

## مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

مهدى رشیدى کوچى

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کهنوج، گروه ریاضی

دریافت ۱۱/۰۵/۹۶  
پذیرش ۲۴/۱۰/۹۷

### چکیده

در این مقاله مفهوم مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده با شبکه یکنواخت تعریف شده است. این تعریف تعمیمی از مجموعه‌های موجک در فضای اقلیدسی است. سپس با استفاده از تبدیل فوریه و تجزیه چند ریزه‌ساز این مجموعه‌ها مشخص شده‌اند. در ادامه مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و بررسی شده‌اند و ارتباط بین مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته و مجموعه‌های موجک بیان شده است. در پایان با تعریف تابع بعد موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده، مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته مشخص شده و رابطه آنها با مجموعه‌های موجک بررسی شده است.

**واژه‌های کلیدی:** موجک، گروه آبلی موضعاً فشرده، مجموعه موجک، تجزیه چند ریزه‌ساز، مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته.

### مقدمه

یکی از مفاهیم اساسی در نظریه موجک، مجموعه موجک است. مفهوم مجموعه موجک بهوسیلهٔ دای و لارسون [۷] ارائه شد. تقریباً همزمان فنگ و ونگ [۹] مفهوم موجک فرکانسی با محمل مینیمال را معرفی کردند. مجموعه‌های موجک منبعی از مثال‌ها و بهویژه مثال‌های نقض در نظریه موجک است. یکی از این مثال‌ها مجموعهٔ موجک یورن است که برای اولین بار نشان داد موجک‌هایی موجودند که ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز ندارند. چنین نتیجه‌های نقش بسیار پراهمیتی در گسترش نظریه موجک داشته است. برای بررسی بیشتر در مورد موجک‌ها می‌توان به مرجع ارزشمند [۶] مراجعه کرد.

نظریه موجک در حالت گروه‌ها به‌طور وسیعی بررسی شده است برخی از منابع عبارتند از [۱]-[۳]، [۱۲] و [۱۴]. در اینجا مجموعه‌های موجک برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و بررسی شده است. در ادامه با کمک آنالیز چند ریزه‌ساز و تبدیل فوریه، مجموعه‌های موجک برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده مشخص شده‌اند. سپس مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و رابطه آنها با مجموعه‌های موجک بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده تعمیمی از نتایج [۴]، [۵]، [۷] و [۹] برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده است.

این مقاله بدین صورت بخش‌بندی شده است: در بخش ۲، ابتدا گروه‌های آبلی موضعاً فشرده بررسی و مورد مطالعه قرار گرفته است. سپس مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف شده‌اند. در بخش ۳، ساختار مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده بررسی شده و با کمک آنالیز چند ریزه‌ساز و تبدیل فوریه مشخص شده‌اند. در بخش ۴، مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف و با استفاده از مفهوم تابع بعد موجک رابطه آنها با مجموعه‌های موجک بررسی شده است.

\*نویسنده مسئول rashidimehd20@gmail.com

## پیش‌نیازها و مفاهیم اولیه

در این بخش ابتدا گروه‌های آبلی موضعاً فشرده و بهویژه گروه‌هایی که دارای شبکه یکنواخت هستند، بررسی و مطالعه شده است. سپس نظریه موجک و مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده تعریف شده‌اند. برای مشاهده جزئیات بیش‌تر می‌توان از منابع [۸]، [۱۳] و [۱۵] استفاده کرد.

فرض کنید  $G$  گروه آبلی موضعاً فشرده هاسدورف و  $\hat{G}$  گروه دوگان متناظر با آن باشد. یعنی

$$\hat{G} = \{\xi : G \rightarrow \mathbb{C}\}$$

که  $\xi$  کاراکتر پیوسته‌ای از  $G$  است با این خواص:

$$1. \quad x \in G \Rightarrow \xi(x) = 1 \quad \text{برای هر } x \in G$$

$$2. \quad x, y \in G \Rightarrow \xi(x+y) = \xi(x)\xi(y) \quad \text{برای هر } x, y \in G$$

در اینجا از نماد  $(\xi, x)$  برای عدد مختلط  $(x)$  استفاده می‌شود.

دو گروه  $G$  و  $G'$  را به‌طور توپولوژیکی ایزومورف گویند و به صورت  $G \cong G'$  نمایش می‌دهند هرگاه یک ایزومورفیسم جبری که هم‌ئومورفیسم نیز هست از  $G$  به روی  $G'$  وجود داشته باشد.

