

بررسی متریک‌های راندرزی از انحناى ریت‌چی تصویری برگشت پذیر

بهمن رضایی*، سمیه اسمعیل پور، مهران گبرانی؛

دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم

دریافت ۹۶/۰۴/۰۹ پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

چکیده

در این مقاله به بررسی مفهومی جدید از شن^۱ به نام انحناى ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک می‌پردازیم. ضمن دسته‌بندی متریک‌های راندرزی از انحناى ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک^۲، نشان می‌دهیم که متریک‌های راندرزی از انحناى ریت‌چی تصویری برگشت پذیرند اگر و تنها اگر از انحناى ریت‌چی تصویری مربعی باشند. **واژه‌های کلیدی:** هندسه فینسلر، انحناى S ، انحناى ریت‌چی، انحناى ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک.

مقدمه

شن در سال (۲۰۰۱) مفهوم انحناى ریت‌چی تصویری برای یک متریک فینسلری را بدین صورت معرفی کرد:

$$PRic := Ric + (n - 1)\{\bar{S}|_m y^m + \bar{S}^2\}, \quad (1)$$

که در آن S بیانگر انحناى S یک کمیت غیرریمانی است و نقش مهمی را در هندسه فینسلر بازی می‌کند و Ric نشان‌دهنده انحناى ریت‌چی است [1]. هم‌چنین نماد «|» نشان‌دهنده مشتق کواریان افقی^۳ نسبت به التصاق بروالد^۴ است و

$$\bar{S} := \frac{1}{n+1} S.$$

چنگ^۵ و همکاران (۲۰۱۷) رابطه انحناى ریت‌چی تصویری را به صورت

$$PRic = Ric + \frac{n-1}{n+1} S|_m y^m + \frac{n-1}{(n+1)^2} S^2 \quad (2)$$

بیان و متریک‌های راندرزی از انحناى ریت‌چی تصویری مسطح را به طور کامل دسته‌بندی کردند [2]. یک متریک فینسلر را از انحناى ریت‌چی تصویری مسطح گوئیم هرگاه $PRic = 0$.

(α, β) - متریکها دسته‌ای مهم و خاص از متریک‌های فینسلری را تشکیل می‌دهند که به صورت $F = \alpha\varphi(s)$ تعریف می‌شوند که در آن $s = \frac{\beta}{\alpha}$ ، $\alpha = \alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ یک متریک ریمانی، $\beta = \beta(x, y) = b_i(x)y^i$ یک 1-صورت روی M و $\varphi(s)$ یک تابع مثبت از رده C^∞ است. با فرض $\varphi(s) = 1 + s$ ، آن‌گاه تابع

مقدمات

فرض کنیم M یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر باشد، در این صورت یک ساختار فینسلری روی M عبارت است از نگاشت $F: TM \rightarrow [0, \infty)$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱. F روی $TM_0 = TM - \{0\}$ هموار باشد؛

۲. F روی y همگن مثبت^۹ از درجه یک باشد. یعنی به ازای هر $\lambda > 0$ ؛

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y),$$

۳. به ازای هر (x, y) از TM ماتریس زیر موسوم به ماتریس هسیان^{۱۰} معین مثبت باشد؛

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j},$$

یعنی به ازای $X \neq 0$ داشته باشیم $g(X, X) > 0$ ، که g_{ij} مولفه‌های تانسور g هستند. در این صورت (M, F) را خمینهٔ فینسلری و F را تابع اساسی فینسلری^{۱۱} گوئیم.

فرض کنیم F یک متریک فینسلری روی خمینهٔ M باشد، در این صورت منحنی $c(t)$ در خمینهٔ فینسلری (M, F) ژئودوزیک است هرگاه در معادله زیر صدق کند:

$$\ddot{c}(t) + 2G^i(c(t), \dot{c}(t)) = 0, \quad i \in \{1, 000, n\},$$

که G^i ضرایب اسپری حاصل از متریک F است و بدین صورت روی M تعریف می‌شود:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il} \{ [F^2]_{x^k y^l y^k} - [F^2]_{x^l} \},$$

که در آن $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$ ، $y \in T_x M$.

