بررسی متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر

بهمن رضایی*، سمیه اسمعیل پور، مهران گبرانی؛
دانشگاه ارومیه، دانشکدهٔ علوم

دریافت ۹۶/۰۴/۰۹ پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

چکیده

در این مقاله به بررسی مفهومی جدید از شن[۱] به‌نام انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک می‌پردازیم. ضمن دسته‌بندی متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک[۲]، نشان می‌دهیم که متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیرند اگر و تنها اگر از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی باشند.

واژه‌های کلیدی: هندسه فینسلر، انحنای S، انحنای ریت‌چی، انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک.

مقدمه

شن در سال (۲۰۰۱) مفهوم انحنای ریت‌چی تصویری برای یک متریک فینسلری را بدین‌صورت معرفی کرد:

$$PRic := Ric + (n-1)\{\bar{S}_{|m}y^m + \bar{S}^2\}, \qquad (۱)$$

که در آن S بیانگر انحنای S یک کمیت غیرریمانی است و نقش مهمی را در هندسهٔ فینسلر بازی می‌کند و Ric نشان‌دهندهٔ انحنای ریت‌چی است [1]. هم‌چنین نماد «|» نشان‌دهندهٔ مشتق کواریان افقی[۳] نسبت به التصاق بروالد[۴] است و

$$\bar{S} := \frac{1}{n+1}S.$$

چنگ[5] و همکاران (۲۰۱۷) رابطهٔ انحنای ریت‌چی تصویری را به‌صورت

$$PRic = Ric + \frac{n-1}{n+1}S_{|m}y^m + \frac{n-1}{(n+1)^2}S^2 \qquad (۲)$$

بیان و متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری مسطح را به‌طور کامل دسته‌بندی کردند [2]. یک متریک فینسلر را از انحنای ریت‌چی تصویری مسطح گوییم هرگاه $PRic = 0$.

(α,β)_ متریکها دسته‌ای مهم و خاص از متریک‌های فینسلری را تشکیل می‌دهند که به‌صورت $F = \alpha\varphi(s)$ تعریف می‌شوند که در آن $s = \frac{\beta}{\alpha}$، $\alpha = \alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متریک ریمانی، $\beta = \beta(x,y) = b_i(x)y^i$ یک 1_صورت روی M و $\varphi(s)$ یک تابع مثبت از ردهٔ C^∞ است. با فرض $\varphi(s) = 1 + s$، آن‌گاه تابع

*نویسنده مسئول b.rezaei@urmia.ac.ir

1. Z. Shen
2. Isotropic projective Ricci curvature
3. Horizontal covariant derivative
4. Berwald connection
5. X. Cheng

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

$F=\alpha+\beta$ را که با در نظر گرفتن شرایطی روی 1ـ صورت β یک متریک فینسلری می‌شود را یک متریک راندرزی[6] می‌نامیم. قرار می‌دهیم:

$$r_{ij}:=\frac{1}{2}\left(b_{i;j}+b_{j;i}\right),\quad s_{ij}:=\frac{1}{2}\left(b_{i;j}-b_{j;i}\right),$$

که در آن نماد « ;» نشان‌دهندهٔ مشتق کواریان افقی نسبت به التصاق لوی‌چیوتیا[7] وابسته متریک α است. هم‌چنین قرارداد می‌کنیم:

$$r^i{}_j:=a^{im}r_{mj},\quad s^i{}_j:=a^{im}s_{mj},\quad r_j:=b^m r_{mj},\quad r:=r_{ij}b^ib^j=b^jr_j,$$
$$s_j:=b^m s_{mj},\quad q_{ij}:=r_{im}s^m{}_j,\quad t_{ij}:=s_{im}s^m{}_j,\quad q_j:=b^iq_{ij}=r_ms^m{}_j,$$
$$t_j:=b^it_{ij}=s_ms^m{}_j,\quad b:=\|\beta_x\|_\alpha,\quad \rho:=ln\sqrt{1-b^2},\quad \rho_i:=\rho_{x^i},$$

که در آن $\left(a^{ij}\right):=\left(a_{ij}\right)^{-1}$ و $b^i:=a^{ij}b_j$.

$$r_{i0}:=r_{ij}y^j,\quad s_{i0}:=s_{ij}y^j,\quad r_{00}:=r_{ij}y^iy^j,\quad r_0:=r_iy^i,\quad s_0:=s_iy^i,\rho_0:=\rho_iy^i.$$