فرض کنید  $H \subseteq G$  زیرگروه بسته‌ای از گروه آبلی  $G$  است. زیر گروه  $H^\perp$  از  $\hat{G}$  را بدین صورت تعریف می‌کنند:

$$H^\perp = \{\xi \in \hat{G} : (h, \xi) = 1, \forall h \in H\}.$$

گروه پوچ ساز  $H$  با دوگان گروه خارج قسمتی  $G/H$  و دوگان  $H$  با گروه خارج قسمتی  $\hat{G}/H^\perp$  به‌طور توپولوژیکی ایزومورف است، یعنی به‌ترتیب  $(G/H)^\perp \cong \hat{G}/H^\perp$  و  $H^\perp \cong \hat{H}/H$ .

تعریف ۱ نقش کلیدی در این مقاله دارد.

تعریف ۱. [۱۱]، فرض کنید  $G$  گروه آبلی موضعاً فشرده و  $H$  زیر گروه گسسته‌ای از  $G$  باشد. در این صورت  $H$  را شبکه یکنواخت در  $G$  گویند هرگاه گروه خارج قسمتی  $G/H$  فشرده باشد.

فرض کنید  $H$  یک شبکه یکنواخت برای گروه آبلی و موضعاً فشرده  $G$  باشد. در این صورت  $H$  در  $G$  بسته و هم‌چنین  $H^\perp$  در  $\hat{G}$  بسته و گسسته است. به علاوه  $\hat{G}/H^\perp$  فشرده است. در نتیجه می‌توان گفت  $H$  شبکه یکنواخت در  $\hat{G}$  است.

روی هر گروه آبلی موضعاً فشرده یک اندازه هار موجود است. یعنی اندازه بول منظم و غیر منفی  $m_G$  که برابر صفر نبوده و انتقال پایا است. این اندازه در حد مقادیر ثابت یکتا است.

فرض کنید  $G$  یک گروه آبلی موضعاً فشرده،  $H$  زیر گروه بسته‌ای از  $G$  و  $f \in L^1(G)$  باشد. در این صورت بنا به فرمول وایل [۱۵] اندازه‌های هار  $m_G$ ،  $m_H$  و  $m_{G/H}$  را می‌توان طوری انتخاب کرد که

$$\int_G f(x) dm_G(x) = \int_{G/H} \int_H f(x+h) dm_H(h) dm_{G/H}([x]).$$

[X] نشان‌دهنده هم دسته‌های  $x$  در مجموعه خارج قسمت  $G/H$  است.

برای تابع  $f \in L^1(G)$  تبدیل فوریه  $f$  برای هر  $\xi$  در  $\hat{G}$  بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(\xi) = \int_G f(x)(x, -\xi) dm_G(x).$$

تبديل فوريه يك عملگر خطى از  $L^1(G)$  به توی  $C_0(\hat{G})$  است. جايي كه  $C_0(\hat{G})$  مجموعه‌ای از توابع پيوسته است که در بينهايت صفر می‌شوند. يعني برای هر  $K \subseteq G$  موجود است بهطوری‌كه برای هر  $x \in K$  داشته باشيم  $|f(x)| < \infty$ .

اندازه هار گروه دوگان  $\hat{G}$  از  $G$  می‌تواند طوري نرمال شود که برای کلاس خاصی از توابع، فرمول فوريه معکوس برقرار باشد

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi)(x, \xi) dm_{\hat{G}}(\xi), x \in G.$$

در اين حالت می‌توان تبدل فوريه روی  $L^1(G) \cap L^2(G)$  را به يك عملگر يك از  $L^2(\hat{G})$  به روی  $L^2(G)$  توسيع داد. اين تبدل را تبدل پلانشرل گويند و تساوي پارسوال برقرار است. يعني برای هر  $f, g \in L^2(G)$  داريم:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

اگر  $G$  يك گروه آبلی فشرده باشد، آن‌گاه  $\hat{G}$  پایه متعامد برای  $L^2(G)$  است.

