

زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد CR ماکسیمال کنتاکت از فضا فرم

ساساکی

محمد المکچی*، اسمعیل عابدی

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

دریافت ۹۶/۰۴/۱۴

چکیده

در این مقاله زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال کنتاکت در فضا فرم ساساکی را در نظر می‌گیریم و ساختار کلی این زیرخمینه‌ها را بررسی کرده سپس ساختار این زیرخمینه‌ها را با شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = g(FX, Y)\zeta$$

برای میدان برداری قائم ζ ، که مخالف صفر است، را بررسی شده است و در حالت کلی این زیرخمینه‌ها را رده‌بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضا فرم ساساکی، زیرخمینه کنتاکت CR با بعد ماکسیمال کنتاکت، زیرخمینه.

مقدمه

فرض کنید M زیرخمینه‌ای (هم‌بند) از بعد $n+1$ از فضا فرم ساساکی $(\overline{M}(c), \phi, \zeta, \eta, g)$ باشد. هم‌چنین اگر زیرفضاهای ماکسیمال ϕ -پایای M از بعد $n-1$ باشند آن‌گاه یک ساختار به‌طور طبیعی با متر القایی می‌پذیرد [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۳]، [۱۴] که زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال نامیده می‌شوند. در حالتی که M ابررویه باشد آن‌گاه زیرفضاهای ماکسیمال ϕ -پایای M لزوماً از بعد $n-1$ است. اما در حالتی که M از نقص بعد بالاتر باشد نتایج کم‌تر شناخته شده‌ای از زیرخمینه را می‌دانیم.

کیم^۱ و پاک^۲ زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال در کره واحد را که در شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = 0$$

صدق می‌کرد را بررسی کردند [۹]، [۱۴] و این زیرخمینه‌ها را مشخص کردند که در آن F نشان‌گر درون‌ریختی پاد متقارن القایی از ϕ بوده است که روی کلاف مماس TM اثر می‌کند و h دومین فرم اساسی روی M است. هم‌چنین اوکومورا^۳ و دجوریک^۴ زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال با همین شرط را در فضا فرم مختلط را بررسی و مطالعه کردند [۴]، [۵].

بعد از آن، کیم، چوی و پاک [۱۰] و اوکومورا و دجوریک [۶]، [۷]، این زیرخمینه‌ها را به‌ترتیب در کره واحد و فضا فرم مختلط بررسی کردند که در شرط

ilmakchi@azaruniv.ac.ir

*نویسنده مسئول

1. Kim
2. Pak
3. Okumura
4. Djoric

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = g(FX, Y) \zeta$$

صدق می‌کنند که در آن ζ میدان برداری قائم مخالف صفر بر M است.

هم‌چنین، کیم، چوی و پاک این زیرخمینه‌ها را در فضا فرم ساساکی با شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = 0$$

بررسی کرده و این زیرخمینه‌ها را مشخص کردند [۱۰].

در این مقاله زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال در فضا فرم ساساکی با شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = g(FX, Y) \zeta$$

را مطالعه و بررسی می‌کنیم.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

خمینه دیفرانسیل پذیر M^{2n+1} دارای یک ساختار تقریباً کنتاکت نامیده می‌شود اگر میدان برداری همیشه ناصفر

ζ ، یک فرم η و میدان تانسور ϕ از نوع (۱،۱) وجود داشته باشند به طوری که در روابط

$$\eta(\zeta) = 1, \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \zeta, \quad (1)$$

که I نشان‌دهنده میدان انتقال همانی روی فضای مماس در همه نقاط است، صدق کند. میدان برداری ζ میدان

برداری مشخصه نامیده می‌شود. این شرایط روی خمینه ایجاب می‌کنند که $\phi\zeta = 0$ و $\eta \circ \phi = 0$ است. هم‌چنین

نشان می‌دهد اندومورفیسم ϕ در هر نقطه روی M^{2n+1} دارای رتبه $2n$ است. خمینه M^{2n+1} همراه با ساختار تقریباً

کنتاکت (ϕ, ζ, η) ، خمینه تقریباً کنتاکت نامیده می‌شود و به صورت $(M^{2n+1}, \phi, \zeta, \eta)$ نمایش داده می‌شود [۳].

اگر خمینه تقریباً کنتاکت $(M^{2n+1}, \phi, \zeta, \eta)$ مجهز به متر ریمانی g باشد به طوری که در رابطه

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

برای همه میدان‌های برداری X و Y صدق کند، در این صورت متر ریمانی g ، متر سازگار نامیده می‌شود و ساختار

(ϕ, ζ, η, g) یک ساختار متری تقریباً کنتاکت و خمینه M^{2n+1} با این ساختار، خمینه تقریباً کنتاکت ریمانی نامیده

می‌شود و به صورت $(M, \phi, \zeta, \eta, g)$ نشان داده می‌شود [۳].