تعریف: فرض کنیم F یک متریک فینسلری روی خمینهٔ M و $PRic$ نشان‌دهندهٔ انحنای ریت‌چی تصویری متریک F نسبت به صورت حجمی بوسمن–هاسدورف[8] باشد. در این‌صورت F را از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک گوییم هرگاه:

$$PRic=(n-1)cF^2, \tag{۳}$$

که در آن $c=c(x)$ یک تابع اسکالر روی M است. F را از انحنای ریت‌چی تصویری ثابت گوییم هرگاه c ثابت باشد. در ادامه متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک را دسته‌بندی می‌کنیم. در واقع قضیه ۱ قابل بیان و اثبات است:

قضیه ۱،۱. فرض کنیم $F=\alpha+\beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک است اگر و تنها اگر

$${}^{\alpha}Ric=\left(t^m{}_m+(n-1)c\right)\alpha^2+2t_{00}+(n-1)\left[\rho_{0;0}-\rho_0^2+c\beta^2\right], \tag{۴}$$
$$s^m{}_{0;m}=-(n-1)\left(\rho_ms^m{}_0-c\beta\right), \tag{۵}$$
$$s_0=0 \quad \text{یا} \quad r_{00}+2\beta s_0=0, \tag{۶}$$

که در آن نماد ${}^{\alpha}Ric$ نشان دهندهٔ انحنای ریت‌چی متریک ریمانی α و $c=c(x)$ یک تابع اسکالر روی M است.

قضیه ۲،۱. فرض کنیم $F=\alpha+\beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است اگر و فقط اگر از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی باشد.

نتیجهٔ ۳،۱. اگر $F=\alpha+\beta$ یک متریک راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی و ایزوتروپیک باشد، آن‌گاه F ریمانی است.

6. Randers metric
7. Levi-Civita connection
8. Busemann-Hausdorff volume form

مقدمات

فرض کنیم M یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر باشد، در این‌صورت یک ساختار فینسلری روی M عبارت است از نگاشت $F: TM \to [0, \infty)$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱. F روی $TM_0 = TM - \{0\}$ هموار باشد؛

۲. F روی y همگن مثبت[9] از درجه یک باشد. یعنی به ازای هر $\lambda > 0$؛

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y),$$

۳. به ازای هر (x, y) از TM ماتریس زیر موسوم به ماتریس هسیان[10] معین‌مثبت باشد؛

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j},$$

یعنی به‌ازای $X \neq 0$ داشته باشیم $g(X, X) > 0$، که g_{ij} مولفه‌های تانسور g هستند. در این‌صورت (M, F) را خمینهٔ فینسلری و F را تابع اساسی فینسلری[11] گوییم.

فرض کنیم F یک متریک فینسلری روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت منحنی $c(t)$ در خمینهٔ فینسلری (M, F) ژئودوزیک است هرگاه در معادله زیر صدق کند:

$$\ddot{c}(t) + 2G^i\big(c(t), \dot{c}(t)\big) = 0, \qquad i \in \{1, 000, n\},$$

که G^i ضرایب اسپری حاصل از متریک F است و بدین‌صورت روی M تعریف می‌شود:

$$G^i = \frac{1}{4}\, g^{il}\left\{[F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l}\right\},$$

که در آن $y \in T_xM$، $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$.

انحنای ریمان یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس T_pM هستند که بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$R = \left\{R_y: T_pM \to T_pM \,\middle|\, y \in T_pM, p \in M\right\},$$

که در حالت موضعی R_y را می‌توان نسبت به پایه‌های فضای T_pM بدین‌صورت بیان کرد:

$$R_y = R^i{}_k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k,$$

به‌طوری‌که $R^i{}_k = R^i{}_k(x, y)$ نشان‌دهندهٔ ضرایب انحنای ریمان F است و بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$R^i{}_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

انحنای ریت‌چی، اثر انحنای ریمان است و بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$Ric(x, y) = R^i{}_i(x, y).$$

طبق تعریف، انحنای ریت‌چی یک تابع معین مثبت از درجهٔ ۲ روی y است [3].

