

## روش عناصر متناهی برای حل مسئله نفوذ غیر خطی معکوس

حامد زیدآبادی

دانشگاه فناوری های نوین سبزوار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه علوم مهندسی

رضا پورقلی\*، سید هاشم طبسی

دانشگاه دامغان، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

پذیرش ۹۸/۱۱/۲۳

دریافت ۹۶/۰۴/۲۷

### چکیده

در این مقاله، یک روش عددی بر مبنای روش عناصر متناهی و روش حداقل مربعات همراه با منظم‌سازی تیخونوف برای مسئله نفوذ معکوس ارائه شده است. برای این منظور، ابتدا روش عناصر متناهی و توابع پایه‌ای برای گسسته‌سازی صورت تغییراتی مسئله به کار می‌رود، سپس روش حداقل مربعات و منظم‌سازی تیخونوف برای به دست آوردن جواب تقریبی به کار برده می‌شود. فرض می‌شود که هیچ اطلاعات پیشینی در مورد صورت ضریب نفوذ مجهول وجود ندارد. نتایج عددی بیان گر یک تخمین خوب از مسئله مجهول است.

واژه‌های کلیدی: مسئله نفوذ غیر خطی معکوس، روش عناصر متناهی، روش حداقل مربعات، روش منظم سازی تیخونوف، تخمین خطا.  
رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 65M32, 35K05

### مقدمه

مسائل معکوس در شاخه‌های گوناگون از علوم و مهندسی مطرح می‌شوند. مهندسان، ریاضی‌دانان، آماردانان و متخصصان در بسیاری از حوزه‌های دیگر همه به مسائل معکوس علاقه‌مند هستند. از جمله کاربردهای مسئله معکوس، عکس برداری بیومدیکال<sup>۱</sup> (زیست درمانی)، حرارت درمانی، مدلینگ سوخت‌وساز، نوار قلبی و بازسازی تصویر است. به‌طور کلی، مسائل معکوس جزء مسائل بد-وضع هستند؛ یعنی هر تغییر کوچک در داده‌های ورودی می‌تواند منجر به تغییر فاحش در جواب مسئله شود و به همین دلیل حل یک مسئله معکوس بسیار مشکل‌تر از مسئله مستقیم مشابه است. برای مقابله با چنین مشکلی، تکنیک‌های مختلفی برای حل مسئله معکوس ارائه شده‌اند که از شاخه‌های مختلف ریاضی مانند: آنالیز هارمونیک، آنالیز تابعی، آنالیز مختلط و غیره نتیجه می‌شوند. در این بین به روش منظم‌سازی تیخونوف [۲۳]، روش توابع پایه‌ای [۱۶]، روش اسپلاین‌های مکعبی [۱۷] و روش موجک هار [۱۸] می‌توان اشاره کرد. در مسئله نفوذ معکوس، برای به دست آوردن ضریب نفوذ مجهول نیازمند داشتن یک داده اضافی هستیم. روش‌های مختلفی برای تحلیل مسئله نفوذ معکوس شامل تخمین ضریب نفوذ از داده‌های اندازه‌گیری شده، توسعه یافته‌اند [۱]، [۲]، [۴]، [۵]، [۶]، [۸]، [۱۱]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۹]، [۲۰].

روش عناصر متناهی به‌عنوان یک ابزار قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل به‌وسیله کورانت<sup>۱</sup> (۱۹۴۳) معرفی شد [۷]. این روش به‌وسیله محققان و پژوهش‌گران زیادی برای حل مسائل خط و غیر خطی استفاده شده است. میلوس

\*نویسنده مسئول pourgholi@du.ac.ir

1. Biomedical

زلاماس<sup>۲</sup> [۲۴] از این روش برای حل معادلات سهموی غیرخطی استفاده کرد. عبدالقابر<sup>۳</sup> [۹]، جواب مسائل نفوذ غیرخطی را با روش عناصر متناهی بدست آورد. واکر<sup>۴</sup> و همکارش [۱۳] از این روش برای معادلات واکنش-نفوذ-همرفت<sup>۵</sup> وابسته به زمان استفاده کرد. لاریزا بلینا<sup>۶</sup> و جانسون<sup>۷</sup> [۳] از یک روش ترکیبی براساس روش عناصر متناهی و روش تفاضلات محدود برای مسئله پراکندگی معکوس استفاده کرده‌اند.

هدف از این مقاله بررسی روش عددی عناصر متناهی همراه با توابع پایه‌ای لاگرانژ، روش کم‌ترین مربعات و منظم‌سازی تیخونوف برای حل مسئله نفوذ غیرخطی معکوس است. هم‌چنین شرایط پایداری و هم‌گرایی نیز در ادامه ارائه شده‌اند.

### مسئله نفوذ غیرخطی معکوس

مسئله نفوذ غیرخطی معکوس

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( a(u(x, t)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < t_f, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -a(u(0, t)) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= g_0(t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \\ -a(u(1, t)) \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} &= g_1(t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \end{aligned} \quad (1)$$

با شرط اضافی

$$u(\beta, t) = f(t), \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad (2)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $t_f$  زمان نهایی و  $\varphi(x)$ ،  $g_0(t)$ ،  $g_1(t)$  و  $f(t)$  توابع پیوسته معلوم، و هم‌چنین  $g_0(t)$  و  $g_1(t)$  متناسب با شرط لیب شیتس است.

فرض می‌کنیم ضریب  $a(u(x, t))$  روی  $R$  هموار و ثابت‌های  $\mu, \lambda, B \in R$  به‌گونه‌ای باشند که:

$$0 < \mu \leq a(u) \leq \lambda, \quad |a'(u)| \leq B, \quad \text{برای } u \in R.$$

قضیه ۱.۲.۱. اگر  $\varphi(x)$ ،  $g_0(t)$  و  $g_1(t)$  توابع پیوسته‌ای باشند، آن‌گاه مسئله (۱) تحت شرط (۲) دارای جواب یکتا است.

اثبات. به [۱۱] و [۲۱] مراجعه شود.

### صورت تغییراتی و گسسته‌سازی مسئله

فرض کنید  $V = H^1(\Omega)$  که  $\Omega = (0, 1)$ ، صورت تغییراتی مسئله (۱) به‌صورت (۴) به‌دست می‌آید [۲۲]:

$$\begin{aligned} (u_t, v) + (a(u)u_x, v_x) &= v(1)g_1(t) - v(0)g_0(t) = F(t), \quad \forall v \in V, \\ u(x, 0) &= \phi, \end{aligned} \quad (4)$$

که

1. Courant
2. Milos Zlamas
3. Abdelgaber
4. Volker
5. Convection-diffusion-reaction
6. Larisa Beilina
7. Johnson

$$(a(u)u_x, v_x) = \int_0^1 a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad (u_t, v) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v dx. \quad (5)$$

از آن جاکه  $V$  فضایی با بعد نامتناهی است، زیر فضایی از  $V$ ، با بعد متناهی مانند  $V_h$  را در نظر می‌گیریم، و تابع جواب تقریبی  $u_h$  را در  $V_h$  جستجو می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$(u_{h,t}, v) + (a(u_h)u_{h,x}, v_x) = v(1)g_1(t) - v(0)g_0(t) = F(t), \quad \forall v \in V_h, \quad (6)$$

$$u_h(x, 0) = \varphi_h(x),$$

که  $\varphi_h \in V_h$  و تقریبی از  $\varphi$  است.

توابع مستقل خطی  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{M+1}$  را در  $V$  به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که فضای  $V_h$  را تولید کنند. از این رو، داریم:

$$V_h = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{M+1}\}.$$

برای ساختن توابع  $\phi_i$  ابتدا بازه  $[0, 1]$  را به  $M$  قسمت مساوی بدین صورت تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1, \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, M+1, \quad \Delta x = h = \frac{1}{M},$$

و متناظر با هر گره یک تابع پایه‌ای با خاصیت زیر می‌سازیم.