توجه داشته باشید که برای همه میدان‌های برداری X مماس بر M^{2n+1} ،

$$\eta(X) = g(X, \zeta),$$

است. بنابراین η متریک دوگان برای میدان برداری مشخصه ζ است [۳].

خمینه M^{2n+1} خمینه کنتاکت نامیده می‌شود اگر به یک فرم سراسری η روی هر نقطه M^{2n+1} مجهز باشد

به طوری که در رابطه

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0,$$

صدق کند. یک فرم η فرم کنتاکت نامیده می‌شود [۳].

زیرخمینه M از خمینه کنتاکت M^{2n+1} مماس بر میدان برداری ζ زیرخمینه پایا نامید می‌شود اگر برای هر نقطه

$\phi(T_p M) \subset T_p M$ ، $p \in M$ باشد. هم‌چنین اگر برای هر نقطه $\phi(T_p M) \subset T_p^\perp M$ ، $p \in M$ باشد زیرخمینه

را ناپایا می‌نامند [۳].

زیرخمینه M از خمینه کنتاکت M^{2n+1} مماس بر میدان برداری ξ را زیرخمینه CR می‌نامند هرگاه یک جفت توزیع متمم متعامد D و $D^\perp$ روی M موجود باشد به‌طوری‌که

$$1. \quad \xi \in TM = D \oplus D^\perp \oplus \mathbb{R}\xi, \quad \text{که } \xi \text{ توزیع یک بعدی تولید شده به وسیله } \xi \text{ است؛}$$

$$2. \quad D \text{ تحت } \phi \text{ پایا باشد یعنی برای هر } p \in M, \phi(D_p) \subset D_p, \text{ برقرار باشد؛}$$

$$3. \quad D^\perp \text{ تحت } \phi \text{ ناپایا باشد یعنی برای هر } p \in M, \phi(D_p^\perp) \subset T_p^\perp M, \text{ برقرار باشد [۳].}$$

فرض کنید (M, ϕ, ξ, η, g) خمینه کنتاکت $(2n+1)$ بعدی باشد به‌طوری‌که

$$(2) \quad \nabla_X \xi = \phi X, \quad (\nabla_X \phi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X,$$

که ∇ التصاق لوی-چویتا نسبت به متر g را نشان می‌دهد، در این صورت M یک خمینه ساساکی نامیده می‌شود [۳].

صفحه برشی π از TM برای هر $x \in M$ ، اگر در رابطه $\phi\pi_x \subseteq \pi_x$ صدق کند یک ϕ -برش نامیده می‌شود.

M با خمیدگی ϕ -برشی ثابت نامیده می‌شود اگر خمیدگی برشی همه ϕ -برش‌ها ثابت باشند. فضا فرم ساساکی

یک خمینه ساساکی با خمیدگی ϕ -برشی ثابت است. اگر این مقدار ثابت برابر $4c$ باشد در این صورت فضا فرم

ساساکی را به صورت $M(c)$ نشان می‌دهند. در این حالت خمیدگی ریمانی میدان تانسوری R برای هر

$$X, Y, Z \in \chi(M) \text{ بدین صورت است [۱۵].}$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & \frac{c+3}{4} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ & - \frac{c-1}{4} \{ \eta(Z)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + [g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)]\xi \\ & - g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(\phi X, Y)\phi Z \}. \end{aligned} \quad (3)$$

مفاهیم اصلی

فرض کنید $\overline{M}(c)$ فضا فرم ساساکی با بعد $(2m+1)$ با ساختار (ϕ, ξ, η, g) باشد. فرض کنید M زیرخمینه

CR با بعد $(n+1)$ و مماس بر میدان برداری ساختاری ξ از $\overline{M}(c)$ باشد و D_x برای هر $x \in M$ زیرفضای ϕ -

پایا با بعد ثابت در $T_x M$ باشد. بنابراین برای هر $x \in M$ ، D_x نمی‌تواند شامل ξ باشد. همچنین فرض کنید برای

هر $x \in M$ ، بعد $D_x^\perp$ ثابت و برابر مقدار ۱ باشد یعنی $\dim D_x^\perp = 1$. در حقیقت میدان برداری ناصفر U در $D_x^\perp$

وجود دارد به‌طوری‌که $D^\perp = \text{Span} U$. بنابراین

$$(4) \quad N := \phi U$$

باید بر M عمود باشد. بنابراین $\phi TM \subseteq TM \oplus \text{Span} N$. حال با در نظر گرفتن میدان‌های برداری یکه متعامد

$$N_i, i = 1, \dots, p; N_1 := N, p := 2m - n$$

برای فضای متعامد بر M ، برای هر میدان برداری مماس X ، داریم:

$$(5) \quad \phi X = FX + u(X)N.$$

با توجه به ساختار القایی F از ϕ به آسانی نتیجه می‌شود که F اندومورفیسم پادمتقارن روی $T_x M$ است.