در هندسهٔ فینسلر دو صورت حجمی مهم وجود دارند که یکی صورت حجمی بوسمن-هاسدورف و دیگری صورت حجمی هالمس-تامسون[12] است. فرض کنیم $\{e_i\}_{i=1}^n$ پایهٔ دلخواه برای T_xM و $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ پایه دوگان برای $T_x{}^*M$ باشند، در این‌صورت زیر مجموعه باز کراندار B_x^n در R^n را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

9. Positive homogeneity
10. Hessian matrix
11. Fundamental Finsler function
12. Holmes-Thompson

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

$$B_x^n = \{(y^i) \in R^n | F(y^i e_i) < 1\}.$$

فرض کنیم $dV_F = \sigma_F(x)\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$ صورت حجمی دلخواهی باشد، در این‌صورت با در نظر گرفتن $\sigma_F(x)$ به‌صورت:

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(B^n(1))}{Vol(B^n{}_x)},$$

صورت حجمی dV_F به‌دست آمده را صورت حجمی بوسمن–هاسدورف می‌نامیم که در آن Vol بیان‌گر حجم اقلیدسی و ω_n حجم اقلیدسی گوی واحد B^n در R^n است [4]. با در نظر گرفتن این صورت حجمی مفهوم انحراف از معیار[13] را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tau(x,y) = \ln \frac{\sqrt{\det\left(g_{ij}(x,y)\right)}}{\sigma_{BH}(x)}.$$

واضح است که مفهوم انحراف از معیار همگن مثبت از درجهٔ صفر است. برای یک بردار $y \in T_xM - \{0\}$ فرض کنیم $\mathrm{c} = \mathrm{c(t)}$ یک ژئودوزیک با شرایط $\mathrm{c(0) = x}$ و $\dot{c}(0) = \mathrm{y}$ باشد، در این‌صورت انحنای S را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$S(x,y) = \frac{d}{dt}[\tau\left(c(t), \dot{c}(\mathrm{t})\right)]|\mathrm{t} = 0.$$

بنابر تعریف مذکور در واقع انحنای S تحدید مشتق τ روی ژئودوزیک‌ها است. یعنی:

$$S(x,y) = \tau_{|l}(\mathrm{x,y})\mathrm{y}^l.$$

به‌وضوح می‌توان دید که انحنای S همگن از درجهٔ یک است. یعنی به‌ازای هر $\lambda > 0$،

$$S(x, \lambda y) = \lambda S(x,y),$$

از طرفی در مختصات موضعی داریم:

$$S(x,y) = \mathrm{y}^{\mathrm{i}} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i.$$

با توجه به رابطهٔ مذکور می‌توان رابطه دیگری برای انحنای S به‌صورت زیر بدست آورد:

$$S(x,y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left[ln\sigma_{BH}\right].$$

انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک

چنگ و همکاران (۲۰۱۷) انحنای ریت‌چی تصویری متریک‌های راندرزی را به‌صورت (۷) بیان کردند:

$$\begin{aligned}\mathrm{PRic} = {}& {}^{\alpha}Ric + 2\alpha \mathrm{s^m}_{0;\mathrm{m}} - 2\mathrm{t}_{00} - \alpha^2 \mathrm{t^m}_{\mathrm{m}} \\ & +(\mathrm{n}-1)\left\{-\frac{2\alpha\beta}{\mathrm{F}^2}s_0^2 + 2\alpha(\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{s^m}_0) - \rho_{0;0} - \frac{\alpha}{\mathrm{F}^2}\ \mathrm{r}_{00}\mathrm{s}_0 + \rho_0^2\right\}.\end{aligned} \tag{۷}$$

برای اثبات شرط لزوم قضیه ۱،۱ فرض کنیم F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک باشد. با توجه به رابطهٔ (۷) نتیجه می‌شود:

13. Distortion

$$0 = {}^{\alpha}Ric + 2\alpha \mathrm{s^m}_{0;\mathrm{m}} - 2\mathrm{t}_{00} - \alpha^2 \mathrm{t^m}_{\mathrm{m}} + (\mathrm{n}-1)\left\{-\frac{2\alpha\beta}{\mathrm{F}^2}s_0^2 + 2\alpha(\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{s^m}_0) - \rho_{0;0} - \frac{\alpha}{\mathrm{F}^2}\,\mathrm{r}_{00}\mathrm{s}_0 + \rho_0^2 - \mathrm{F}^2 c\right\}. \tag{۸}$$

