$$G_2 = \langle a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, a^p = a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 \rangle,$$

$$G_3 = \langle a, a_1, a_2 \mid [a_1, a] = a^{p^2} = a_2, a_1^p = a_2^p = 1 \rangle,$$

$$G_4 = \langle a, a_1, a_2 \mid [a_1, a] = a^p = a_2, a_1^{p^2} = a_2^p = 1 \rangle,$$

$$G_5 = \langle a, a_1, a_2, \gamma \mid [a_1, a] = \gamma^p = a_2, a^p = a_1^p = a_2^p = 1 \rangle,$$

$$G_6 = \langle a, a_1, a_2 \mid [a_1, a] = a_2, a^{p^2} = a_1^p = a_2^p = 1 \rangle,$$

$$G_7 = \langle a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a] = a^p = a_3, a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 \rangle,$$

$$G_8 = \langle a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a] = a_1^p = a_3, a^p = a_2^p = a_3^p = 1 \rangle,$$

$$G_9 = \langle a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a]^\nu = a_1^p = a_3^\nu, a^p = a_2^p = a_3^p = 1 \rangle,$$

که در آن ν کوچک‌ترین نامانده مربعی به پیمانه p است.

$$G_{10} = \langle a, a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a] = a_2, [a_2, a] = a_3, a^p = a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1 \rangle.$$

با در نظر گرفتن مقاله جیمز [۵] برای $1 \leq i \leq 2$ دیده می‌شود $G_i \cong \mathbb{Z}_p \times H_i$ که در آن H_i گروه ناآبلی از مرتبه p^3 است به طوری که $\exp(H_1) = p^2$ و $\exp(H_2) = p$ قابل ذکر است که فقط گروه‌های G_1 و G_2 به صورت حاصل ضرب مستقیم دو زیر گروه خودشان هستند. هم‌چنین برای $7 \leq i \leq 10$ گروه G_i از رده پوچتوانی ماکزیمال است و برای $1 \leq i \leq 6$ گروه G_i دارای این خواص و ویژگی‌ها است:

1. purely non-abelian

جدول ۱.

Group	$Z(G)$	$\frac{G}{G'}$	$cl(G)$	$\frac{G}{Z(G)}$	$\phi(G)$
G_1	$\langle a_2, a_3 \rangle \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$(\mathbb{Z}_p)^3$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	G'_1
G_2	$\langle a_2, a_3 \rangle \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$(\mathbb{Z}_p)^3$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	G'_2
G_3	$\langle a^p \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$	$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	$Z(G_3)$
G_4	$\langle a_2, a_1^p \rangle \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	$Z(G_4)$
G_5	$\langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$	$(\mathbb{Z}_p)^3$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	G'_5
G_6	$\langle a_2, a^p \rangle \cong (\mathbb{Z}_p)^2$	$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$	2	$(\mathbb{Z}_p)^2$	$Z(G_6)$

تعریف: p -گروه G را منظم^۱ می‌گویند در صورتی که به‌ازای هر x, y از گروه G ، وجود داشته باشد عضوی مانند

$$x^p y^p = (xy)^p c \quad c \in U_1(\langle x, y \rangle)$$

لم ۱. فرض کنیم G یک گروه نآبلی از مرتبه p^4 باشد به‌طوری‌که $p \geq 5$ در این صورت

۱. G منظم است،

۲. G گروه فرآبلی است،

۳. اگر G پوچتوان از ردهٔ ماکزیمال باشد در این صورت $|Z(G)| = p$ ، $G' = \langle a_2, a_3 \rangle$ ، $\exp(G') = p$.

$$\exp\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = p \quad \text{و} \quad Z(G) = \langle a_3 \rangle$$

۴. اگر G پوچتوان از ردهٔ ماکزیمال باشد در این صورت $C_G(G') = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

۵. به‌ازای هر x, y از G داریم $x^p y^p = (xy)^p$ و به‌علاوه $x^p \in Z(G)$.

برهان: ۱. به [۷], Satz III. 10.2(b) مراجعه شود.

۲. با توجه به این‌که $|G'|$ عدد p^2 را عادی می‌کند معلوم می‌شود زیرگروه مشتق آبلی است.

۳ و ۴. می‌دانیم که گروه‌های G_i که $7 \leq i \leq 10$ پوچتوان از ردهٔ ماکزیمال هستند با استفاده از نمایش گروه‌ها

به‌راحتی نتایج مورد نظر به‌دست می‌آید.