همچنین با توجه به ساختار $T_x^\perp M$ ، ضرایب P_{ij} موجودند به‌طوری‌که برای $i = 2, \dots, p$ داریم:

$$(6) \quad \phi N_i = \sum_{j=2}^p P_{ij} N_j,$$

و $P_{ij} = -P_{ji}$. چون میدان برداری ساختاری ξ مماس بر M است و با توجه به (۲)، (۴) و (۵) داریم:

$$F\xi = 0, \quad FU = 0, \quad u(X) = g(U, X), \quad u(\xi) = \eta(U) = 0. \quad (۷)$$

حال با اثر دادن ϕ بر (۵) و استفاده از (۲)، (۴)، (۵) و (۷) داریم:

$$F^2X = -X + u(X)U + \eta(X)\xi, \quad u(FX) = 0. \quad (۸)$$

همچنین از (۲) و (۷) داریم:

$$\phi N = -U. \quad (۹)$$

با توجه به (۶) پایه موضعی یک عمود $\{N, N_a, N_{a^*}\}_{a=1, \dots, q}$ از بردارهای قائم بر M چنان وجود دارد که

$$N_{a^*} := \phi N_a, \quad a = 1, \dots, q, \quad \frac{(p-1)}{2}. \quad (۱۰)$$

اگر التصاق لوی-چویتا روی $\overline{M}(c)$ و M را به ترتیب با $\bar{\nabla}$ و ∇ نشان دهیم و $\nabla^\perp$ بیانگر التصاق قائم القایی از $\bar{\nabla}$ روی کلاف قائم $TM^\perp$ باشد بنابر فرمول وینگارتن و گاوس برای میدان‌های برداری X, Y روی M داریم:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (۱۱)$$

$$\bar{\nabla}_X N = -AX + \nabla_X^\perp N = -AX + \sum_{a=1}^q \{s_a(X)N_a + s_{a^*}(X)N_{a^*}\}, \quad (۱۲)$$

$$\bar{\nabla}_X N_a = -A_a X - s_a(X)N + \sum_{b=1}^q \{s_{ab}(X)N_b + s_{ab^*}(X)N_{b^*}\}, \quad (۱۳)$$

$$\bar{\nabla}_X N_{a^*} = -A_{a^*} X - s_{a^*}(X)N + \sum_{b=1}^q \{s_{a^*b}(X)N_b + s_{a^*b^*}(X)N_{b^*}\}, \quad (۱۴)$$

که $s_a, s_{a^*}, s_{ab}, s_{ab^*}, s_{a^*b}, s_{a^*b^*}$ ضرایب التصاق قائم $\nabla^\perp$ و h نشانگر دومین فرم اساسی و A, A_a, A_{a^*} عملگرهای شکل متناظر میدان‌های برداری قائم N, N_a, N_{a^*} هستند. همچنین با توجه به تعریف دومین فرم اساسی داریم:

$$h(X, Y) = g(AX, Y)N + \sum_{a=1}^q \{g(A_a X, Y)N_a + g(A_{a^*} X, Y)N_{a^*}\}. \quad (۱۵)$$

چون میدان برداری ξ روی M مماس است بنابر (۲)، (۴)، (۹)، (۱۰)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$A_a X = -FA_{a^*} X + s_{a^*}(X)U, \quad A_{a^*} X = FA_a X - s_a(X)U, \quad (۱۶)$$

$$s_a(X) = -u(A_{a^*} X), \quad s_{a^*}(X) = u(A_a X). \quad (۱۷)$$

به علاوه، چون F پاد متقارن است با توجه به معادله (۱۵) داریم:

$$g((FA_a + A_a F)X, Y) = s_a(X)u(Y) - s_a(Y)u(X), \quad (۱۸)$$

$$g((FA_{a^*} + A_{a^*} F)X, Y) = s_{a^*}(X)u(Y) - s_{a^*}(Y)u(X). \quad (۱۹)$$

با مشتق‌گیری از معادلات (۴) و (۹) و مقایسه قسمت‌های مماس و قائم و استفاده از معادلات (۲)، (۴)، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) و (۱۵) داریم:

$$(\nabla_Y F)X = -g(Y, X)\xi + \eta(X)Y - g(AY, X)U + u(X)AY, \quad (۲۰)$$

$$\nabla_X U = FAX, \quad (\nabla_Y u)X = g(FAY, X), \quad (۲۱)$$

همچنین چون میدان برداری ξ مماس بر خمینه M بود با استفاده از روابط (۲)، (۱۱)، (۱۵) داریم:

$$\nabla_X \xi = FX, \quad (\nabla_X \eta)Y = g(FX, Y), \quad (22)$$

$$\eta(AX) = g(A\xi, X) = u(X), \quad A\xi = U, \quad (23)$$

$$A_a \xi = 0, \quad A_{a^*} \xi = 0, \quad a = 2, \dots, q. \quad (24)$$

هم‌چنین بنابر رابطه (۳)، (۵) و (۶) بنابر معادلهٔ کودازی برای میدان‌های برداری X, Y مماس بر M داریم:

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X &= \frac{c-1}{4} \{u(X)FY - u(Y)FX - 2g(FX, Y)U\} \\ &+ \sum_{a=1}^q \{s_a(X)A_a Y - s_a(Y)A_a X + s_{a^*}(X)A_{a^*} Y - s_{a^*}(Y)A_{a^*} X\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X A_a)Y - (\nabla_Y A_a)X &= s_a(Y)AX - s_a(X)AY \\ &+ \sum_{b=1}^q \{s_{ab}(X)AbY - s_{ab}(Y)A_b X + s_{ab^*}(X)A_{b^*} Y - s_{ab^*}(Y)A_{b^*} X\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X A_{a^*})Y - (\nabla_Y A_{a^*})X &= s_{a^*}(Y)AX - s_{a^*}(X)AY \\ &+ \sum_{b=1}^q \{s_{a^*b}(X)AbY - s_{a^*b}(Y)AbX + s_{a^*b^*}(X)A_{b^*} Y - s_{a^*b^*}(Y)A_{b^*} X\}, \end{aligned} \quad (27)$$

که R و $R^\perp$ به ترتیب بیان‌گر تانسور خمیدگی و تانسور خمیدگی قائم بر M هستند.

نتایج اولیه

فرض کنیم برای زیرخمینه M با بعد CR ماکسیمال، میدان برداری قائم مخالف صفر چون ζ موجود باشد به‌طوری‌که در معادلهٔ (۴.۱) صدق کند

$$h(FX, Y) - h(X, FY) = g(FX, Y)\zeta, \quad (28)$$

که میدان‌های برداری X, Y مماس بر M هستند. از طرفی بنابر رابطهٔ (۱۰) داریم:

$$\zeta = \rho N + \sum_{a=1}^q (\rho_a N_a + \rho_{a^*} N_{a^*}).$$

بنابر روابط (۱۵) و (۲۸) برای هر $a = 1, \dots, q$ داریم:

$$(AF + FA)X = \rho FX, \quad (29)$$

$$(A_a F + FA_a)X = \rho_a FX, \quad (A_{a^*} F + FA_{a^*})X = \rho_{a^*} FX. \quad (30)$$

هم‌چنین از معادلات (۱۸) و (۱۹) داریم:

$$s_a(X)u(Y) - s_a(Y)u(X) = \rho_a g(FX, Y), \quad (31)$$

$$s_{a^*}(X)u(Y) - s_{a^*}(Y)u(X) = \rho_{a^*} g(FX, Y). \quad (32)$$

با قرار دادن $Y = U$ در (۳۱) و (۳۲) و استفاده از رابطهٔ (۷) برای هر $a = 1, \dots, q$ داریم:

$$s_a(X) = s_a(U)u(X), \quad s_{a^*}(X) = s_{a^*}(U)u(X), \quad (33)$$

و با قرار دادن $Y = \xi$ در (۳۱) و (۳۲) و استفاده از رابطهٔ (۷) برای هر $a = 1, \dots, q$ داریم:

$$s_a(\xi) = 0, s_{a^*}(\xi) = 0. \quad (34)$$

با جای‌گذاری روابط (۳۳) و (۳۴) در روابط (۳۱) و (۳۲) برای هر $a = 1, \dots, q$ داریم:

$$\rho_a = 0, \quad \rho_{a^*} = 0. \quad (35)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۳۰) برای هر $a = 1, \dots, q$ داریم:

$$FA_a + A_a F = 0, \quad FA_{a^*} + A_{a^*} F = 0. \quad (36)$$

لم ۱. زیرفضای D و $\text{span}\{\xi, U\}$ تحت عملگر A پایا هستند.

برهان. از معادلات (۷)، (۸)، (۱۷)، (۲۳)، (۲۴) و (۲۹) داریم:

$$AU = \lambda U + \xi, \quad \lambda := u(AU) \quad (37)$$

و برای هر $a = 1, \dots, q$ داریم:

$$A_a U = u(A_a U)U = s_{a^*}(U)U, \quad A_{a^*} U = u(A_{a^*} U)U = -s_a(U)U. \quad (38)$$

با جای‌گذاری FX به جای X در معادله (۲۹) و استفاده از روابط (۹)، (۲۶) و (۳۷) داریم:

$$AX = \{(\lambda - \rho)u(X) + \eta(X)\}U + \{u(X) - \rho\eta(X)\}\xi + FAFX + \rho X. \quad (39)$$

معادله (۳۷) نشان می‌دهد که زیرفضای D و $\text{span}\{\xi, U\}$ تحت عملگر A پایا هستند.

بنابر لم مذکور برداری ویژه W_1 و W_2 در زیرفضای $\text{span}\{\xi, U\}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$AW_1 = \gamma_1 W_1, \quad AW_2 = \gamma_2 W_2. \quad (40)$$

لم ۲. برای مقادیر ویژه γ_1 و γ_2 داریم $\gamma_1 = -\tan \theta$ ، $\gamma_2 = \cot \theta$ و $\gamma_2 + \gamma_1 = \lambda$.