با ضرب طرفین رابطه مذکور در F^2 رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

$$0 = \mathrm{F}^{2\alpha}\mathrm{Ric} + 2\mathrm{F}^2\alpha \mathrm{s^m}_{0;\mathrm{m}} - 2\mathrm{F}^2\mathrm{t}_{00} - \alpha^2\mathrm{F}^2\mathrm{t^m}_{\mathrm{m}} + (\mathrm{n}-1)\{-2\alpha\beta s_0^2 + 2\mathrm{F}^2\alpha(\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{s^m}_0) - \mathrm{F}^2\rho_{0;0} - \alpha\,\mathrm{r}_{00}\mathrm{s}_0 + \mathrm{F}^2\rho_0^2 - \mathrm{F}^4 c\}. \tag{۹}$$

رابطهٔ مذکور را می‌توان به‌صورت (۱۰) بازنویسی کرد:

$$E_4\alpha^4 + E_3\alpha^3 + E_2\alpha^2 + E_1\alpha + E_0 = 0, \tag{۱۰}$$

که در آن

$$E_4 = -\mathrm{t^m}_{\mathrm{m}} - (n-1)c, \tag{۱۱}$$

$$E_3 = 2\{s^m{}_{0;m} - \beta t^m{}_m + (n-1)(\rho_m s^m{}_0 - 2c\beta)\}, \tag{۱۲}$$

$$E_2 = {}^{\alpha}Ric + 4\beta s^m{}_{0;m} - 2t_{00} - \beta^2 t^m{}_m + 4(n-1)\beta(\rho_m s^m{}_0) - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - 6(n-1)c\beta^2, \tag{۱۳}$$

$$E_1 = 2\beta^{\alpha}Ric + 2\beta^2 s^m{}_{0;m} - 4\beta t_{00} - 2(n-1)\beta s_0^2 + 2(n-1)\beta^2(\rho_m s^m{}_0) - 2(n-1)\beta\rho_{0;0} + 2(n-1)\beta\rho_0^2 - (n-1)r_{00}s_0 - 4(n-1)c\beta^3, \tag{۱۴}$$

$$E_0 = ({}^{\alpha}Ric - 2t_{00} - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - (n-1)c\beta^2)\beta^2. \tag{۱۵}$$

از رابطهٔ (۱۱) داریم:

$$E_4\alpha^4 + E_2\alpha^2 + E_0 = 0, \tag{۱۶}$$

$$E_3\alpha^2 + E_1 = 0. \tag{۱۷}$$

از رابطهٔ (۱۶) می‌توان گفت:

$$(E_4\alpha^2 + E_2)\alpha^2 + E_0 = 0. \tag{۱۸}$$

از آنجاکه α^2 و β^2 چند جمله‌ای‌های اول نسبت به‌هم هستند، از رابطهٔ (۱۸) و با استفاده از E_0 می‌توان گفت که یک تابع اسکالر λ روی M وجود دارد به‌طوری‌که:

$${}^{\propto}Ric - 2t_{00} - (n-1)\rho_{0;0} + (n-1)\rho_0^2 - (n-1)c\beta^2 = \lambda(x)\alpha^2. \tag{۱۹}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۹) در (۱۸) داریم:

$$E_4\alpha^2 + E_2 + \lambda(x)\beta^2 = 0. \tag{۲۰}$$

هم‌چنین از رابطهٔ (۱۳) داریم:

$$E_2 = \lambda(x)\alpha^2 + 4\beta s^m{}_{0;m} - \beta^2 t^m{}_m + 4(n-1)\beta(\rho_m s^m{}_0) - 5(n-1)c\beta^2. \tag{۲۱}$$

رابطهٔ (۱۹) را به‌صورت (۲۲) بازنویسی می‌کنیم:

$${}^{\alpha}Ric = \lambda(x)\alpha^2 + 2t_{00} + (n-1)[\rho_{0;0} - \rho_0^2 + c\beta^2], \tag{۲۲}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲۱) در (۲۰) و با استفاده از رابطهٔ (۱۱) داریم:

$$[\lambda - t^m{}_m - (n-1)c]\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = -4\beta[s^m{}_{0;m} + (n-1)(\rho_m s^m{}_0) - (n-1)c\beta]. \tag{۲۳}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