۵. با توجه به مرتبهٔ زیرگروه مشتق در گروه‌های پوچتوان از ردهٔ ۲ طبق جدول ۱ و قسمت سوم لم ۱ داریم

$$\exp(G') = p \quad \text{لذا} \quad x^p y^p = (xy)^p \quad \text{هم‌چنین با استفاده از ساختار} \quad \frac{G}{Z(G)} \quad \text{از جدول ۱ و قسمت سوم لم ۱}$$

نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

لم ۲. فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $3 \leq i \leq 6$ در این صورت

۱. G نآبلی محض است،

۲. $|Aut_p(G)|$ عدد $|Aut_c(G)|$ را عادی می‌کند.

برهان: ۱. فرض کنیم چنین نباشد از این‌رو، زیرگروه آبلی نابدهی مانند A و زیرگروه نآبلی محض مانند B موجود

است به‌طوری‌که $G = A \times B$ با توجه به مرتبهٔ گروه نتیجه می‌شود $A \cong \mathbb{Z}_p$ و B گروه نآبلی از مرتبهٔ p^3 است. با

توجه به بحث انجام شده در ابتدای بخش پیش‌نیازها نتیجه می‌شود $G \cong G_i$ که در آن $1 \leq i \leq 2$ ، که این تناقض

است.

۲. با توجه به جدول ۱ داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ بنابراین

$$\frac{Aut(G)}{Aut_c(G)} \hookrightarrow Aut\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \cong Gl(2, p)$$

از این‌رو، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

$$Aut_Z^Z(G) \cong Hom\left(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)\right) \quad \text{قضیه ۳.}$$

برهان: به [۷], Satz I. 17.1 یا [۱۱], Result 1.1 مراجعه شود.

قضیه ۴. فرض کنیم G یک p -گروه فرآبلی متناهی از ردهٔ ماکزیمال از مرتبهٔ p^n باشد به طوری که $G = \langle s, s_1 \rangle$ در این صورت $|Aut_p(G) : Aut^\phi(G)| = p$ اگر و تنها اگر G دارای خودریختی مانند α باشد به طوری که $s_1^\alpha = s_1$ و $s^\alpha = ss_1$.

برهان: به [۴], Theorem 3.7 مراجعه شود.

قضیه ۵. Corollary ۳.۳ از [۳] فرض کنیم $G = H \times K$ به طوری که H و K فاقد عامل مشترک در تجزیه به زیرگروه‌ها باشند. در این صورت

$$|Aut_c(G)| = |Aut_c(H)||Aut_c(K)||Hom(H, Z(K))||Hom(K, Z(H))|$$

نتایج اصلی

در این فصل یک ساختار برای p -زیرگروه سیلوی $Aut(G)$ معرفی می‌شود که در آن G یک p -گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^4 است. ابتدا p -گروه‌های از ردهٔ ماکزیمال از مرتبهٔ p^4 را بررسی می‌کنیم.

لم ۶. فرض کنیم G یک p -گروه از ردهٔ ماکزیمال از مرتبهٔ p^4 باشد در این صورت

$$1. \quad Inn(G) \text{ زیرگروه ناآبلی از مرتبهٔ } p^3 \text{ و نمای } p \text{ است،}$$

$$2. \quad |Aut^\phi(G)| = p^4 \text{ و } |Aut_p(G)| \text{ عدد } p^5 \text{ را عا د می‌کند،}$$

$$3. \quad Aut^\phi(G) = Inn(G) \rtimes \mathbb{Z}_p$$

برهان: ۱. از قسمت سوم لم ۱ نتیجه می‌شود.

۲. با استفاده قسمت دوم لم ۱ و Theorem ۴.۳ از [۴] نتیجه می‌شود $|Aut^\phi(G)| = p^4$. همچنین چون G از ردهٔ

ماکزیمال است از این‌رو، دو مولدی است بنابراین $\frac{G}{\phi(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. حال با در نظر گرفتن این مطلب که

$$\frac{Aut(G)}{Aut^\phi(G)} \hookrightarrow Aut\left(\frac{G}{\phi(G)}\right) \cong Gl(2, p)$$

نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۳. تابع γ را به صورت $a^\gamma = a_1 a_3$ و $a_1^\gamma = a_1 a_3$ تعریف می‌کنیم با توجه به لم ۱، $Z(G) = \langle a_3 \rangle$ و با به کار بردن Proposition ۳، p۴۴ از [۶] نتیجه می‌شود γ یک خودریختی از مرتبهٔ p متعلق به $Aut^\phi(G)$ است.