برهان. بنابر (۳۷) و (۳۸) چون ξ و U بردار ویژه برای عملگر A نیستند بنابراین $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ موجود است که

$$W_1 = \xi \cos \theta - U \sin \theta, \quad W_2 = \xi \sin \theta + U \cos \theta. \quad (41)$$

بنابراین داریم

$$U = -W_1 \sin \theta + W_2 \cos \theta,$$

از طرفی بنابر (۳۷)، (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) داریم

$$U = \gamma_1 W_1 \cos \theta + \gamma_2 W_2 \sin \theta,$$

از این‌رو داریم:

$$\gamma_2 = \cot \theta, \quad \gamma_1 = -\tan \theta. \quad (42)$$

هم‌چنین بنابر روابط (۳۷)، (۳۹)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\gamma_2 + \gamma_1 = \lambda. \quad (43)$$

هم‌چنین چون زیرفضای D تحت عملگر A پایا بود پایه یک متعامد $X_1, \dots, X_{2n-2}$ موجود است به‌طوری‌که

$$AX_i = \alpha_i X_i, \quad i = 1, \dots, 2n-2.$$

لم ۳. برای بردار ویژه X_i از D با مقدار ویژه α_i داریم $\alpha_i^2 - \rho\alpha_i + \frac{\rho\lambda}{2} + \frac{c+3}{4} = 0$.

برهان. با جای‌گذاری (۳۲) و (۳۴) در (۲۶) برای میدان‌های برداری X, Y مماس بر M داریم:

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = \frac{c-1}{4}\{u(X)FY - u(Y)FX - 2g(FX, Y)U\}. \quad (44)$$

حال با مشتق‌گیری از معادله (۳۷) و استفاده از متقارن بودن عملگر A و رابطه (۴۴) داریم:

$$X(\lambda)u(Y) - Y(\lambda)u(X) + (\rho\lambda + 2)g(FX, Y) - 2g(FAX, AY) = -\frac{c-1}{2}g(FX, Y). \quad (45)$$

با قرار دادن $Y = U$ در معادله (۴۵) داریم:

$$X(\lambda) = U(\lambda)u(X). \quad (46)$$

با جای‌گذاری (۴۶) در معادله (۴۵) و با استفاده از معادله (۲۹) داریم:

$$(\rho\lambda + 2)FX - 2AFX = -\frac{c-1}{2}FX. \quad (47)$$

با جای‌گذاری X از D با مقدار ویژه α_i یعنی $AX = \alpha_i X$ و بنابر معادله (۲۹) داریم:

$$\alpha_i^2 - \rho\alpha_i + \frac{\rho\lambda}{2} + \frac{c+3}{4} = 0.$$

گزاره ۴. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی (c) باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه مقادیر ویژه عملگر شکل A ثابت هستند.

برهان. با انتخاب $Y = W_1$ و $X \in D$ در معادله (۴۴) و ضرب با W_1 با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\left(\frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta} \right) X(\cos \theta) = 0$$

اما چون $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ از این‌رو، $X(\cos \theta) = 0$ لذا $X(\sin \theta) = 0$ در نتیجه داریم:

$$X(\gamma_1) = 0, \quad \forall X \in D. \quad (48)$$

هم‌چنین با انتخاب $Y = W_1$ و $X \in D$ در معادله (۴۴) و ضرب با ξ با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\cos \theta X(\gamma_1) + \xi(\cos \theta) + X(\sin \theta) = 0$$

از این‌رو، بنابر (۴۸) داریم $\xi(\cos \theta) = 0$ پس $\xi(\sin \theta) = 0$ و در نتیجه داریم:

$$\xi(\gamma_1) = \xi(\gamma_2) = 0. \quad (49)$$

حال با انتخاب $Y = W_1$ و $X = \xi$ در معادله (۴۴) و ضرب با ξ با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\cos \theta \xi(\gamma_1) + \xi(\cos \theta) + \xi(\sin \theta) - U(\cos \theta) = 0$$

از این‌رو، بنابر (۴۹) داریم $U(\cos \theta) = 0$ لذا $U(\sin \theta) = 0$ و در نتیجه داریم:

$$U(\gamma_1) = U(\gamma_2) = 0. \quad (50)$$

روابط (۴۸)، (۴۹) و (۵۰) نتیجه می‌دهند که مقادیر ویژه γ_1 ، γ_2 مقادیر ثابتی هستند. بنابراین بنابر رابطه (۴۳)، λ مقدار ثابتی است.