انحنای ریمان یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس $T_p M$ هستند که بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$R = \{ R_y: T_p M \rightarrow T_p M \mid y \in T_p M, p \in M \},$$

که در حالت موضعی R_y را می‌توان نسبت به پایه‌های فضای $T_p M$ بدین صورت بیان کرد:

$$R_y = R^i_k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k,$$

به طوری که $R^i_k = R^i_k(x, y)$ نشان‌دهندهٔ ضرایب انحنای ریمان F است و بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$R^i_k = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

انحنای ریتچی، اثر انحنای ریمان است و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$Ric(x, y) = R^i_i(x, y).$$

طبق تعریف، انحنای ریتچی یک تابع معین مثبت از درجهٔ ۲ روی y است [3].

در هندسهٔ فینسلر دو صورت حجمی مهم وجود دارند که یکی صورت حجمی بوسمن-هاسدورف و دیگری صورت

حجمی هالمس-تامسون^{۱۲} است. فرض کنیم $\{e_i\}_{i=1}^n$ پایهٔ دلخواه برای $T_x M$ و $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ پایهٔ دوگان برای $T_x^* M$

باشند، در این صورت زیر مجموعه باز کراندار B_x^n در R^n را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

9. Positive homogeneity

10. Hessian matrix

11. Fundamental Finsler function

12. Holmes-Thompson

$$B_x^n = \{(y^i) \in R^n | F(y^i e_i) < 1\}.$$

فرض کنیم $dV_F = \sigma_F(x) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$ صورت حجمی دلخواهی باشد، در این صورت با در نظر گرفتن $\sigma_F(x)$ به صورت:

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(B^n(1))}{Vol(B_x^n)},$$

صورت حجمی dV_F به دست آمده را صورت حجمی بوسمن-هاسدورف می‌نامیم که در آن Vol بیان‌گر حجم اقلیدسی و ω_n حجم اقلیدسی گوی واحد B^n در R^n است [4]. با در نظر گرفتن این صورت حجمی مفهوم انحراف از معیار^{۱۳} را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tau(x, y) = \ln \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma_{BH}(x)}.$$

واضح است که مفهوم انحراف از معیار همگن مثبت از درجه صفر است. برای یک بردار $y \in T_x M - \{0\}$ فرض کنیم $c = c(t)$ یک ژئودوزیک با شرایط $c(0) = x$ و $\dot{c}(0) = y$ باشد، در این صورت انحنای S را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$S(x, y) = \frac{d}{dt} [\tau(c(t), \dot{c}(t))] |_{t=0}.$$

بنابر تعریف مذکور در واقع انحنای S تحدید مشتق τ روی ژئودوزیک‌ها است. یعنی:

$$S(x, y) = \tau_{||}(x, y) y^l.$$

به‌وضوح می‌توان دید که انحنای S همگن از درجه یک است. یعنی به‌ازای هر $\lambda > 0$

$$S(x, \lambda y) = \lambda S(x, y),$$

از طرفی در مختصات موضعی داریم:

$$S(x, y) = y^i \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i.$$

با توجه به رابطه مذکور می‌توان رابطه دیگری برای انحنای S به صورت زیر بدست آورد:

$$S(x, y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m} [\ln \sigma_{BH}].$$

انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک

چنگ و همکاران (۲۰۱۷) انحنای ریت‌چی تصویری متریک‌های راندرزی را به صورت (۷) بیان کردند:

$$\begin{aligned} \text{PRic} = & \alpha Ric + 2\alpha s_{0;m}^m - 2t_{00} - \alpha^2 t^m_m \\ & + (n-1) \left\{ -\frac{2\alpha\beta}{F^2} s_0^2 + 2\alpha(\rho_m s^m_0) - \rho_{0;0} - \frac{\alpha}{F^2} r_{00} s_0 + \rho_0^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