ادعا می‌کنیم $\gamma \notin InnG$. فرض کنیم چنین نباشد بنابراین $\exists g \in G \setminus Z(G)$ به طوری که $\gamma = i_g$. با توجه به این که $[a, g] = a_3$ و $\frac{G}{Z(G)} = \langle Z(G)a, Z(G)a_1 \rangle$ نتیجه می‌گیریم که $[a_1, g] = a_3$ و

$[a, g] = 1$. بنابراین $Z_2(G) = G'$ با توجه به این که $Z(G)g \in Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \frac{Z_2(G)}{Z(G)}$ و $Z_2(G) = G'$ می‌توانیم نتیجه بگیریم

$g \in G'$ اما با به کار بردن لم ۱ قسمت چهارم داریم $[g, a_1] = 1$ که این یک تناقض است. بنابراین $Aut^\phi(G) = Inn(G) \rtimes \langle \gamma \rangle$

لم ۷. فرض کنیم $i \in \{7, 10\}$ در این صورت تابع θ با ضابطه $a^\theta = aa_1$ و $a_1^\theta = a_1$ یک خودریختی از مرتبه p از گروه G_i است به طوری که $\theta \notin \text{Aut}^\phi(G_i)$.

برهان: با استفاده از قسمت‌های چهارم و پنجم لم ۱ و Proposition ۳, p۴۴ [۶] برهان کامل می‌شود.

فرض کنیم G یک p -گروه از ردهٔ ماکزیمال از مرتبه p^4 باشد در قضیهٔ ۸، ما یک ساختار برای $\text{Aut}_p(G)$ معرفی می‌کنیم.

قضیه ۸. فرض کنیم G_i یک p -گروه از ردهٔ ماکزیمال از مرتبه p^4 باشد، که در آن $7 \leq i \leq 10$. در این صورت

$$۱. \text{ اگر } i \in \{7, 10\} \text{ آنگاه } \text{Aut}_p(G_i) \cong \text{Aut}^\phi(G_i) \rtimes \mathbb{Z}_p,$$

$$۲. \text{ اگر } i \in \{8, 9\} \text{ آنگاه } \text{Aut}_p(G_i) = \text{Aut}^\phi(G_i).$$

برهان: ۱. با به کار بردن لم ۷ و قضیهٔ ۴ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۲. با توجه به این که تابع θ معرفی شده در لم ۷ برای گروه G_i که در آن $8 \leq i \leq 9$ خودریختی نیست از

$$\text{این‌رو، با به کار بردن قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود } \text{Aut}^\phi(G_i) = \text{Aut}_p(G_i)$$

فرض کنیم G یک p -گروه از ردهٔ پوچتوانی ۲ و از مرتبه p^4 باشد. در ادامهٔ این مقاله یک ساختار برای $\text{Aut}_p(G)$ با استفاده از ساختار زیرگروه‌های $\text{Aut}_c(G)$ و $\text{Aut}_Z^Z(G)$ معرفی می‌شود. به راحتی دیده می‌شود که $\text{Aut}_c(G)$ و $\text{Aut}_Z^Z(G)$ زیرگروه‌های نرمال گروه $\text{Aut}(G)$ هستند و به علاوه داریم $\text{Aut}_c(G)$ برابر است با $\mathcal{C}_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G))$. در ([۱], Theorem) نویسندگان ثابت کردند اگر G یک گروه ناآبلی محض متناهی باشد آنگاه $|\text{Aut}_c(G)| = |\text{Hom}\left(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)\right)|$. حال با توجه به مطالب ذکر شده به بررسی یک ساختار از $\text{Aut}_p(G)$ می‌پردازیم.

لم ۹. فرض کنیم $i \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$ در این صورت تابع δ با ضابطه $a^\delta = aa_1$ که اثر آن روی سایر مولدها، همانی است، یک خودریختی از مرتبه p از گروه G_i است، به طوری که $\delta \notin \text{Aut}_c(G_i)$.

برهان: با توجه به این که G_i از ردهٔ پوچتوانی ۲ است داریم $G_i' \leq Z(G_i)$ هم‌چنین با توجه به جدول ۱ داریم $a_1 \notin Z(G_i)$. حال با به کار بردن قسمت پنجم لم ۱ و Proposition ۳, p۴۴ [۶] نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $1 \leq i \leq 2$ در این صورت

$$۱. |\text{Aut}_c(G)| = p^5(p-1)$$

$$۲. \text{Aut}_Z^Z(G) \cong (\mathbb{Z}_p)^4$$

$$۳. \text{Aut}_c(G) \cong (\text{Aut}_Z^Z(G) \rtimes \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_{p-1}$$

$$۴. \text{Aut}_p(G) \cong (\text{Aut}_Z^Z(G) \rtimes \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$$

برهان: ۱. با توجه به این که $G \cong \mathbb{Z}_p \times H$ که در آن H گروه ناآبلی از مرتبه p^3 است و با استفاده از قضیهٔ ۵ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۲. با استفاده از جدول ۱ و قضیهٔ ۳ نتیجه مورد نظر به آسانی به دست می‌آید.