در نتیجه از رابطهٔ مذکور داریم:

$$\lambda = \mathrm{t^m}_\mathrm{m} + (\mathrm{n}-1)c, \tag{۲۴}$$

$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0 - c\beta). \tag{۲۵}$$

به‌علاوه با استفاده از روابط (۲۲)، (۲۴) و (۲۵) داریم:

$$E_1 = 2[t^m{}_m + (n-1)c]\alpha^2\beta - (n-1)s_0(r_{00} + 2\beta s_0), \tag{۲۶}$$

$$E_3 = -2\beta[t^m{}_m + (n-1)c]. \tag{۲۷}$$

در نتیجه از رابطهٔ (۱۷) خواهیم داشت:

$$s_0(r_{00} + 2\beta s_0) = 0, \tag{۲۸}$$

و از رابطهٔ مذکور نتیجه می‌شود که $s_0 = 0$ یا $r_{00} + 2\beta s_0 = 0$.

اثبات کفایت شرط بدیهی است. زیرا با جای‌گذاری سه شرط موجود در قضیه ۱-۱ در رابطهٔ (۷) داریم:

$$PRic = (n-1)cF^2,$$

در این‌صورت می‌توان گفت F از انحنای ریت‌چی تصویری ایزوتروپیک است.

نتیجه ۱,۲. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری مسطح است اگر و فقط اگر این روابط برقرار باشند:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}Ric &= t^m{}_m\,\alpha^2 + 2t_{00} + (n-1)[\,\rho_{0;0} - \rho_0^2\,], \\ s^m{}_{0;m} &= -(n-1)(\rho_m s^m{}_0\,), \\ s_0 = 0 \quad &\text{یا} \quad r_{00} + 2\beta s_0 = 0. \end{aligned}$$

۳. متریک‌های راندرزی از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر

فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر باشد یعنی:

$$PRic(y) = PRic(-y),$$

در این‌صورت قضیه زیر قابل بیان است:

قضیه ۱,۳. فرض کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ M باشد. در این‌صورت F را از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است اگر و فقط اگر:

$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0), \tag{۲۹}$$

$$r_{00} + 2\beta s_0 = 0 \text{ یا } s_0 = 0. \tag{۳۰}$$

در این حالت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است.

برهان: فرض می‌کنیم F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر باشد، با استفاده از رابطهٔ (۷) و

$$PRic(y) = PRic(-y),$$

نتیجه می‌شود:

$$4F^2\alpha s^m{}_{0;m} + 2(n-1)\{-2\alpha\beta s_0^2 + 2F^2\alpha(\rho_m s^m{}_0) - \alpha\, r_{00}s_0\} = 0, \tag{۳۱}$$

که معادل با رابطهٔ (۳۲) است:

$$N_3\alpha^3 + N_2\alpha^2 + N_1\alpha = 0, \tag{۳۲}$$

که در آن

$$N_3 = 4s^m{}_{0;m} + 4(n-1)(\rho_m s^m{}_0), \tag{۳۳}$$

$$N_2 = 8\beta s^m{}_{0;m} + 8(n-1)\beta(\rho_m s^m{}_0), \tag{۳۴}$$

$$N_1 = 4\beta^2 s^m{}_{0;m} - 4(n-1)\beta s_0^2 + 4(n-1)\beta^2(\rho_m s^m{}_0) - 2(n-1)r_{00}s_0. \tag{۳۵}$$

بنا براین از معادلهٔ (۳۲) داریم:

$$N_3\alpha^2 + N_1 = 0, \tag{۳۶}$$

$$N_2 = 0. \tag{۳۷}$$

از رابطهٔ (۳۶) رابطهٔ (۳۸) را به‌دست می‌آوریم:

$$s^m{}_{0;m} = -(n-1)(\rho_m s^m{}_0). \tag{۳۸}$$

رابطهٔ مذکور همان معادلهٔ (۲۹) است. با جای‌گذاری رابطهٔ (۳۸) در (۳۷) داریم:

$$s_0(r_{00}+2\beta s_0) = 0. \tag{۳۹}$$

در نتیجه $s_0 = 0$ یا $r_{00} + 2\beta s_0 = 0$.