برای اثبات شرط لزوم قضیه ۱،۱ فرض کنیم F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک باشد. با توجه به رابطه (۷) نتیجه می‌شود:

$$0 = {}^\alpha Ric + 2\alpha s^m_{0;m} - 2t_{00} - \alpha^2 t^m_m + (n-1) \left\{ -\frac{2\alpha\beta}{F^2} s_0^2 + 2\alpha(\rho_m s^m_0) - \rho_{0;0} - \frac{\alpha}{F^2} r_{00} s_0 + \rho_0^2 - F^2 c \right\}. \quad (8)$$

با ضرب طرفین رابطه مذکور در F^2 رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

$$0 = F^2 {}^\alpha Ric + 2F^2 \alpha s^m_{0;m} - 2F^2 t_{00} - \alpha^2 F^2 t^m_m + (n-1) \{-2\alpha\beta s_0^2 + 2F^2 \alpha(\rho_m s^m_0) - F^2 \rho_{0;0} - \alpha r_{00} s_0 + F^2 \rho_0^2 - F^4 c\}. \quad (9)$$

رابطه مذکور را می‌توان به صورت (۱۰) بازنویسی کرد:

$$E_4 \alpha^4 + E_3 \alpha^3 + E_2 \alpha^2 + E_1 \alpha + E_0 = 0, \quad (10)$$

که در آن

$$E_4 = -t^m_m - (n-1)c, \quad (11)$$

$$E_3 = 2\{s^m_{0;m} - \beta t^m_m + (n-1)(\rho_m s^m_0 - 2c\beta)\}, \quad (12)$$

$$E_2 = {}^\alpha Ric + 4\beta s^m_{0;m} - 2t_{00} - \beta^2 t^m_m + 4(n-1)\beta(\rho_m s^m_0) - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - 6(n-1)c\beta^2, \quad (13)$$

$$E_1 = 2\beta {}^\alpha Ric + 2\beta^2 s^m_{0;m} - 4\beta t_{00} - 2(n-1)\beta s_0^2 + 2(n-1)\beta^2(\rho_m s^m_0) - 2(n-1)\beta\rho_{0;0} + 2(n-1)\beta\rho_0^2 - (n-1)r_{00}s_0 - 4(n-1)c\beta^3, \quad (14)$$

$$E_0 = ({}^\alpha Ric - 2t_{00} - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - (n-1)c\beta^2)\beta^2. \quad (15)$$

از رابطه (۱۱) داریم:

$$E_4 \alpha^4 + E_2 \alpha^2 + E_0 = 0, \quad (16)$$

$$E_3 \alpha^2 + E_1 = 0. \quad (17)$$

از رابطه (۱۶) می‌توان گفت:

$$(E_4 \alpha^2 + E_2) \alpha^2 + E_0 = 0. \quad (18)$$

از آنجا که α^2 و β^2 چند جمله‌ای‌های اول نسبت به هم هستند، از رابطه (۱۸) و با استفاده از E_0 می‌توان گفت که یک تابع اسکالر λ روی M وجود دارد به طوری که:

$${}^\alpha Ric - 2t_{00} - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - (n-1)c\beta^2 = \lambda(x)\alpha^2. \quad (19)$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۹) در (۱۸) داریم:

$$E_4 \alpha^2 + E_2 + \lambda(x)\beta^2 = 0. \quad (20)$$

هم‌چنین از رابطه (۱۳) داریم:

$$E_2 = \lambda(x)\alpha^2 + 4\beta s^m_{0;m} - \beta^2 t^m_m + 4(n-1)\beta(\rho_m s^m_0) - 5(n-1)c\beta^2. \quad (21)$$

رابطه (۱۹) را به صورت (۲۲) بازنویسی می‌کنیم:

$${}^\alpha Ric = \lambda(x)\alpha^2 + 2t_{00} + (n-1)[\rho_{0;0} - \rho_0^2 + c\beta^2], \quad (22)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۱) در (۲۰) و با استفاده از رابطه (۱۱) داریم:

$$[\lambda - t^m_m - (n-1)c] (\alpha^2 + \beta^2) = -4\beta [s^m_{0;m} + (n-1)(\rho_m s^m_0) - (n-1)c\beta]. \quad (23)$$