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

توابع پایه‌ای بدین صورت ساخته می‌شوند:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h}, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} x - x_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ x_{i+1} - x, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, M,$$

$$\phi_{M+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_M}{h}, & x \in [x_M, x_{M+1}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین از آن جاکه  $u_h$  و  $v$  متعلق به فضای  $V_h$  هستند، داریم:

$$u_h = \sum_{j=1}^{M+1} \alpha_j(t) \phi_j(x), \quad v = \phi_i(x), \quad i = 1, \dots, M+1, \quad (7)$$

با جای گذاری  $u_h$  و  $v$  در صورت تغییراتی (۶) داریم:

$$\sum_{j=1}^{M+1} \dot{\alpha}_j(t) (\phi_j, \phi_i) + \sum_{j=1}^{M+1} \alpha_j(t) \left( a \left( \sum_{l=1}^{M+1} \alpha_l(t) \phi_l(x) \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) = \phi_i(1)g_1(t) - \phi_i(0)g_0(t), \quad (8)$$

که نماد "  $\dot{\cdot}$  " به معنای مشتق نسبت به  $t$  است. صورت ماتریسی معادلات بالا به صورت (۹) به دست می‌آید:

$$B\dot{\alpha} + A(\alpha)\alpha = F, \quad t > 0, \quad \alpha(0) = \gamma, \quad (9)$$

که  $\gamma$  برداری از مقادیر تابع  $\varphi$  در نقاط گره‌ای است،

$$B = (b_{ji}), \quad b_{ji} = (\phi_j, \phi_i),$$

$$A(\alpha) = (a_{ji}(\alpha)), \quad a_{ji}(\alpha) = \left( a \left( \sum_{l=1}^{M+1} \alpha_l \phi_l \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right),$$

$$F = (F_i), \quad F_i(t) = \phi_i(1)g_1(t) - \phi_i(0)g_0(t), \quad (10)$$

و  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{M+1}(t))^T$  یک بردار از توابع مجهول  $\alpha_j(t), j = 1, \dots, M + 1$  است. با حل دستگاه بالا، ضرایب  $\alpha_j$  به دست می‌آید و با کمک این ضرایب می‌توانیم جواب تقریبی مسئله را به دست آوریم.

اکنون، بازه  $[0, t_f]$  را به  $N$  قسمت مساوی با طول گام  $k = \frac{t_f}{N}$  تقسیم می‌کنیم، و  $t_n = nk, n = 0, 1, 2, \dots, N$  در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $U^n$  تقریبی از جواب دقیق  $u$  در  $t = t_n$  باشد. دستگاه غیرخطی (۹) با به کار بردن جمله غیرخطی در گام زمانی قبلی می‌تواند به یک دستگاه خطی تبدیل شود، بنابراین طبق روش تفاضلات اویلر پس‌رو داریم:

$$\left( \frac{\partial U^n}{\partial t}, v \right) + \left( a(U^{n-1}) \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = F(t_{n-1}), \quad \forall v \in V_h, \quad (11)$$

که  $U^n(x) = \sum_{j=1}^M \alpha_j^n \phi_j(x)$ ،  $\bar{U}^n = \frac{U^n + U^{n-1}}{2}$  و  $\frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t} = \frac{(U^n - U^{n-1})}{k}$ . با ساده سازی خواهیم داشت:

$$\left( B + \frac{k}{2} A(\alpha^{n-1}) \right) \alpha^n = \left( B - \frac{k}{2} A(\alpha^{n-1}) \right) \alpha^{n-1} + kF(t_{n-1}), \quad t_n \in J. \quad (12)$$

### پایداری و تخمین خطا

در ادامه نشان می‌دهیم که طرح ارائه شده برای گسسته‌سازی مسئله بدون هیچ شرطی برای  $h$  و  $k$  پایدار است.

با انتخاب  $v = \bar{U}^n$  در (۱۱)، از آن جا که  $\left( a(U^{n-1}) \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial x}, \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial x} \right) \geq 0$ ، آن‌گاه

$$\left( \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t}, \bar{U}^n \right) \leq \| F^{n-1} \|, \quad F^{n-1} = F(t_{n-1}).$$

در نتیجه، داریم:

$$\| U^n \|^2 \leq \| U^{n-1} \|^2 + 2k \| F^{n-1} \|,$$

بنابراین با تکرار روند بالا داریم:

$$\| U^n \|^2 \leq \| U^0 \|^2 + 2k \sum_{j=1}^n \| F^{j-1} \|, \quad (13)$$

که این پایداری را نتیجه می‌دهد.

فرض کنید  $u$  جواب دقیق مسئله و  $u_h$  جواب تقریبی آن باشد. جمله خطا را به صورت مجموع دو جمله زیر

می‌نویسیم:

$$u_h - u = (u_h - I_h u) + (I_h u - u) = \theta + \rho, \quad (14)$$

که  $I_h u$  درون‌یاب جواب دقیق  $u$  در فضای  $V_h$  است و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$I_h: C(\Omega) \rightarrow V_h$$

$$I_h u(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, M + 1. \quad (15)$$

که  $C(\Omega)$ ، فضای توابع پیوسته در بازه  $\Omega$  است.

لم ۱،۴،۲. با  $I_h u - u$  و  $\rho = I_h u - u$  تعریف شده در بالا داریم:

$$\|\rho(t)\| + h \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t)) \right\| \leq C(u) h^2, \quad (16)$$

$$\|\rho_t(t)\| + h \left\| \frac{\partial}{\partial x} (\rho_t(t)) \right\| \leq C(u) h^2. \quad (17)$$

که  $C(u)$ ، یک ثابت وابسته به  $u$  است.

اثبات. به [۲۲] مراجعه شود.

قضیه ۳،۴،۲. فرض کنید  $U^n$  و  $u(t_n)$  به ترتیب جواب‌های (۱۱) و (۱) باشند. آن‌گاه

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(\Omega)} + C(u)(h^2 + k).$$

اثبات. با در نظر گرفتن  $u^n = u(t_n)$  داریم:

$$U^n - u^n = (U^n - I_h^n) + (I_h^n - u^n) = \theta^n + \rho^n,$$

که  $I_h^n$  درون‌یاب جواب دقیق  $u^n$  است. طبق لم ۱،۴،۲، کافی است کرانی برای  $\theta^n$  به دست آوریم. برای  $v \in V_h$  داریم:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta^n}{\partial t}, v \right) + (a(U^{n-1}) \frac{\partial \hat{\theta}^n}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}) &= (F(t_{n-1}) - F(t_n)) - ((a(U^{n-1}) - a(u^n)) \frac{\partial \hat{I}_h^n}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}) \\ &\quad - \left( \frac{\partial \rho^n}{\partial t}, v \right) - \left( \frac{\partial u^n}{\partial t} - u_t^n, v \right) - \left( a(u^n) \frac{\partial \hat{\rho}^n}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

که

$$\|a(U^{n-1}) - a(u^n)\| \leq C \|U^{n-1} - u^n\| \leq C(\|\theta^{n-1}\| + \|\rho^{n-1}\| + k \|\frac{\partial u^n}{\partial t}\|),$$

سپس با در نظر گرفتن  $v = \hat{\theta}^n$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta^n}{\partial t}, \hat{\theta}^n \right) + \mu \left\| \frac{\partial \hat{\theta}^n}{\partial x} \right\|^2 &\leq \|F^{n-1} - F^n\| + \\ &\quad C \left( \|\theta^{n-1}\| + \|\rho^{n-1}\| + k \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial \hat{\rho}^n}{\partial x} \right\| \right) \left\| \frac{\partial \hat{\theta}^n}{\partial x} \right\| \\ &\quad + \left( \left\| \frac{\partial \rho^n}{\partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - u_t^n \right\| \right) \|\theta^n\|. \end{aligned}$$

بعد از ساده‌سازی داریم:

$$\|\theta^n\|^2 \leq \frac{(1 + 2Ck)}{(1 - k)} \|\theta^{n-1}\|^2 + \frac{2C}{1 - k} R_n,$$

که

$$\begin{aligned} R_n &= k \|F^{n-1} - F^n\| + k \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - u_t^n \right\|^2 + k \left\| \frac{\partial \hat{\rho}^n}{\partial x} \right\|^2 + k \|\rho^{n-1}\|^2 + k^3 \\ &\quad \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|^2 + k \left\| \frac{\partial \rho^n}{\partial t} \right\|. \end{aligned}$$

با تکرار روند بالا داریم:

$$\begin{aligned} \|\theta^n\|^2 &\leq \left(\frac{1+2Ck}{1-k}\right)^n \|\theta^0\|^2 + \left(\frac{2C}{1-k}\right) \sum_{j=1}^n \left(\frac{1+2Ck}{1-k}\right)^{n-j} R_j \\ &\leq C_1 \|\theta^0\|^2 + C_2 \sum_{j=1}^n R_j. \end{aligned}$$