۳. با توجه به نمایش داریم $G = \langle a, a_1, a_3 \rangle$ زیرا $G = \Phi(G)$ زیرا $a_2 \in G' \leq \Phi(G)$. با توجه به قضیه جای‌گذاری به آسانی دیده می‌شود تابع θ با ضابطه $a^\theta = a$ ، $a_1^\theta = a_1$ و $a_3^\theta = a_3 a_2$ یک خودریختی مرکزی از مرتبه p است به طوری که $\theta \notin \text{Aut}_Z^Z(G)$. با توجه به این که $\text{Aut}_Z^Z(G)$ زیرگروه نرمال $\text{Aut}(G)$ است و با در نظر گرفتن قسمت اول همین قضیه داریم $P = \text{Aut}_Z^Z(G) \rtimes \langle \theta \rangle$ زیرگروه p -سیلوی $\text{Aut}_c(G)$ است. با قراردادن $\mathbb{Z}_p = \langle x \rangle$ و $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) = \langle \beta \rangle$ می‌توانیم خودریختی مرکزی β^* برای گروه $G \cong \mathbb{Z}_p \times H$ از مرتبه $p-1$ را به صورت $(hx^i)^{\beta^*} = h(x^i)^\beta$ برای هر h عضو H و هر i عضو \mathbb{Z} تعریف کنیم. با در نظر گرفتن این مطلب که $P \leq \text{Aut}_c(G)$ و قسمت اول همین قضیه نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۴. با به کار بردن Proposition ۳.p۴۴ از [۶]، و قسمت پنجم لم ۱ تابع ψ با ضابطه $a^\psi = aa_1$ ، $a_1^\psi = a_1$ و $a_3^\psi = a_3$ خودریختی غیرمرکزی از مرتبه p است. با توجه به جدول ۱ داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ بنابراین $\frac{\text{Aut}(G)}{\text{Aut}_c(G)} \hookrightarrow \text{Aut}\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \cong \text{Gl}(2, p)$

از این رو، با توجه به وجود خودریختی غیرمرکزی از مرتبه p داریم $|\text{Aut}_p(G)| = p^6$. بنابراین نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیه ۱۱. فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $i \in \{3, 5\}$ در این صورت

$$1. |\text{Aut}_c(G)| = p^3$$

$$2. \text{Aut}_Z^Z(G) = \text{Inn}(G) \cong (\mathbb{Z}_p)^2$$

$$3. \text{Aut}_c(G_5) \cong (\mathbb{Z}_p)^3 \text{ و } \text{Aut}_c(G_3) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$$

$$4. \text{Aut}_p(G) \cong \text{Aut}_c(G) \rtimes \mathbb{Z}_p$$

برهان: قسمت اول و دوم با توجه به جدول ۱ و لم ۲ قسمت اول و قضیه ۳ به راحتی محاسبه می‌شود.

۳) با توجه به این که $\text{Inn}(G)$ آبدلی است داریم $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}_c(G) = C_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G))$. بنابراین $\text{Inn}(G) \leq Z(\text{Aut}_c(G))$. از این رو، $\text{Aut}_c(G)$ آبدلی است و نمای آن حداکثر p^2 است. تابع θ با ضابطه $a^\theta = a^{1+p}$ و $a_1^\theta = a_1 a^{p^2}$ خودریختی مرکزی از مرتبه p^2 برای گروه G_3 است که با توجه به قسمت اول لم ۲ نتیجه می‌شود $\text{Aut}_c(G_3) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$ هم‌چنین تابع ω با ضابطه $\gamma^\omega = \gamma^{1+p}$ که ω بقیه مولدها را ثابت نگه دارد، یک خودریختی مرکزی از مرتبه p برای گروه G_5 است که مرکز گروه را حرکت می‌دهد بنابراین $\text{Aut}_c(G_5) = \text{Aut}_Z^Z(G_5) \times \langle \omega \rangle \cong (\mathbb{Z}_p)^3$.

۴. با به کار بردن لم ۹ و قسمت دوم لم ۲ برهان کامل می‌شود.