اثبات کفایت شرط بدیهی است زیرا از فرض برقرار بودن روابط (۲۹) و (۳۰) و با جای‌گذاری روابط (۳۸) و (۳۹) در رابطهٔ (۷) خواهیم داشت:

$$PRic = Ric - 2t_{00} - \alpha^2 t^m{}_m + (n-1)\{-\rho_{0;0} + \rho_0^2\}. \tag{۴۰}$$

از معادلهٔ مذکور به‌وضوح دیده می‌شود که F از انحنای ریت‌چی تصویری برگشت‌پذیر است. در واقع F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است. به‌این‌ترتیب کفایت شرط اثبات می‌شود.

فرض کنیم متریک فینسلری F از انحنای S ایزوتروپیک باشد، یعنی:

$$S = (n+1)cF,$$

که در آن $c = c(x)$ یک تابع اسکالر روی خمینهٔ M است. در این‌صورت داریم:

$$S_{|m} = (n+1)c_m F,$$

$$PRic = Ric + (n-1)c_0\, F + (n-1)c^2\, F^2.$$

که در آن $c_m := c_{x^m}$ و $c_0 := c_m y^m$. در این حالت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است اگر و فقط اگر

$$Ric_{.j.k.l} + (n-1)\{c_0\, F_{y^j y^k y^l} + c^2\, F^2{}_{y^j y^k y^l}\} = 0. \tag{۴۱}$$

با استفاده از رابطهٔ مذکور قضیه ۲-۳ قابل بیان است:

قضیه ۲,۳. فرض می‌کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی روی خمینهٔ n–بعدی M بوده و از انحنای ریت‌چی مربعی باشد، در این‌صورت F از انحنای ریت‌چی تصویری مربعی است اگر و فقط اگر $S = 0$.

برهان: کفایت شرط بدیهی است. لزوم شرط را اثبات می‌کنیم. فرض‌کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متریک راندرزی باشد، در این‌صورت:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.2.6.6]
[DOI: 10.29252/mmr.3.2.105]

$$F_{y^j y^k y^l} = -\frac{1}{\alpha^3}\left[\delta_{jk} y_l (j \to k \to l \to j) + \frac{3}{\alpha^2} y_l y_k y_j\right], \tag{۴۲}$$

و

$$F^2{}_{y^j y^k y^l} = \frac{1}{\alpha} b_j \delta_{kl} (j \to k \to l \to j) - \frac{1}{\alpha^3} \beta \delta_{jk} y_l (j \to k \to l \to j) - \frac{3}{\alpha^5} \beta y_l y_k y_j - \frac{1}{\alpha^3} b_j y_k y_l (j \to k \to l \to j), \tag{۴۳}$$

که در آن نماد $(j \to k \to l \to j)$ نشان‌دهندۀ مجموع چرخش روی اندیس‌ها و سپس جمع‌بندی است. فرض کنیم F از انحنای ریت‌چی مربعی باشد در این‌صورت داریم:

$$Ric_{.j.k.l} = 0. \tag{۴۴}$$

با جای‌گذاری روابط (۴۲)، (۴۳) و (۴۴) در رابطۀ (۴۱) داریم:

$$0 = (n-1)\left\{-\frac{1}{\alpha^3}\left[(c_0 + \beta c^2)\delta_{jk} y_l (j \to k \to l \to j) + \frac{3}{\alpha^2}(c_0 + \beta c^2) y_l y_k y_j\right] + \frac{c^2}{\alpha}\left[\left(\delta_{kl} - \frac{1}{\alpha^2} y_k y_l\right) b_j\right](j \to k \to l \to j)\right\}. \tag{۴۵}$$

به‌وضوح دیده می‌شود که رابطۀ (۴۵) زمانی برقرار است که $c = 0$. بنا براین $S = 0$.

منابع

1. Shen Z., "Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces", Kluwer Academic Publishers, (2001).
2. Cheng X., Shen Y., Ma X., "On a class of projective Ricci flat Finsler metrics", Publ. Math. Debrecen, 7528 (2017) 1-12.
3. Tayebi A., Shahbazi Nia M., "A new class of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature $K = 1$", Differ. Geom. Appl, 41 (2015) 123-133.
4. Shen Z., "Volume comparison and applications in Riemann-Finsler geometry", Advances in Math, 128 (1997) 306-328.
5. Tayebi A., Sadeghi H., "Generalized P-reducible (α,β)-metrics with vanishing S-curvature, Ann. Polon. Math. 114 (1) (2015) 67-79.
6. Tayebi A., Rafie Rad M., "S-curvature of isotropic Berwald metrics", Science in China. Series A: Mathematics. 51 (2008) 2198-2204.