حال با انتخاب $Y \in D$ و $X = \xi$ در معادله (۴۴) و با ضرب در Y با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) داریم

$$\xi(\alpha_i) = 0. \quad (51)$$

دوباره با جای‌گذاری $FY \in D$ و $X = \xi$ در معادله (۴۴) و با ضرب در FY با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳) و (۲۹) داریم:

$$\xi(\rho - \alpha_i) = 0,$$

از این‌رو، بنابر (۵۱) داریم:

$$\xi(\rho) = 0. \quad (52)$$

حال با انتخاب $Y \in D$ و $X = U$ در معادله (۴۴) و با ضرب در Y با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۳۷) و ثابت بودن λ داریم:

$$U(\alpha_i) = 0. \quad (53)$$

دوباره با جای‌گذاری $FY \in D$ و $X = U$ در معادله (۴۴) و با ضرب در FY با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۲۹)، (۳۷) و ثابت بودن λ داریم:

$$U(\rho - \alpha_i) = 0,$$

از این‌رو بنابر (۵۳) داریم:

$$U(\rho) = 0. \quad (54)$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} & (\nabla_X A)FY + F(\nabla_X A)Y + u(Y)A^2X + \{(\lambda - \rho)u(Y) + 2\eta(Y)\}AX \\ & + \{u(Y) + \rho\eta(Y)\}X - \{2g(AX, Y) - \rho g(X, Y)\}\xi \\ & - \{g(X, Y) + (\lambda - \rho)g(AX, Y) + g(AX, AY)\}U = X(\rho)FY. \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۷) داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} g((\nabla_{E_i} A)FX, E_i) - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} g((\nabla_{E_i} A)FE_i - (\nabla_{FE_i} A)E_i, X) + \text{tr} A^2 u(X) \\ & + \text{tr} A \{(\lambda - \rho)u(X) + 2\eta(X)\} + n \{u(X) - \rho\eta(X)\} \\ & + (\rho - \lambda)u(AX) - u(A^2X) - 2\eta(AX) = (FX)(\rho). \end{aligned} \quad (55)$$

از طرفی بنابر روابط (۷)، (۱۷)، (۲۵) و (۵۳) داریم:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} g((\nabla_{E_i} A)FE_i - (\nabla_{FE_i} A)E_i, X) = 0, \quad (56)$$

و همچنین از طرفی بنابر (۳۹) داریم:

$$\text{tr} A = \frac{\rho(n-1)}{2} + \lambda, \quad (57)$$

و با استفاده از رابطه (۲۹) و (۴۶) داریم:

$$\text{tr} A^2 = \frac{(n-1)\rho(\rho - \lambda)}{2} + \lambda^2 + 3 - n - \frac{(n-1)(c-1)}{4}. \quad (58)$$

حال با جای‌گذاری روابط (۵۶)، (۵۷) و (۵۸) در رابطه (۵۵) داریم:

$$(FX)(\rho) = 0. \quad (59)$$

در نتیجه بنابر روابط (۵۲)، (۵۴) و (۵۹)، ρ مقداری ثابت است. حال با مشتق‌گیری از رابطه (۵۷) داریم:

$$X(\alpha_i)(2\alpha_i - \rho) = 0.$$

بنابراین یا $X(\alpha_i) = 0$ یا $2\alpha_i = \rho$. اگر $2\alpha_i = \rho$ باشد آن‌گاه چون ثابت شد ρ مقداری ثابت است. از این‌رو، α نیز مقداری ثابت است، اما اگر $X(\alpha_i) = 0$ باشد بنابر روابط (۵۱) و (۵۳)، باز α مقداری ثابت است. بنابراین تمام مقادیر ویژه عملگر شکل A ثابت هستند.

نتیجه ۵. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی (c) باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه ρ مقداری ثابت و ناصفر است.

برهان. روابط (۵۲)، (۵۴) و (۵۹) نشان می‌دهد که ρ مقداری ثابت است. از طرفی بنابر این که γ میدان برداری قائم مخالف صفر است و بنابر روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۵) نتیجه می‌دهند که ρ مخالف صفر است.

نتایج اصلی

گزاره ۶. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی (c) باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه عملگر شکل A دقیقاً دو یا سه و یا چهار مقادیر ویژه متمایز ثابت دارد. اگر عملگر شکل A دقیقاً دو مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنها عبارتند از γ_1 و γ_2 با چندگانگی‌های ۱ و n . اگر عملگر شکل A دقیقاً سه مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنها عبارتند از γ_1 ، γ_2 و $\frac{\rho}{2}$ ، به ترتیب، با چندگانگی‌های ۱، ۱ و $n-1$ ، و اگر عملگر

شکل A دقیقاً چهار مقدار ویژه متمایز داشته باشد آنها عبارتند از γ_1 ، γ_2 ، $\frac{\rho}{2}$ و $\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$ و

$$\frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2} \text{ به ترتیب با چندگانگی‌های } 1, 1, \frac{n-1}{2} \text{ و } \frac{n-1}{2}.$$

برهان. بنابر لم ۳ و حل معادله آن سه حالت داریم. در حالت اول معادله فقط یک جواب برابر با $\frac{\rho}{2}$ دارد و $c = 1$

است، در این صورت $\gamma_1 = \frac{\rho}{2}$ یا $\gamma_2 = \frac{\rho}{2}$. بنابرین عملگر شکل روی D برابر با یکی از γ_1 یا γ_2 است از این‌رو، با