در ادامه اين بخش اصطلاحات بنיאدي از نظریه موجک روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده را بيان می‌شود. فرض می‌كنیم که  $G$  يك گروه آبلی موضع‌آ فشرده با اندازه هار  $m_G$  و شبکه يکنواخت  $H$  است. عملگر انتقال يكه  $T_h$  روی  $L^2(G)$  بدين صورت تعريف می‌شود:

$$T_h f(x) = f(x + h), h \in H.$$

فرض کنيد  $A$  خودريختی روی گروه آبلی و موضع‌آ فشرده  $G$  باشد که تحديد آن به  $H$  پایا است. عملگر اتساع يكه  $D_A$  برای هر  $x$  متعلق به  $L^2(G)$  بدين صورت تعريف می‌شود:

$$D_A f(x) = \sqrt{|A|} f(Ax).$$

برای هر مجموعه اندازه پذير  $K \subseteq G$  داريم  $|A| m_G(K) = |A| m_G(A(K))$  و  $|A| \neq 1$ .  
تعريف ۲. مجموعه  $\{\psi_i : i = 1, \dots, L\} \subseteq L^2(G)$  موجک چندگانه برای  $A$  گفته می‌شود، هرگاه مجموعه  $\{D_A^j T_h \psi_i : 1 \leq i \leq L, h \in H, j \in \mathbb{Z}\}$

تشکيل پایه متعامد برای  $L^2(G)$  دهد.

در اين صورت، مشابه حالت اقلیدسي، آناليز چند ريزه‌ساز روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده تعريف می‌شود.  
تعريف ۳. فرض کنيد  $G$  يك گروه آبلی موضع‌آ فشرده با شبکه يکنواخت  $H$  است. دنباله  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  از زيرفضاهای

$L^2(G)$  که در شرایط زير صدق کند را آناليز چند ريزه‌ساز گويند:

$$V_j \subseteq V_{j+1}, j \in \mathbb{Z} .$$

$$D_A(V_j) = V_{j+1}, j \in \mathbb{Z} .$$

۳. مجموعه چگال در  $L^2(G)$  است و  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$

۴.تابع مقیاس  $\varphi \in L^2(G)$  موجود است بهطوری‌كه مجموعه  $\{T_h \varphi : h \in H\}$  تشکيل پایه متعامد برای  $V_0$  دهد.  
اگر شرط ۴ را با شرط ضعيف‌تر زير جاي گزین کنيم، آن‌گاه دنباله  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  را آناليز چند ريزه‌ساز تعميم يافته گويند.  
[۴]

۴. مجموعه  $V_0$  تحت عمل انتقال پایا است.

یک موجک را موجک آنالیز چند ریزه‌ساز گوییم هرگاه از یک آنالیز چند ریزه‌ساز به دست آمده باشد.

مجموعه  $W_j$  را متمم متعامد  $V_{j+1}$  در  $V_j = V_j \oplus W_j$  معرفی می‌کنیم. یعنی  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ . در این صورت  $L^2(G)$  را

می‌توان بدین صورت جمع مستقیم تجزیه کرد:

$$L^2(G) = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

هر تابع موجک تشکیل آنالیز چند ریزه‌ساز تعمیم یافته می‌دهد. بدین صورت که فرض کنید  $G$  یک گروه آبلی موضعی فشرده با شبکه یکنواخت  $H$  و  $\mathcal{U}$  متعلق به  $L^2(G)$  یک تابع موجک باشد. زیرفضاهای  $L^2(G)$  را در نظر بگیرید. به راحتی دیده می‌شود که این

$$W_0 = \{T_h \psi : h \in H\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد

$$(T_h f)(\xi) = \langle \xi, h \rangle \hat{f}(\xi).$$

#### مثال ۴. فرض کنید

$$G = \{(x_j)_{j \in \mathbb{Z}} : x_j \in \{0, 1\}, x_j = 0 \forall j > n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

برای هر  $(x_j), (y_j) \in G$ ، عمل جمع روی  $G$  جمع مختصات به هنگ ۲ است یعنی

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \Leftrightarrow z_j \equiv x_j + y_j.$$

در این صورت  $G$  یک گروه آبلی موضعی فشرده با توبولوژی حاصل‌ضربی است. این گروه را گروه دوتایی کانتور گویند.

[۱۰، ۱۴].

فرض کنید

$$D = \{x \in G : x_j = 0, j \geq 0\} \text{ و } H = \{x \in G : x_j = 0, j < 0\}$$

در این صورت  $H$  شبکه یکنواخت،  $D$  فشرده و

برای  $\ell \in \mathbb{Z}$  مجموعه‌های  $D_\ell = \{(x_j) \in G : x_j = 0, j \geq \ell\}$  تشکیل همسایگی‌هایی از صفر می‌دهند که در این شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$1. \quad D_\ell = G, \cap D_\ell = \{0\}, D_\ell \subset D_{\ell+1},$$

۲. هر  $D_\ell$  زیرگروه باز و فشرده‌ای از  $G$  است.