قضیه ۱۲. فرض کنیم $G = G_i$ که در آن $i \in \{4, 6\}$ در این صورت

$$1. \text{Aut}_c(G) = \text{Aut}_Z^Z(G) \cong (\mathbb{Z}_p)^4$$

$$2. \text{Aut}_p(G_6) \cong \text{Aut}_c(G_6) \rtimes \mathbb{Z}_p$$

$$3. \text{Aut}_p(G_4) \cong ((\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$$

برهان: ۱. با توجه به جدول ۱ و قضیه ۳ نتیجه می‌شود $Aut_Z^Z(G) \cong (\mathbb{Z}_p)^4$. با به کار گرفتن قسمت نخست لم ۱ داریم $|Aut_c(G)| = p^4$ که مطلب اخیر برهان را کامل می‌کند.

۲. با استفاده از قسمت دوم لم‌های ۹ و ۱ نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

۳. تابع σ با ضابطه $a^\sigma = a$ و $a_1^\sigma = a_1 a$ یک خودریختی غیر مرکزی از مرتبه p^2 است. بنابراین با در نظر گرفتن قسمت نخست لم فوق و لم ۱ داریم $|Aut_p(G_4)| = p^5$ از این رو، با در نظر گرفتن مرتبه خودریختی σ داریم:

$$Aut_Z^Z(G_4) = U_1(Aut_p(G_4)) < Aut_p(G_4)$$

بنابراین $Aut_p(G_4)$ نمی‌تواند به صورت حاصل ضرب نیم‌مستقیم $Aut_c(G)$ با \mathbb{Z}_p باشد.

ساختاری برای $Aut_p(G_4)$ معرفی کنیم. برای این منظور توابع ψ ، γ و δ را به ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^\psi = a^{1+p}, a_1^\psi = a_1^{1+p}, \quad a^\gamma = a^{1+p}, a_1^\gamma = a_1, \quad a^\delta = a^{1+p} a_1^p, a_1^\delta = a_1$$

به سهولت دیده می‌شود این توابع خودریختی‌های مرکزی از مرتبه p هستند و به علاوه روابط $\sigma\psi = \psi\sigma$ ، $\gamma^{-1}\sigma\gamma = \sigma^{1+p}$ و $\psi\gamma = \gamma\psi$ نیز برقرار است بنابراین $H = \langle \sigma, \psi \rangle \cong \mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_p$ با توجه به آبلی بودن H و این که $[\sigma, \gamma] \neq 1$ نتیجه می‌گیریم که $\gamma \notin H$. هم‌چنین با استفاده از روابط ذکر شده در مورد خودریختی‌ها داریم $\gamma \in N_{G_4}(H)$. با قرار دادن $K = \langle \sigma, \psi, \gamma \rangle$ نتیجه می‌گیریم $K \cong (\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$ هم‌چنین با در نظر گرفتن نمایش گروه G_4 داریم $\langle a \rangle \trianglelefteq G_4$ و $a_1^p \notin \langle a \rangle$ زیرا در غیر این صورت $|G_4 / \langle a \rangle| = p$ که این یک تناقض است. ادعا می‌کنیم $\delta \notin K$ زیرا در غیر این صورت اعداد صحیح i, j, ℓ موجود است به طوری که $\delta = \sigma^i \psi^j \gamma^\ell \in \langle a \rangle$ باشد که این یک تناقض است. بنابراین $Aut_p(G_4) = K \rtimes \langle \delta \rangle$.

منابع

- Adney J. E., Yen T., "Automorphisms of a p-group, Illinois Journal of Mathematics 9", (1965) 137-143.
- Berkovich Y., "Groups of Prime Power Order", Vol. 1, Walter de Gruyter, Berlin (2008).
- Bidwell J. N. S., Curran M. J., McCaughan D. J., "Automorphisms of direct products of finite groups", Arch. Math. 86 (2006) 481-489.
- Fouladi S., Orfi R., "Automorphisms of metabelian prime power order groups of maximal class", Bull. Austral. Math. Soc. 77 (2008) 261-276.
- Rodney James, "The Groups of Order p^6 (p an Odd Prime)", Math. Comp., 34, No.150 (1980) 613-637.
- Johnson D. L., "Presentation of groups", 2nd ed., LMS Stud. texts, Cambridge University press (1997).
- Huppert B., "Endliche Gruppen", Vol. 1, Springer-Verlage (1967).

- 8 The GAP Group, GAP-Groups, "Algorithms, and Programming", Version 4.4.10 (2007) (<http://www.gap-system.org>).
- 9 Juhász A., "The group of automorphisms of a class of finite p -groups", *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 270, No. 2 (1982) 469-481.
- 10 Menegazzo F., "Automorphisms of p -groups with cyclic commutator subgroup", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, Vol. 90 (1993) 81-101.
- 11 Schmid P., "Normal p -subgroups in the group of outer automorphisms of a finite p -group", *Math. Z.* 147 (1976) 271-277.