در نتیجه از رابطه مذکور داریم:

$$\lambda = t^m_m + (n - 1)c, \tag{24}$$

$$s^m_{0;m} = -(n - 1)(\rho_m s^m_0 - c\beta). \tag{25}$$

بعلاوه با استفاده از روابط (۲۲)، (۲۴) و (۲۵) داریم:

$$E_1 = 2[t^m_m + (n - 1)c]\alpha^2\beta - (n - 1)s_0(r_{00} + 2\beta s_0), \tag{26}$$

$$E_3 = -2\beta[t^m_m + (n - 1)c]. \tag{27}$$

در نتیجه از رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$s_0(r_{00} + 2\beta s_0) = 0, \tag{28}$$

و از رابطه مذکور نتیجه می‌شود که $s_0 = 0$ یا $r_{00} + 2\beta s_0 = 0$.

اثبات کفایت شرط بدیهی است. زیرا با جای‌گذاری سه شرط موجود در قضیه ۱-۱ در رابطه (۷) داریم:

$$PRic = (n - 1)cF^2,$$

در این صورت می‌توان گفت F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک است.

نتیجه ۱،۲. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینه M باشد، در این صورت F از انحنای ریت‌چی

تصویری مسطح است اگر و فقط اگر این روابط برقرار باشند:

$${}^\alpha Ric = t^m_m \alpha^2 + 2t_{00} + (n - 1)[\rho_{0;0} - \rho_0^2],$$

$$s^m_{0;m} = -(n - 1)(\rho_m s^m_0),$$

$$s_0 = 0 \quad \text{یا} \quad r_{00} + 2\beta s_0 = 0.$$

۳. متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر

فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر باشد یعنی:

$$PRic(y) = PRic(-y),$$

در این صورت قضیه زیر قابل بیان است:

قضیه ۱،۳. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینه M باشد. در این صورت F را از انحنای

ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است اگر و فقط اگر:

$$s^m_{0;m} = -(n - 1)(\rho_m s^m_0), \tag{29}$$

$$r_{00} + 2\beta s_0 = 0 \quad \text{یا} \quad s_0 = 0. \tag{30}$$

در این حالت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است.

برهان: فرض می‌کنیم F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر باشد، با استفاده از رابطه (۷) و

$$PRic(y) = PRic(-y),$$

نتیجه می‌شود:

$$4F^2\alpha s^m_{0;m} + 2(n - 1)\{-2\alpha\beta s_0^2 + 2F^2\alpha(\rho_m s^m_0) - \alpha r_{00}s_0\} = 0, \tag{31}$$

که معادل با رابطه (۳۲) است:

$$N_3 \alpha^3 + N_2 \alpha^2 + N_1 \alpha = 0, \quad (32)$$

که در آن

$$N_3 = 4s^m_{0;m} + 4(n-1)(\rho_m s^m_0), \quad (33)$$

$$N_2 = 8\beta s^m_{0;m} + 8(n-1)\beta(\rho_m s^m_0), \quad (34)$$

$$N_1 = 4\beta^2 s^m_{0;m} - 4(n-1)\beta s_0^2 + 4(n-1)\beta^2(\rho_m s^m_0) - 2(n-1)r_{00}s_0. \quad (35)$$

بنا براین از معادله (۳۲) داریم:

$$N_3 \alpha^2 + N_1 = 0, \quad (36)$$

$$N_2 = 0. \quad (37)$$

از رابطه (۳۶) رابطه (۳۸) را به دست می‌آوریم:

$$s^m_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m_0). \quad (38)$$

رابطه مذکور همان معادله (۲۹) است. با جای‌گذاری رابطه (۳۸) در (۳۷) داریم:

$$s_0(r_{00} + 2\beta s_0) = 0. \quad (39)$$

در نتیجه $s_0 = 0$ یا $r_{00} + 2\beta s_0 = 0$

اثبات کفایت شرط بدیهی است زیرا از فرض برقرار بودن روابط (۲۹) و (۳۰) و با جای‌گذاری روابط (۳۸) و (۳۹) در رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$PRic = Ric - 2t_{00} - \alpha^2 t^m_m + (n-1)\{-\rho_{0;0} + \rho_0^2\}. \quad (40)$$