عملگر اتساع  $A : G \rightarrow G$  برای هر  $x_j \in G$  به صورت  $A(x_j) = x_{j+1}$  و نگاشت معکوس به فرم  $A^{-1}(x_j) = x_{j-1}$  است.

#### مثال ۵. روی گروه دوتایی کانتور، موجک هار را می‌توان بدین صورت تعریف کرد:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_{-1} \\ -1, & x \in D \setminus D_{-1} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در پایان این بخش به یادآوری لم ۶ از مرجع [۱۲] می‌برداریم که در قسمت‌های بعد استفاده می‌شود.

لم ۶. فرض کنید  $G$  گروه آبلی موضع‌آ فشرده با شبکه یکنواخت  $H$  است. مجموعه  $\{T_h f : h \in H\}$  برای

$$f \in L^2(G) \text{ متعامد است اگر و تنها اگر } \sum_{\eta \in H^\perp} |\hat{f}(\xi + \eta)|^2 = 1 \text{ برای تقریباً همه جا } \hat{f} \in \hat{G}.$$

### ساختار مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده

در این بخش مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده معرفی و ساختار مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده بررسی می‌شود و با استفاده از مفاهیمی چون آنالیز چندریزه‌ساز و تبدیل فوریه مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده تعیین می‌شود.

نتایج این بخش تعمیم مفاهیم و قضایا مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده است. ابتدا با تعریف مجموعه‌های موجک برای گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده شروع می‌کنیم.

تعریف ۷. فرض کنید  $G$  یک گروه آبلی موضع‌آ فشرده است. زیر مجموعه  $W$  از  $\hat{G}$  را مجموعه موجک گوییم هرگاه تابع موجک  $(\chi_W \psi) \in L^2(G)$  موجود باشد به‌طوری که  $\psi = \chi_W \psi$ . موجک  $\psi$  را موجک فرکانسی با محمل مینیمال گوییم و به صورت  $\psi$  نمایش می‌دهیم.

لم ۸. در مورد اندازه مجموعه‌های موجک است.

لم ۸. اگر  $W \subseteq \hat{G}$  مجموعه موجک باشد، آن‌گاه  $|W| = |\hat{H}|$ .

$$\begin{aligned} \text{برهان:} & \text{ بنا به لم ۶، } \sum_{\eta \in H^\perp} \chi_W(\xi + \eta) = 1, \text{ در نتیجه با استفاده از فرمول وایل داریم:} \\ & |W| = \int_{\hat{G}} \chi_W(\xi) d\xi = \int_{\hat{G}/H^\perp} \sum_{\eta \in H^\perp} \chi_W(\xi + \eta) d\xi \\ & = \int_{\hat{G}/H^\perp} d\xi = |\hat{G}/H^\perp| = |\hat{H}|. \end{aligned}$$

تعریف ۹. دو مجموعه  $E, F \subseteq \hat{G}$  را همارز انتقال گوییم هرگاه افزار اندازه‌پذیر  $\eta$  از  $E$  موجود باشد به‌طوری که مجموعه  $\{\eta + E_\eta : \eta \in H^\perp\}$  افزار اندازه‌پذیری از  $F$  به هنگ مجموعه‌های صفر تشکیل دهد، یعنی  $F = \bigcup_{\eta \in H^\perp} (\eta + E_\eta)$ .

چنین همارزی به صورت  $E_T \sim F$  نشان داده می‌شود.

لم بعدی در مورد مجموعه‌های هم ارز انتقال است.

لم ۱۰. مجموعه توابع  $\{(h, \xi) \chi_E(\xi) : h \in H\}$  تشكیل مجموعه متعامد یکه می‌دهد اگر و تنها اگر  $E \sim_T \hat{H}$ .  
برهان: اگر  $E \sim_T \hat{H}$ ، آنگاه بنا به لم ۶ مجموعه  $\{(h, \xi) \chi_E(\xi) : h \in H\}$  متعامد یکه است.