چندگانگی‌های ۱ و n هستند. در حالت دوم معادله فقط یک جواب برابر با $\frac{\rho}{2}$ دارد و $c \neq 1$ است که در این صورت

$\gamma_1 \neq \frac{\rho}{2}$ و $\gamma_2 \neq \frac{\rho}{2}$. و در این صورت عملگر شکل A دقیقاً دارای سه مقدار ویژه متمایز γ_1 ، γ_2 و $\frac{\rho}{2}$ به ترتیب با

چندگانگی‌های ۱، ۱ و $n-1$ است. در حالت آخر معادله دو جواب متمایز $\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$ و

$\frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$ را دارد که هر دو مخالف γ_1 و γ_2 هستند بنابراین عملگر شکل A دقیقاً دارای چهار

مقدار ویژه متمایز γ_1 ، γ_2 ، $\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$ و $\frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$ به ترتیب با چندگانگی‌های

$1, 1, \frac{n-1}{2}$ و $\frac{n-1}{2}$ است. همچنین بنابر گزاره ۶ همه مقادیر ویژه ثابت هستند.

در حالتی که عملگر شکل دو مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این صورت $c=1$ از این رو $\overline{M}(c)$ ، کره با بعد $2m+1$ است که این زیرخمینه‌ها در مرجع [۶] بررسی شده است.

قضیه ۷. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از S^{2m+1} باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل A دقیقاً دو مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه M به صورت موضعی برابر با $S^1 \times M'$ است که M' در یک کره با بعد فرد قرار دارد.

در حالتی که عملگر شکل سه مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این صورت:

قضیه ۸. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل A دقیقاً سه مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه M به صورت موضعی برابر با $M' \times C$ است که C خم ژئودزی و M' ابررویه ای تماماً ژئودزیک در M هستند.

برهان. میدان برداری $Z = \lambda\xi + U$ را در $\text{span}\{\xi, U\}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $Z_\perp$ نماد عمود Z در $\text{span}\{\xi, U\}$ باشد بنابراین $Z_\perp = \xi - \lambda U$. ابتدا نشان می‌دهیم زیرفضای $D \oplus Z_\perp$ پایاست. میدان‌های برداری X و Y دلخواه را از D در نظر می‌گیریم. ابتدا توجه کنیم که

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, \lambda\xi + U) = \lambda g(\nabla_X Y, \xi) + g(\nabla_X Y, U) \\ &= -\lambda g(Y, \nabla_X \xi) - g(Y, \nabla_X U) = \lambda g(Y, \phi X) - g(Y, \phi AX) \\ &= \lambda g(Y, \phi X) - \lambda g(Y, \phi X) = 0. \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه $g(\nabla_Y X, Z) = 0$. بنابراین داریم $g([X, Y], Z) = 0$. همچنین به‌طریق مشابه

$$g(\nabla_X Z_\perp, Z) = 0, \quad g(\nabla_{Z_\perp} X, Z) = 0.$$

پس داریم $g([X, Z_\perp], Z) = 0$. بنابراین برای میدان‌های برداری دلخواه X و Y عضو $D \oplus Z_\perp$ است یعنی این زیر فضا پایاست. حال فرض کنیم M' زیر خمینه انتگرال زیرفضای $D \oplus Z_\perp$ باشد. بنابراین M' یک ابررویه در داخل M با میدان برداری قائم Z است. همچنین فرض کنیم C خم انتگرال میدان برداری Z باشد. همچنین نشان داده شد که $C'' = \nabla_Z Z = 0$ ، یعنی C یک خم ژئودزیک در M است. همچنین چون M' ابررویه‌ای از M با میدان برداری قائم Z است فرض کنیم A' عملگر شکل M' در M باشد. میدان برداری دلخواه مماسی X در M' را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف عملگر شکل داریم:

$$\begin{aligned} A'X &= -\nabla_X Z = -\overline{\nabla}_X Z + g(AX, Z)N \\ &= -\lambda \overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_X U + g(AX, \lambda\xi + U)N \\ &= \lambda\phi X - \phi AU + g(AX, \lambda\xi + U)N \end{aligned}$$

اما چون $A'X \in TM'$ است بنابراین باید سمت راست معادله نیز عضو TM' باشند از این‌رو، $g(AX, \lambda\xi + U) = 0$. پس داریم $A'X = \lambda\phi X - \phi AU$. لذا به‌ازای هر میدان برداری روی D برابر صفر است و همچنین $AZ_\perp = 0$ است. از این‌رو، به‌ازای هر میدان برداری مماس بر M' مانند X داریم $AX = 0$. بنابراین M' ابررویه ای تماماً ژئودزیک در M است.

برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\nabla_{TM'} TM' \subseteq TM', \quad \nabla_Z Z = 0, \quad \nabla_Z TM' \subseteq TM', \quad \nabla_{TM} Z = 0$$

چون C خمی ژئودزی است بنابراین $\nabla_Z Z = 0$. همچنین چون M' ابررویه تماماً ژئودزیک در M است بنابراین $\nabla_{TM'} Z = 0$. همچنین برای میدان‌های برداری X و Y در TM' ، $g(\nabla_X Y, Z) = 0$ از این‌رو، $\nabla_{TM'} TM' \subseteq TM'$ همچنین از طرفی چون

$$g(\nabla_{Z_\perp} Z_\perp, Z) = g(\nabla_{\xi - \lambda U} (\xi - \lambda U), \lambda \xi + U) = 0$$

و

$$g(\nabla_Z X, Z) = -g(X, \nabla_Z Z) = 0$$

پس $\nabla_Z TM' \subseteq TM'$ بنابراین M به‌صورت موضعی با حاصل‌ضرب ریمانی خمینه انتگرال تماماً ژئودزیک M' و خم ژئودزی C است.

و در حالت آخر که عملگر شکل چهار مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این‌صورت:

قضیه ۹. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل A دقیقاً چهار مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه M به‌صورت موضعی برابر با $M_1 \times M_2$ است که M_1 و M_2 زیرخمینه‌هایی در M هستند.

برهان. توزیع‌های زیر (فضاهای ویژه مقادیر ویژه) را در نظر می‌گیریم

$$D_i = \{X \in D \mid AX = \beta_i X\}, \quad i = 1, 2, \quad \beta_i = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}.$$

مثل برهان قضیه ۹ میدان برداری $Z = \lambda \xi + U$ را در $\text{span}\{\xi, U\}$ در نظر می‌گیریم. زیرفضاهای $D_1 \oplus Z$ و $D_2 \oplus Z_\perp$ را در نظر می‌گیریم. شبیه اثبات قضیه قبل ثابت می‌شود هر دو زیر فضا پایا هستند. حال فرض کنیم M_1 و M_2 زیرخمینه‌های انتگرال توزیع‌های مذکور باشند. برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\nabla_{TM_1} TM_1 \subseteq TM_1, \quad \nabla_{TM_2} TM_2 \subseteq TM_2, \quad \nabla_{TM_2} TM_1 \subseteq TM_1, \quad \nabla_{TM_1} TM_2 \subseteq TM_2.$$

مشابه استدلال آخر قضیه ۹ روابط مذکور نیز حاصل می‌شوند. از این‌رو، M به‌صورت موضعی برابر با $M_1 \times M_2$

است.

بنابراین در حالت کلی نشان دادیم:

قضیه ۱۰. فرض کنید M زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی $\overline{M}(c)$ باشد که در رابطه (۲۸)

صدق می‌کند آن‌گاه M به‌صورت موضعی برابر با یکی از این حالات است:

(الف) برابر با $S^1 \times M'$ که M' در یک کره با بعد فرد قرار دارد.

(ب) برابر با $M' \times C$ که C خم ژئودزی و M' ابررویه‌ای تماماً ژئودزیک در M است.

(ج) برابر با $M_1 \times M_2$ که M_1 و M_2 زیرخمینه‌هایی در M است.

منابع

1. Bejancu A., "CR-submanifolds of Kaehler Manifold", Proc. Amer. Math. Soc. 69, No.1 (1978) 135-142.
2. Bejancu A., "Geometry of CR-submanifolds", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo (1986).

3. Blair D. E., "Contact manifolds in Riemannian geometry", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin (1976).
4. Djoric M., Okumura M., "Certain CR submanifolds of maximal CR dimension of complex space forms", Differential Geometry and its Applications, 26 (2) (2008) 208-217.
5. Djoric M., Okumura M., "CR submanifolds of maximal CR dimension in complex space forms and second fundamental form", in: Proceedings of the Workshop Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, May 15-21, (2002) (2004) 105-116.
6. Djoric M., Okumura M., "Certain CR submanifolds of maximal CR dimension of complex space forms", Differential Geom. Appl. 26 (2) (2008) 208-217.
7. Djoric M., Okumura M., "CR submanifolds of maximal CR dimension of complex projective space", Arch. Math. 71 (1998) 148-158.
8. de Rham G., Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, Comment. Math. Helv. 268, 328-344 (1952).
9. Kim H. S., Pak J. S., "Certain contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Bull. Korean Math. Soc. 44. 1 (2007) 109-116.
10. Kim H. S., Pak J. S., "Certain class of contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Taiwanese J. Math. 14, 2 (2010) 629-646.
11. Kim H. S., Pak J. S., Certain class of contact CR-submanifolds of a Sasakian space form, Commun. Korean Math. Soc. 29, 1 (2014) 131-140.
12. Kobayashi S., Nomizu K., "Foundations of Differential Geometry I", Wiley and Sons Inc. New York-London (1963).
13. Kwon J. H., Pak J. S., "On some contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Soochow J. Math. 26, 4 (2000) 427-439.
14. Pak J. S., Kwon J. H., Kim H. S., Kim Y. M., "Contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Geom. Dedicata 114 (2005) 1-11.
15. Yano K., Kon M., "Structure on Manifold, World Scientific", World Scientific, Singapore, (1984).