از طرفی  $\|\rho^j\| \leq C(u)h^2$ ، و

$$\left\| \frac{\partial u^j}{\partial t} - u_t^j \right\| = \left\| k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt} ds \right\| \leq \|u_{tt}\| k,$$

که از فرمول تیلور و لم ۱،۴۲ به ترتیب نتیجه می‌شوند. هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\left\| \frac{\partial \rho^j}{\partial t} \right\| = \left\| k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_t ds \right\| \leq \|\rho_t\| \leq C(u)h^2,$$

$$\left\| \frac{\partial u^j}{\partial t} \right\| = \left\| k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds \right\| \leq \|u_t\|$$

و

$$\|F^{n-1} - F^n\| \leq Ck.$$

این نشان می‌دهد  $R_j \leq C(u)(h^2 + k)^2$ ، و هم‌چنین با استفاده از

$$\|\theta^0\| \leq \|U^0 - u^0\| + \|w_h^0 - u^0\| \leq \|\varphi_h - \varphi\| + C(u)h^2,$$

نتیجه می‌گیریم

$$\|\theta^n\| \leq C \|\varphi_h - \varphi\| + C(u)(h^2 + k). \tag{۱۸}$$

بنابراین نرم خطا کراندار است، از این‌رو، طرح گسسته‌سازی ارائه شده پایدار است.

### تکنیک حداقل مربعات

تابع مجهول  $a(u)$  را به صورت (۱۹) تقریب می‌زنیم.

$$a(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots + a_q u^q, \tag{۱۹}$$

که در آن ضرایب  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_q\}$  مجهول است، که باید در هر گام زمانی تعیین شوند. تخمین ضرایب  $a_i$

می‌تواند با استفاده از روش حداقل مربعات، به وسیله کمینه کردن خطای (۲۰) به دست آید.

$$E(a_0, a_1, \dots, a_q) = \sum_{j=1}^N (U^j - f(t_j))^2. \tag{۲۰}$$

فرآیند محاسبات برای تخمین ضرایب  $a_i$  را در ادامه شرح می‌دهیم.

در ابتدا، حدس اولیه برای  $a_i$  می‌تواند به صورت دلخواه انتخاب شود. آن‌گاه  $U^j$  می‌تواند از معادله (۱۱) برحسب

ضرایب  $a_i$  به دست آید. در ادامه دستگاه خطی متناظر برای تعیین ضرایب  $a_i$  از معادله (۲۰) بدین صورت به دست

می‌آید:

$$\Lambda \Theta = \Pi. \tag{۲۱}$$

ماتریس  $\Lambda$  یک ماتریس بد-وضع است، از این رو، تخمین  $\Theta$  از معادله (۲۱) ناپایدار است، بنابراین از منظم‌سازی تیخونوف برای کنترل خطای اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم. جواب تیخونوف متناظر با دستگاه معادلات جبری (۲۱) بدین صورت است:

$$F_{\alpha}(\Theta) = \|\Lambda\Theta - \Pi\|_2^2 + \alpha \|R^s(\Theta)\|_2^2.$$

ماتریس  $R^s$ ,  $s = 0, 1$ ، مربوط به روش تیخونوف مرتبه صفر و یک در مرجع [۱۸] معرفی شده است. بنابراین جواب منظم شده از معادله منظم شده، بدین صورت به دست می‌آید:

$$\Theta_{\alpha} = [\Lambda^T \Lambda + \alpha (R^s)^T R^s]^{-1} \Lambda^T \Pi.$$

از طرح  $GCV$  برای به دست آوردن مقدار مناسب  $\alpha$  استفاده می‌کنیم [۱۰]، [۱۲].

### نتایج عددی

هدف از این بخش نشان دادن نتایج عددی به دست آمده از روش معرفی شده است که با ارائه چند مسئله، کارایی روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

در مسائل ارائه شده با توجه به بد-وضعیتی مسئله، از روش منظم‌سازی تیخونوف برای پایدار کردن جواب مسئله استفاده می‌شود و پارامتر منظم‌سازی  $GCV$  انتخاب شده است. هم‌چنین لازم به ذکر است که دقت روش معرفی شده با محاسبه پارامتر خطای کل بررسی می‌شود که در این جا به معرفی اجمالی این پارامتر می‌پردازیم.

#### ۱. محاسبه خطا

در حل مسائل معکوس با دو نوع خطا مواجه می‌شویم:

اولین نوع خطاهایی هستند که اجتناب ناپذیرند و در زمان اندازه‌گیری رخ می‌دهند. این نوع خطاها به خطاهای قطعی معروفند. نوع دوم خطاهایی هستند که در اثر تجمع خطاهای نوع اول ایجاد می‌شوند و به خطاهای اتفاقی معروفند. هر دو نوع خطا چه قطعی و چه اتفاقی به وسیله میانگین مربع خطا بررسی می‌شوند و طبق رابطه زیر قابل محاسبه هستند:

$$S = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{\Phi}_i - \Phi_i)^2 \right]^{1/2},$$

که در آن  $N$ ، تعداد کل مقادیر تخمین زده شده و  $\hat{\Phi}_i$  و  $\Phi_i$  به ترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی هستند.

مثال ۱. مسئله نفوذ غیرخطی معکوس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < t_f, \\ u(x, 0) &= \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -a(u(0, t)) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, & 0 \leq t \leq t_f, \\ -a(u(1, t)) \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{1+4t} \left( \frac{1}{(1+4t)^{1/2}} - \frac{1}{1+4t} \right)^{1/2}, & 0 \leq t \leq t_f, \\ u(0.3, t) &= \left( \frac{1}{(1+4t)^{1/2}} - \frac{0.09}{1+4t} \right)^{1/2}, & 0 \leq t \leq t_f, \end{aligned}$$

جواب دقیق مسئله بدین صورت است:

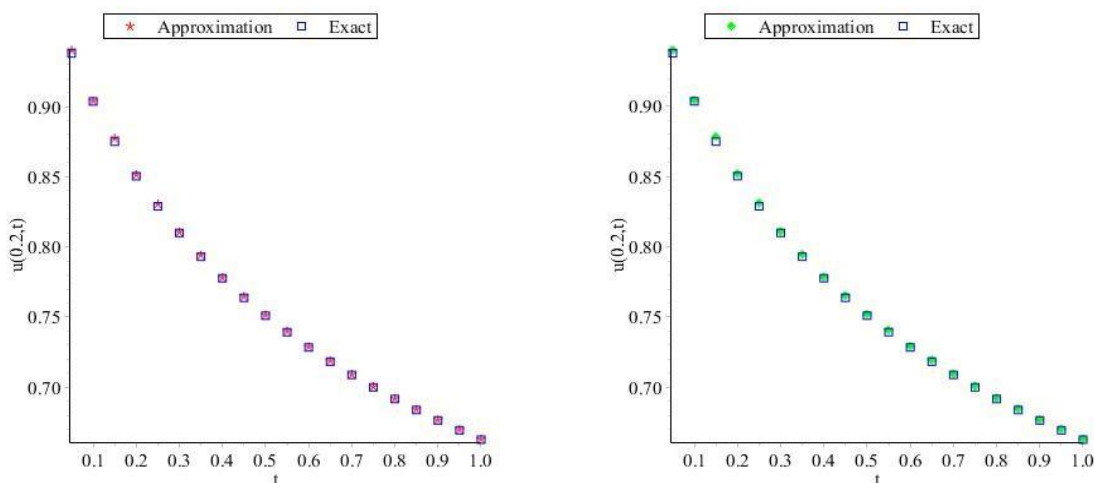
$$u(x, t) = \left( \frac{1}{(1 + 4t)^{1/2}} - \frac{x^2}{1 + 4t} \right)^{1/2}.$$

$$a(u) = u^2,$$

هدف از حل این مسئله، محاسبه مقدار مجهول  $a(u)$ ، با روش عناصر متناهی و منظم سازی تیخونوف در بازه‌های زمانی متفاوت است.

برای حل این مسئله، ضریب نفوذ  $a(u)$  را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

با انتخاب  $t_f = 1$ ,  $M = 10$ ,  $N = 20$  و مقادیر اولیه  $\{a_1, a_2\}$  به ترتیب به صورت  $\{0.2, 0.7\}$ ، مقایسه جواب دقیق و جواب محاسبه شده و هم‌چنین محاسبه خطای کلی، در جدول‌های ۱ تا ۶ و شکل‌های ۱ تا ۶ نشان داده شده است.