از معادله مذکور به‌وضوح دیده می‌شود که F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است. در واقع F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است. به‌این ترتیب کفایت شرط اثبات می‌شود. فرض کنیم متریک فینسلری F از انحنای S ایزوتروپیک باشد، یعنی:

$$S = (n+1)cF,$$

که در آن $c = c(x)$ یک تابع اسکالر روی خمینه M است. در این صورت داریم:

$$S_{|m} = (n+1)c_m F,$$

$$PRic = Ric + (n-1)c_0 F + (n-1)c^2 F^2.$$

که در آن $c_m := c_x^m$ و $c_0 := c_m y^m$. در این حالت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است اگر و فقط اگر

$$Ric_{.j.k.l} + (n-1)\{c_0 F_{.y.jy.ky.l} + c^2 F^2_{.y.jy.ky.l}\} = 0. \quad (41)$$

با استفاده از رابطه مذکور قضیه ۲-۳ قابل بیان است:

قضیه ۲،۳. فرض می‌کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینه n -بعدی M بوده و از انحنای ریت‌چی

مربعی باشد، در این صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است اگر و فقط اگر $S = 0$.

برهان: کفایت شرط بدیهی است. لزوم شرط را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی باشد،

در این صورت:

$$F_{y^j y^k y^l} = -\frac{1}{\alpha} \left[\delta_{jk} y_l (j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j) + \frac{3}{\alpha} y_l y_k y_j \right], \quad (42)$$

و

$$F^2_{y^j y^k y^l} = \frac{1}{\alpha} b_j \delta_{kl} (j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j) - \frac{1}{\alpha} \beta \delta_{jk} y_l (j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j) - \frac{3}{\alpha} \beta y_l y_k y_j - \frac{1}{\alpha} b_j y_k y_l (j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j), \quad (43)$$

که در آن نماد $(j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j)$ نشان‌دهندهٔ مجموع چرخش روی اندیس‌ها و سپس جمع‌بندی است. فرض کنیم F از انحنا ی ریت‌چی مربعی باشد در این صورت داریم:

$$Ric_{.j.k.l} = 0. \quad (44)$$

با جای‌گذاری روابط (۴۲)، (۴۳) و (۴۴) در رابطه (۴۱) داریم:

$$0 = (n-1) \left\{ -\frac{1}{\alpha} \left[(c_0 + \beta c^2) \delta_{jk} y_l (j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j) + \frac{3}{\alpha} (c_0 + \beta c^2) y_l y_k y_j \right] + \frac{c^2}{\alpha} \left[\left(\delta_{kl} - \frac{1}{\alpha} y_k y_l \right) b_j \right] (j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j) \right\}. \quad (45)$$

به‌وضوح دیده می‌شود که رابطه (۴۵) زمانی برقرار است که $c = 0$. بنا براین $S = 0$.

منابع

1. Shen Z., "Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces", Kluwer Academic Publishers, (2001).
2. Cheng X., Shen Y., Ma X., "On a class of projective Ricci flat Finsler metrics", Publ. Math. Debrecen, 7528 (2017) 1-12.
3. Tayebi A., Shahbazi Nia M., "A new class of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature $K = 1$ ", Differ. Geom. Appl, 41 (2015) 123-133.
4. Shen Z., "Volume comparison and applications in Riemann-Finsler geometry", Advances in Math, 128 (1997) 306-328.
5. Tayebi A., Sadeghi H., "Generalized P-reducible (α, β) -metrics with vanishing S-curvature, Ann. Polon. Math. 114 (1) (2015) 67-79.
6. Tayebi A., Rafie Rad M., "S-curvature of isotropic Berwald metrics", Science in China. Series A: Mathematics. 51 (2008) 2198-2204.