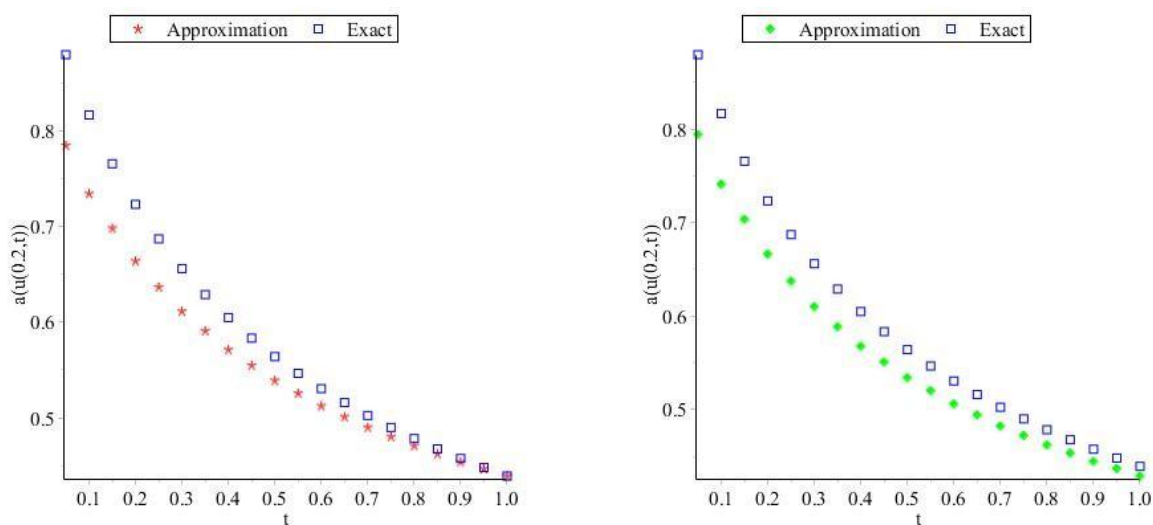


شکل ۱. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک

جدول ۱. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $u(0.2, t)$

زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۹۳۷۸۳۵	۰.۹۴۰۲۰۲	۰.۹۴۰۰۷۳
۰.۱	۰.۹۰۳۶۴۸	۰.۹۰۴۲۱۶	۰.۹۰۴۴۱۳
۰.۲	۰.۸۵۰۳۷۳	۰.۸۵۱۶۰۱	۰.۸۵۲۰۳۸
۰.۳۵	۰.۸۲۸۹۲۰	۰.۸۳۰۷۱۰	۰.۸۳۱۰۲۴
۰.۴	۰.۷۷۷۶۸۲	۰.۷۷۸۲۷۶	۰.۷۷۸۴۲۸
۰.۴۵	۰.۷۶۳۷۵۹	۰.۷۶۴۸۲۵	۰.۷۶۵۰۶۰
۰.۶	۰.۷۲۸۳۹۶	۰.۷۲۸۸۸۱	۰.۷۲۸۹۹۲
۰.۷۵	۰.۷۰۰۰۰۰	۰.۷۰۰۶۸۲	۰.۷۰۱۱۳۶
۰.۹	۰.۶۷۶۴۳۰	۰.۶۷۰۰۱۲	۰.۶۷۰۷۰۴
۱	۰.۶۶۲۷۳۲	۰.۶۶۳۱۵۷	۰.۶۶۳۵۹۱
S=خطای کل		۰.۰۰۱۱۴۹۸	۰.۰۰۱۴۹۸۳
زمان اجرا (ثانیه)		۲۳.۸۹	۲۳.۰۷

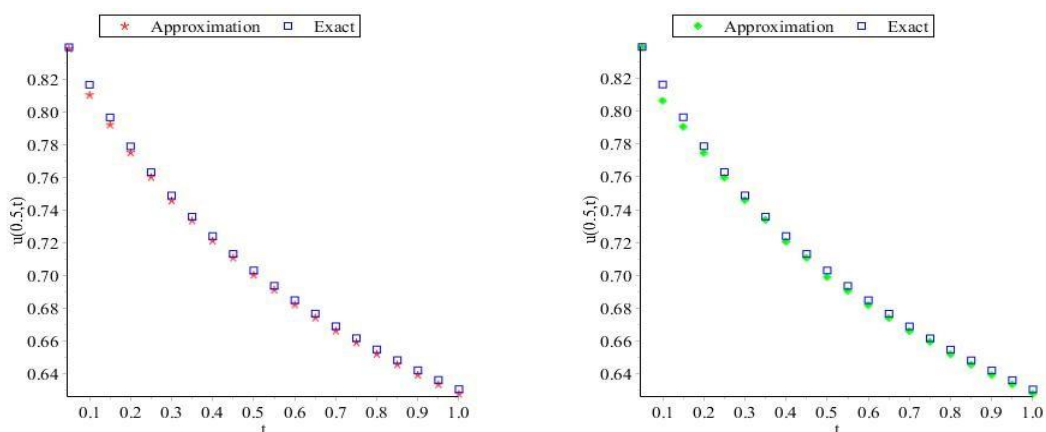




شکل ۲. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک

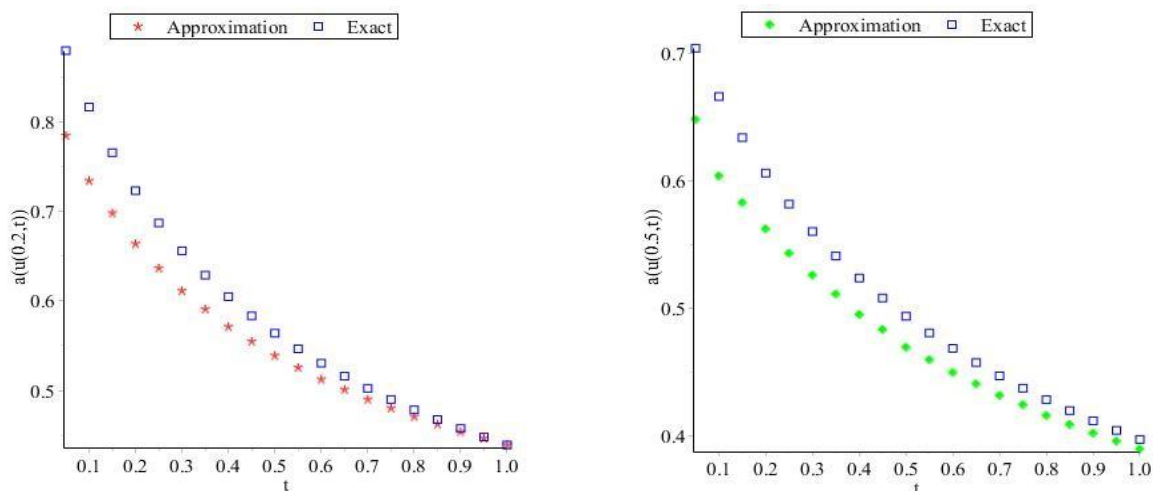
جدول ۲. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $a(u(0.2, t))$

زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۸۷۹۵۳۴	۰.۷۸۴۶۲۷	۰.۷۹۵۷۳۸
۰.۱	۰.۸۱۶۵۸۰	۰.۷۳۴۳۷۷	۰.۷۴۲۰۹۹
۰.۲	۰.۷۲۳۱۳۴	۰.۶۶۳۸۰۳	۰.۶۶۶۶۷۱
۰.۲۵	۰.۶۸۷۱۰۹	۰.۶۳۶۷۳۷	۰.۶۳۷۵۲۹
۰.۴	۰.۶۰۴۷۸۹	۰.۵۷۱۱۹۱	۰.۵۶۷۴۰۴
۰.۴۵	۰.۵۸۳۳۲۸	۰.۵۵۴۹۲۵	۰.۵۵۰۲۲۳
۰.۶	۰.۵۳۰۵۶۱	۰.۵۱۳۵۶۸	۰.۵۰۵۱۶۱
۰.۷۵	۰.۴۹۰۰۰۰	۰.۴۸۰۴۶۰	۰.۴۷۱۶۵۵
۰.۹	۰.۴۵۷۵۵۷	۰.۴۵۴۱۰۵	۰.۴۴۳۸۱۲
۱	۰.۴۳۹۲۱۴	۰.۴۳۹۲۶۷	۰.۴۲۸۲۸۰
S		۰.۴۲۰۹۴۱	۰.۴۱۵۰۱۱



شکل ۳. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک  
جدول ۳. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $u(0.5, t)$

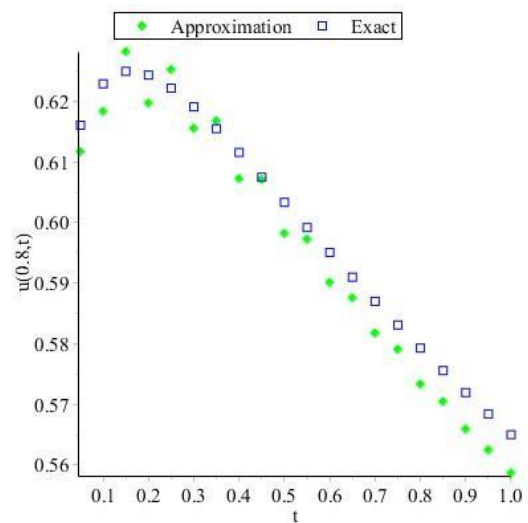
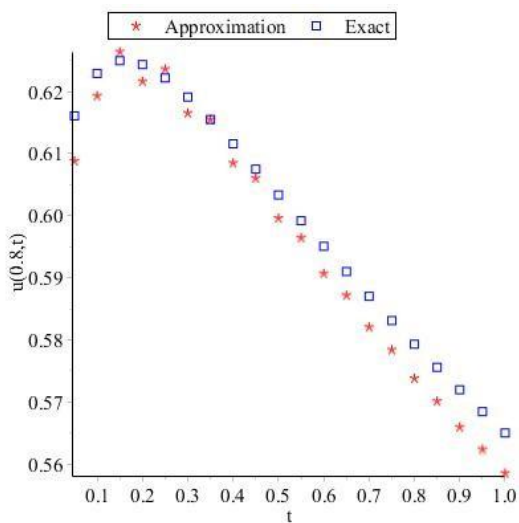
زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۸۳۹۳۶۵	۰.۸۳۸۴۶۷	۰.۸۳۹۲۷۷
۰.۱	۰.۸۱۶۴۴۳	۰.۸۱۰۱۹۲	۰.۸۰۶۴۸۹
۰.۲	۰.۷۷۸۷۶۰	۰.۷۷۴۹۴۸	۰.۷۷۴۵۱۳
۰.۲۵	۰.۷۶۳۹۶۱	۰.۷۶۰۰۱۹	۰.۷۵۹۸۶۶
۰.۴	۰.۷۳۳۸۹۲	۰.۷۳۱۰۷۰	۰.۷۳۱۱۴۴
۰.۴۵	۰.۷۱۳۹۷۱	۰.۷۱۰۶۸۲	۰.۷۱۰۷۷۳
۰.۶	۰.۶۸۴۶۸۷	۰.۶۸۲۰۱۰	۰.۶۸۲۳۲۴
۰.۷۵	۰.۶۶۱۴۳۸	۰.۶۵۸۸۷۶	۰.۶۵۷۹۱۳
۰.۹	۰.۶۴۱۷۹۸	۰.۶۳۳۱۵۸	۰.۶۳۱۸۰۹
۱	۰.۶۳۰۲۴۹	۰.۶۲۷۳۶۸	۰.۶۲۶۶۰۸
S		۰.۰۰۳۱۵۸۳۶	۰.۰۰۴۱۰۸۶۰



شکل ۴. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک

جدول ۴. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $a(u(0.5, t))$

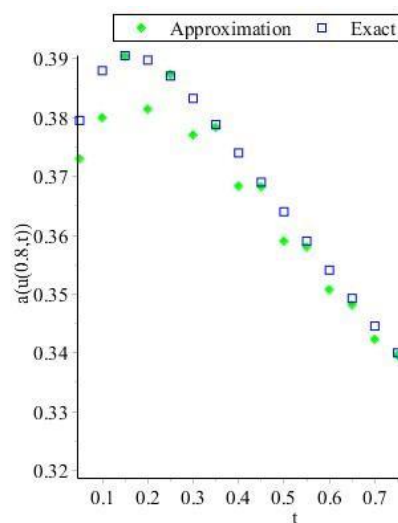
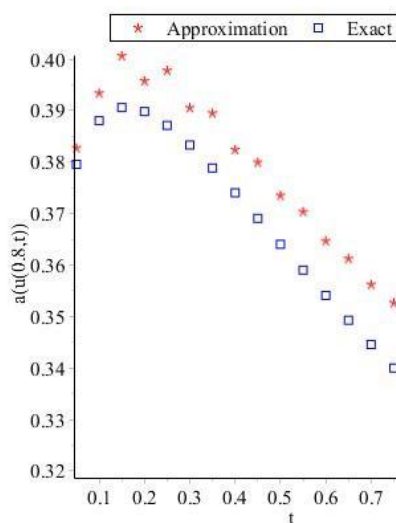
زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۷۰۴۵۳۴	۰.۶۴۶۷۳۴	۰.۶۴۸۸۹۷
۰.۱	۰.۶۶۶۵۷۹	۰.۶۱۰۶۸۰	۰.۶۰۴۳۱۷
۰.۲	۰.۴۹۴۰۱۸	۰.۵۶۷۱۴۵	۰.۵۶۲۳۴۶
۰.۲۵	۰.۵۸۲۱۰۹	۰.۵۴۹۱۶۹	۰.۵۴۳۶۱۷
۰.۴	۰.۵۲۴۰۲۰	۰.۵۰۳۵۷۵	۰.۴۹۵۶۰۸
۰.۴۵	۰.۵۰۸۳۲۸	۰.۴۹۱۷۳۳	۰.۴۸۳۱۱۹
۰.۶	۰.۴۶۸۷۹۶	۰.۴۵۹۷۴۵	۰.۴۴۹۵۵۱
۰.۷۵	۰.۴۳۷۵۰۰	۰.۴۳۴۶۷۹	۰.۴۲۱۸۹۹
۰.۹	۰.۴۱۱۹۰۵	۰.۴۱۳۶۵۱	۰.۴۰۰۵۲۶
۱	۰.۳۹۷۲۱۴	۰.۴۰۱۶۱۰	۰.۳۸۷۵۵۹
S		۰.۰۲۶۹۶۵۷	۰.۰۳۲۱۷۰۸



شکل ۵. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک

جدول ۵. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $u(0.8, t)$

زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۶۱۶۰۶۳	۰.۶۰۸۸۱۹	۰.۶۱۲۰۴۷
۰.۱	۰.۶۲۲۹۰۳	۰.۶۱۹۳۲۲	۰.۶۱۸۳۷۷
۰.۲	۰.۶۲۴۳۴۰	۰.۶۲۱۶۴۷	۰.۶۱۹۶۶۱
۰.۲۵	۰.۶۲۳۱۸۱	۰.۶۲۳۶۲۷	۰.۶۲۵۴۹۵
۰.۴	۰.۶۱۱۵۷۲	۰.۶۰۸۴۹۴	۰.۶۰۷۸۱۹
۰.۴۵	۰.۶۰۷۴۸۸	۰.۶۰۶۰۵۲	۰.۶۰۶۸۵۲
۰.۶	۰.۵۹۵۰۵۵	۰.۵۹۰۷۱۲	۰.۵۹۰۴۴۸
۰.۷۵	۰.۵۸۳۰۹۵	۰.۵۷۸۳۹۸	۰.۵۷۸۴۸۸
۰.۹	۰.۵۷۱۹۴۷	۰.۵۶۲۳۸۰	۰.۵۶۱۷۱۸
۱	۰.۵۶۴۹۹۰	۰.۵۵۸۵۳۵	۰.۵۵۸۹۱۳
S		۰.۰۰۴۴۱۰۰۵	۰.۰۰۴۶۲۰۳۶



شکل ۶. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک

جدول ۶. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $a(u(0.8, t))$

زمان	جواب دقیق	تبخونوف مرتبه صفر	تبخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۳۷۹۵۳۴	۰.۳۸۲۷۱۹	۰.۳۷۲۰۷۲
۰.۱	۰.۳۸۸۰۰۸	۰.۳۹۳۳۶۴	۰.۳۷۸۷۶۶
۰.۲	۰.۳۶۴۰۱۸	۰.۳۹۵۷۳۸	۰.۳۸۰۱۳۲
۰.۲۵	۰.۳۸۷۱۰۹	۰.۳۹۷۷۶۵	۰.۳۸۶۳۶۴
۰.۴	۰.۳۷۴۰۲۰	۰.۳۸۲۳۹۲	۰.۳۶۷۶۳۲
۰.۴۵	۰.۳۶۹۰۴۲	۰.۳۷۹۹۳۸	۰.۳۶۶۶۲۰
۰.۶	۰.۳۵۴۰۹۰	۰.۳۶۴۶۹۱	۰.۳۴۹۶۶۷
۰.۷۵	۰.۳۴۰۰۰۰	۰.۳۵۲۶۶۳	۰.۳۳۷۵۵۲
۰.۹	۰.۳۲۷۱۲۳	۰.۳۴۰۶۹۸	۰.۳۲۴۸۰۲
۱	۰.۳۱۹۲۱۴	۰.۳۳۳۶۵۸	۰.۳۱۸۱۷۴
S		۰.۰۱۱۱۱۷۷	۰.۰۰۴۹۴۵۴۳

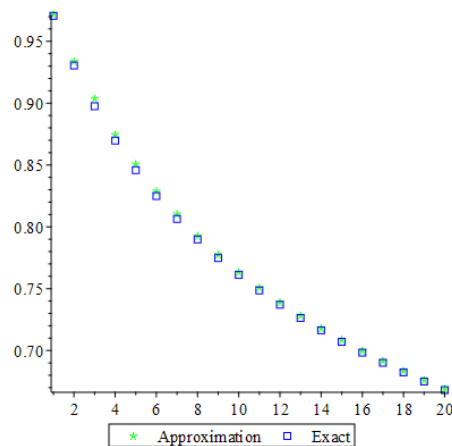
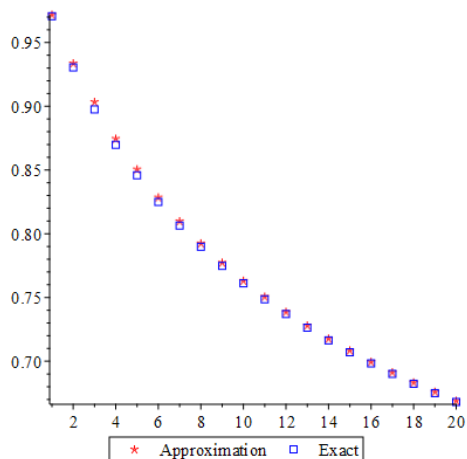
جدول ۷. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $u(0.2, t)$

زمان	جواب دقیق	تبخونوف مرتبه صفر	تبخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۹۳۷۸۳۶	۰.۹۴۱۷۱۰	۰.۹۴۱۷۳۸
۰.۱	۰.۹۰۳۶۴۸	۰.۹۰۸۴۵۶	۰.۹۰۸۵۹۱
۰.۲	۰.۸۵۰۳۷۳	۰.۸۵۴۶۶۲	۰.۸۵۴۷۳۴
۰.۲۵	۰.۸۲۸۹۲۰	۰.۸۳۳۰۶۹	۰.۸۳۳۴۹۲
۰.۴	۰.۷۷۷۶۸۲	۰.۷۸۰۰۳۸	۰.۷۸۰۱۹۲
۰.۴۵	۰.۷۶۳۷۵۹	۰.۷۶۶۰۹۵	۰.۷۶۶۲۴۳
۰.۶	۰.۷۲۸۳۹۶	۰.۷۲۹۹۸۴	۰.۷۳۰۲۲۰
۰.۷۵	۰.۷۰۰۰۰۰	۰.۷۰۱۳۷۵	۰.۷۰۱۴۸۷
۰.۹	۰.۶۷۶۴۳۰	۰.۶۷۷۴۱۹	۰.۶۷۷۴۸۴
۱	۰.۶۶۲۷۳۲	۰.۶۶۳۶۰۲	۰.۶۶۳۶۶۲
S=خطای کل		۰.۰۰۲۸۱۱	۰.۰۰۲۹۶۶
زمان اجرا (ثانیه)		۲۳.۸۹	۲۳.۰۷

برای حل این مسئله، هم‌چنین ضریب نفوذ  $a(u)$  را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

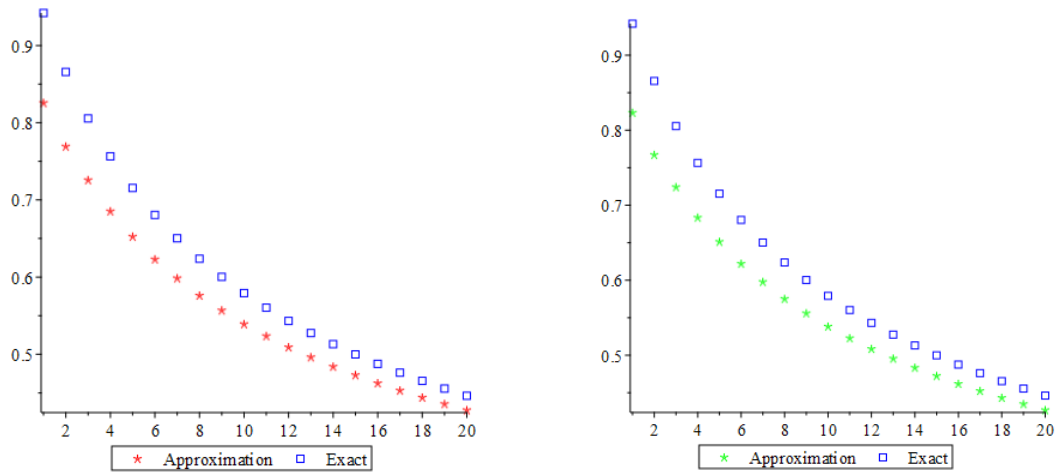
$$a(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2,$$

با انتخاب  $t_f = 1$ ،  $M = 10$ ،  $N = 20$  و مقادیر اولیه  $\{a_0, a_1, a_2\}$  به ترتیب به صورت  $\{0.1, 0.2, 0.7\}$ ، مقایسهٔ جواب دقیق و جواب محاسبه شده و همچنین محاسبهٔ خطای کلی، در جدول‌های ۷ تا ۱۲ و شکل‌های ۷ تا ۱۲ نشان داده شده است.



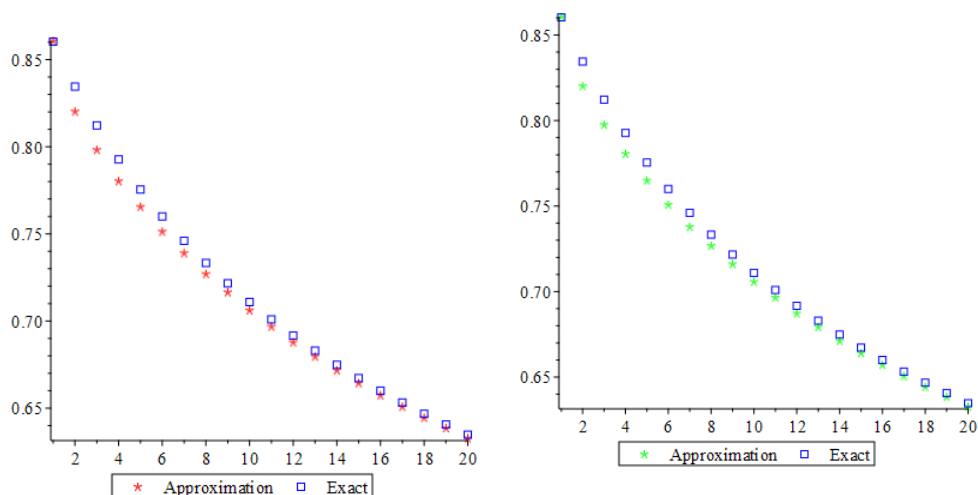
شکل ۷. مقایسهٔ بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبهٔ صفر و یک  
 جدول ۸. مقایسهٔ بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر منتهی در نقطهٔ  $a(u(0.2, t))$

زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبهٔ صفر	تیخونوف مرتبهٔ یک
۰.۰۵	۰.۸۷۹۵۳۸	۰.۷۸۰۸۹۰	۰.۷۷۸۹۱۸
۰.۱	۰.۸۱۶۵۸۲	۰.۷۳۲۸۴۲	۰.۷۳۱۲۲۷
۰.۲	۰.۷۲۳۱۳۴	۰.۶۵۸۰۳۹	۰.۶۵۶۶۳۹
۰.۲۵	۰.۶۸۷۱۰۶	۰.۶۲۹۰۳۰	۰.۶۲۸۲۰۷
۰.۴	۰.۶۰۴۷۸۹	۰.۵۶۰۳۵۵	۰.۵۵۹۳۳۵
۰.۴۵	۰.۵۸۳۳۲۸	۰.۵۴۲۷۵۵	۰.۵۴۱۸۷۹
۰.۶	۰.۵۳۰۵۶۱	۰.۴۹۸۵۶۱	۰.۴۹۷۹۳۷
۰.۷۵	۰.۴۹۰۰۰۰	۰.۴۶۴۷۰۵	۰.۴۶۴۰۳۹
۰.۹	۰.۴۵۷۵۵۷	۰.۴۳۷۱۴۳	۰.۴۳۶۵۰۵
۱	۰.۴۳۹۲۱۴	۰.۴۲۱۵۶۹	۰.۴۲۰۹۷۳
S		۰.۰۵۱۱۳۶	۰.۰۵۲۱۴۸



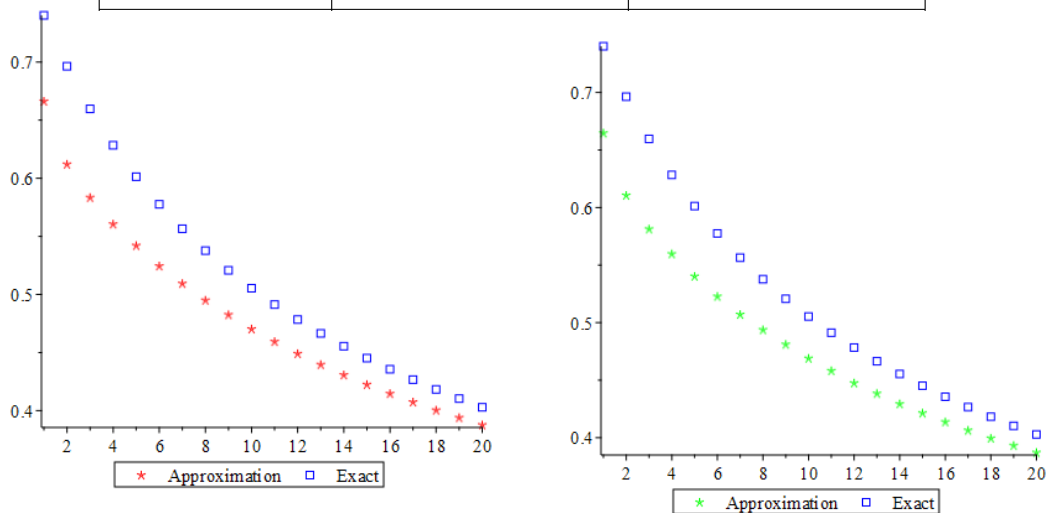
شکل ۸. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک  
 جدول ۹. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $u(0.5, t)$ .

زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۸۳۹۳۶۵	۰.۸۲۷۳۳۳	۰.۸۲۷۱۳۶
۰.۱	۰.۸۱۶۴۴۵	۰.۸۰۱۴۷۴	۰.۸۰۰۹۶۹
۰.۲	۰.۷۷۸۷۶۰	۰.۷۶۸۰۴۶	۰.۷۶۷۸۲۶
۰.۲۵	۰.۷۶۲۹۶۱	۰.۷۵۴۳۱۳	۰.۷۵۳۳۹۹
۰.۴	۰.۷۲۳۸۹۲	۰.۷۱۸۴۵۲	۰.۷۱۸۱۳۰
۰.۴۵	۰.۷۱۲۹۷۱	۰.۷۰۸۲۹۹	۰.۷۰۸۰۰۲
۰.۶	۰.۶۸۴۶۸۷	۰.۶۸۱۱۰۲	۰.۶۸۰۶۱۲
۰.۷۵	۰.۶۶۱۴۳۸	۰.۶۵۸۷۶۹	۰.۶۵۸۵۸۱
۰.۹	۰.۶۴۱۷۹۸	۰.۶۳۹۶۵۰	۰.۶۳۹۵۴۱
۱	۰.۶۳۰۳۴۹	۰.۶۲۸۳۷۹	۰.۶۲۸۱۹۵
S		۰.۰۰۶۹۳۲	۰.۰۰۷۳۵۵



شکل ۹. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک  
جدول ۱۰. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $a(u(0.5, t))$

زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۷۰۴۵۳۷	۰.۶۲۱۴۲۱	۰.۶۱۹۸۰۸
۰.۱	۰.۶۶۶۵۸۲	۰.۵۸۷۶۳۱	۰.۵۸۵۷۵۸
۰.۲	۰.۶۰۶۴۶۷	۰.۵۴۵۱۸۹	۰.۵۴۳۸۴۷
۰.۲۵	۰.۵۸۲۱۰۶	۰.۵۳۸۱۵۷	۰.۵۲۶۰۲۸
۰.۴	۰.۵۲۴۰۲۰	۰.۴۸۴۷۹۱	۰.۴۸۳۵۴۹
۰.۴۵	۰.۵۰۸۳۲۸	۰.۴۷۲۸۰۵	۰.۴۷۱۶۳۶
۰.۶	۰.۴۶۸۷۹۶	۰.۴۴۱۳۳۳	۰.۴۴۰۰۵۳
۰.۷۵	۰.۴۳۷۵۰۰	۰.۴۱۶۱۷۹	۰.۴۱۵۳۳۳
۰.۹	۰.۴۱۱۹۰۵	۰.۳۹۵۱۴۱	۰.۳۹۴۴۳۳
۱	۰.۳۹۷۲۱۴	۰.۳۸۲۹۵۳	۰.۳۸۲۱۹۸
S		۰.۰۴۴۶۹۵	۰.۰۴۵۹۴۲

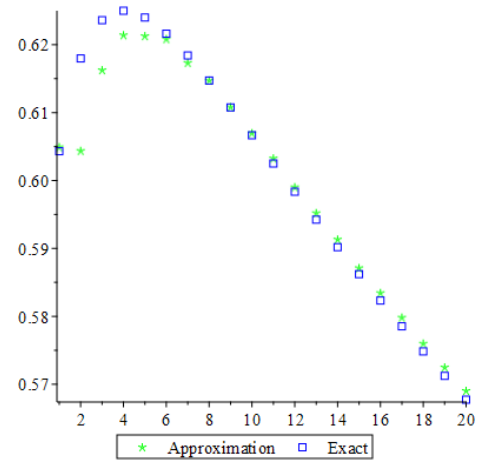
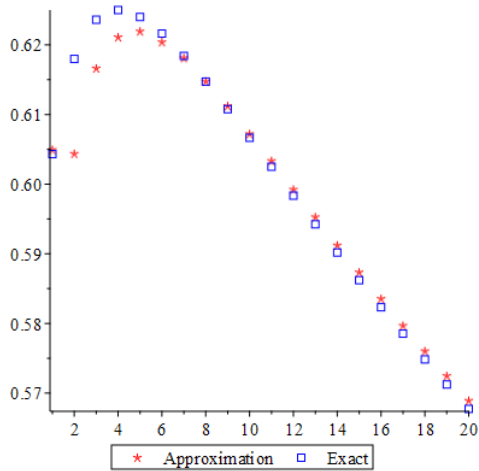


شکل ۱۰. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک



جدول ۱۱. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $u(0.8, t)$

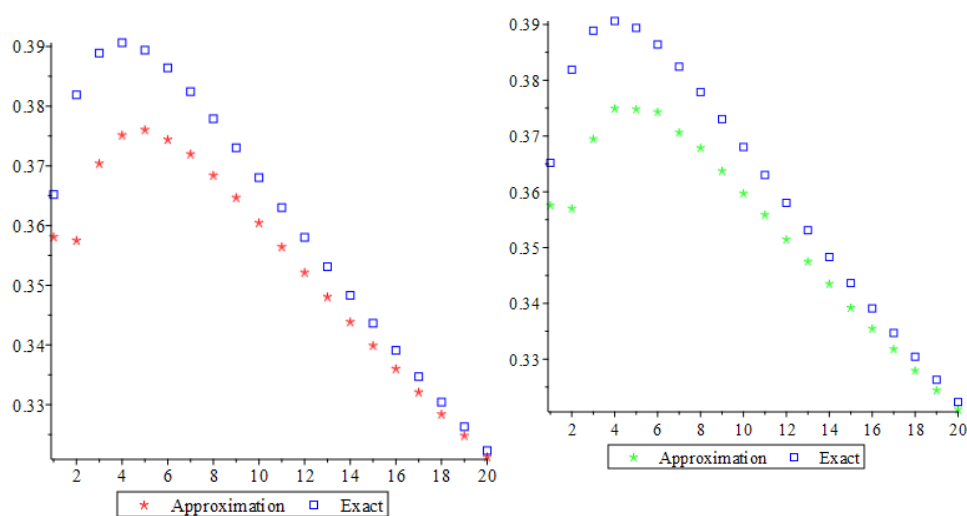
زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۶۱۶۰۶۶	۰.۵۹۹۴۳۰	۰.۵۹۹۰۳۱
۰.۱	۰.۶۲۲۹۰۵	۰.۶۱۵۲۳۹	۰.۶۱۵۲۸۷
۰.۲	۰.۶۲۴۳۴۰	۰.۶۲۱۸۸۰	۰.۶۲۱۶۳۹
۰.۲۵	۰.۶۲۲۱۷۹	۰.۶۲۰۹۴۹	۰.۶۲۰۸۰۷
۰.۴	۰.۶۱۱۵۷۲	۰.۶۱۱۹۶۱	۰.۶۱۱۷۰۸
۰.۴۵	۰.۶۰۷۴۸۸	۰.۶۰۸۱۲۳	۰.۶۰۸۱۴۲
۰.۶	۰.۵۹۵۰۵۵	۰.۵۹۵۹۷۱	۰.۵۹۵۷۴۲
۰.۷۵	۰.۵۸۳۰۹۵	۰.۵۸۴۲۵۸	۰.۵۸۴۲۶۸
۰.۹	۰.۵۷۱۹۴۶	۰.۵۷۳۱۰۳	۰.۵۷۳۰۵۶
۱	۰.۵۶۴۹۹۰	۰.۵۶۶۲۱۷	۰.۵۶۵۸۵۸
S		۰.۰۰۵۱۱۳	۰.۰۰۵۱۴۸



شکل ۱۱. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک

جدول ۱۲. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با روش عناصر متناهی در نقطه  $a(u(0.8, t))$ 

زمان	جواب دقیق	تیخونوف مرتبه صفر	تیخونوف مرتبه یک
۰.۰۵	۰.۳۷۹۵۳۸	۰.۳۵۲۳۷۳	۰.۳۵۱۴۸۲
۰.۱	۰.۳۸۸۰۱۱	۰.۳۶۸۹۴۲	۰.۳۶۸۴۷۳
۰.۲	۰.۳۸۹۸۰۰	۰.۳۷۵۹۹۶	۰.۳۷۵۲۰۲
۰.۲۵	۰.۳۸۷۱۰۷	۰.۳۷۵۰۰۴	۰.۳۷۴۳۱۷
۰.۴	۰.۳۷۴۰۲۰	۰.۳۶۵۴۸۱	۰.۳۶۴۷۰۴
۰.۴۵	۰.۳۶۹۰۴۲	۰.۳۶۱۴۴۵	۰.۳۶۰۹۶۵
۰.۶	۰.۳۵۴۰۹۰	۰.۳۴۸۷۸۸	۰.۳۴۸۰۸۴
۰.۷۵	۰.۳۴۰۰۰۰	۰.۳۳۶۷۶۴	۰.۳۳۶۳۳۴
۰.۹	۰.۳۳۷۱۳۳	۰.۳۳۵۴۷۱	۰.۳۳۵۰۰۹
۱	۰.۳۱۹۲۱۴	۰.۳۱۸۵۷۷	۰.۳۱۷۸۲۲
S		۰.۰۱۱۱۶۷	۰.۰۱۱۶۷۱



شکل ۱۲. مقایسه بین جواب دقیق و جواب محاسبه شده با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه صفر و یک

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش عددی عناصر متناهی همراه با طرح کم‌ترین مربعات و منظم‌سازی تیخونوف با موفقیت برای حل مسئله نفوذ غیرخطی معکوس به‌کار برده شد. از مثال ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که روش عددی ارائه شده دارای دقت و کارایی مطلوب جهت حل این مسئله غیرخطی معکوس است. همچنین، حدس‌های اولیه دیگری را برای  $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$  استفاده کردیم، و نتایج به‌دست آمده نشان داد که این حدس اولیه در دقت و کارایی روش تأثیری ندارد.

## منابع

1. Alifanov O. M., "Inverse Heat Transfer Problems", Springer, New York, (1994).
2. Bear J., "Dynamics of Fluids in Porous Media", 2nd edn. Elsevier, New York (1975).
3. Beilina L., Johnson C., "A hybrid finite element/difference method for an inverse scattering problem", In Numerical Mathematics and Advanced Applications-ENUMATH, Springer-Verlag (2001).
4. Cannon J. R., "The One-Dimensional Heat Equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).
5. Cannon J. R., Duchateau, "An inverse Problem for a nonlinear diffusion equation", SIAM J. Appl. Math. 39 (2) (1980) 272-289.
6. Cannon J. R., Zachmann D., "Parameter determination in parabolic partial differential equations from overspecified boundary data", Int. J. Eng. Sci. 20 (1982) 779-788.
7. Courant R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations", Bull, Amer, Math, Soc., 49 (1943) 1-23 .
8. Duchateau P., "Monotonicity and uniqueness results in identifying an unknown coefficient in a nonlinear diffusion equation", SIAM J. App. Math. 41 (2) (1981) 310-323.
9. El-Azab M. S., Abdelgaber K. M., "Finite element solution of nonlinear diffusion problems", Applied Mathematics and Computation, 217 (2011) 6198-6205.
10. Elden L., "A note on the computation of the generalized cross-validation function for ill-conditioned least squares problems", BIT, 24 (1984) 467-472.
11. Friedman A., "Partial Differential Equations of Parabolic Type", PrenticeHall, Englewood Cliffs, NJ (1964).
12. Golub G. H., Heath M., Wahba G., "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter", Technometrics. 21 (2) (1979) 215-223 .
13. John V., Schmeyer E., "Finite element methods for time dependent convection diffusion reaction equations with small diffusion", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2008) 475-494.
14. Larsson S., Thomee V., "Partial Differential Equations with Numerical Methods", Springer, (2003).
15. Ozisik M. N., "Heat Conduction", Second edition, Wiley, New York (1993).
16. Pourgholi R., Rostamian M., "A numerical technique for solving IHCPs using Tikhonov regularization method", Appl. Math. Model. 34 (8) (2010) 2102-2110.
17. Foadian S., Pourgholi R., Tabasi S. H., "Cubic B-spline method for the solution of an inverse parabolic system", Applicable Analysis. (2017) 1-28.
18. Pourgholi R., Tavallaie N., Foadian S., "Applications of Haar basis method for solving some ill-posed inverse problems", J. Math. Chem. 50(2012) 2317-2337.

19. Shidfar A., Nikoofar H. R., "An inverse problem for a linear diffusion equation with nonlinear boundary condition", *Appl. Math. Lett.* 2 (4) (1989) 385-388.
20. Shidfar A., Pourgholi R., "Application of finite difference method to analysis an ill-posed problem", *Applied Mathematics and Computation* 168 (2) (2005) 1400-1408.
21. Shidfar A., Pourgholi R., Ebrahimi M., "A numerical method for solving of a nonlinear inverse diffusion problem", *Computers and Mathematics with Applications*, 52 (2006) 1021-1030.
22. Thomee V., "Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems", Second edition, Springer, (1997).
23. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y., "Solution of Ill-Posed Problems", V. H. Winston and Sons, Washington (1977).
24. Zlamal M., "Finite element methods for nonlinear parabolic equations", *Num. Analysis*, 11 (1977) 93-107.