بلعکس، فرض کنید  $\{(h, \xi) \chi_E(\xi) : h \in H\}$  مجموعه متعامد یکه باشد. این مجموعه تبدیل فوریه مجموعه  $\{T_h F^{-1} \chi_E : h \in H\}$  است که بنا به قضیه پلانشرمت‌تعامد یکه است. حال بنا به لم ۶ برای تقریباً هر  $\hat{G} \in \hat{G}$  داریم

$$\sum_{\eta \in H^\perp} |\chi_E(\xi + \eta)|^2 = 1.$$

تساوی مذکور افزاری از  $\hat{H}$  به دست می‌دهد که همارز انتقال با  $E$  است. در حقیقت چون مجموع برابر یک است، برای هر  $\xi \in \hat{H}$  عضو یکتا  $\eta$  متعلق به  $H^\perp$  موجود است به‌طوری که  $E \in \eta + \xi$ . از این‌رو برای هر  $\eta \in H^\perp$  مجموعه

اینکه انتقال‌های  $\hat{H}$  تمام  $\hat{G}$  را می‌پوشاند تمام  $E$  با انتقال‌هایی از  $I_\eta$  برای  $\eta \in H^\perp$  است. بنابراین  $\{\xi \in \hat{H} : \xi + \eta \in E\} = \{\xi \in \hat{H} : \xi \in E\}$

حال به ارائه دو لم می‌پردازیم که در برهان قضیه ۳-۷ کاربرد دارد.

لم ۱۱. فرض کنید  $L^2(\hat{G})$  و  $f \in L^2(\hat{G})$ . در این صورت مجموعه  $\{(h, \xi) f : h \in H\}$  پایه متعامد

یکه برای  $L^2(E)$  است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد

$$; E \sim_T \hat{H} .$$

۲.  $|f(\xi)| = 1$  تقریباً همه جا برای  $\xi \in E$ .

برهان: مشابه لم ۱-۴ در مرجع [۷].

لم ۱۲. فرض کنید  $E \subseteq \hat{G}$  اندازه‌پذیر باشد. در این صورت تساوی  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L^2(A^{*n} E) = L^2(\hat{G})$  برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه  $\{A^{*n} E : n \in \mathbb{Z}\}$  افزار اندازه‌پذیری از  $\hat{G}$  به هنگ مجموعه‌های صفر باشد.

برهان: فرض کنید اتساع‌های  $E$  تشکیل افزاری از  $\hat{G}$  به هنگ مجموعه‌های صفر باشد. در این صورت بدیهی است که فضاهای  $L^2(A^{*k} E)$  و  $L^2(A^{*n} E)$  متعامدند هرگاه  $n \neq k$ . اگر  $f \in L^2(\hat{G})$  باشد، آن‌گاه با توجه به این که اتساع‌های  $E$  مجموعه  $\hat{G}$  را می‌پوشاند،  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f \chi_{A^{*n} E}$  است از این‌رو، جمع مستقیم آنها تمام  $L^2(\hat{G})$  است.

حال فرض کنید  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L^2(A^{*n} E) = L^2(\hat{G})$ . برای مقادیر صحیح  $n$  و  $k$  که  $n \neq k$  است اگر اندازه غیرصفر داشته باشد، آن‌گاه با انتخاب مجموعه  $F$  زیر مجموعه با اندازه متناهی و ناصفر، تابع  $A^{*n} E \cap A^{*k} E$  مشخصه در هر دو  $L^2(A^{*k} E)$  و  $L^2(A^{*n} E)$  وجود دارد که با فرض مجرا بودن  $L^2(A^{*n} E)$  و  $L^2(A^{*k} E)$  در تنافق است.

در قضیه بعد مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده مشخص می‌شود.

قضیه ۱۳. فرض کنید مجموعه  $W \subseteq \hat{G}$  اندازه‌پذیر باشد. در این صورت  $W$  مجموعه موجک است اگر و تنها اگر این شرایط برقرار باشد:

۱. مجموعه  $W$  هم ارز انتقال  $\hat{H}$  است؛

۲. خانواده  $\{A^{*n} W : n \in \mathbb{Z}\}$  افزاری از  $\hat{G}$  است.

برهان: اگر  $W$  مجموعه موجک باشد، بنا به تعریف مجموعه‌های موجک، مجموعه  $\{(h, \xi) \chi_W(\xi) : h \in H\}$  متعامد یکه است. بنابراین بنا به لم ۱۰ مجموعه  $W$  هم ارز انتقال  $\hat{H}$  است. در حقیقت  $\hat{W}_0 = L^2(W)$ . بعلاوه

$$L^2(G) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{D}^n \hat{W}_0 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L^2(A^{*n} W).$$

در نتیجه لم ۳-۶ شرط (۲) را ثابت می‌کند.

حال فرض کنید  $W$  هم ارز انتقال  $\hat{H}$  باشد. در نتیجه بنا به لم ۳-۵ تابع  ${}_W$  انتقال‌های متعامد یکه دارد. بعلاوه،

$$\overline{\text{span}}\{(h, \xi) \hat{\chi}_W(\xi) : h \in H\} = L^2(W).$$

واضح است  $(\hat{D}^n \hat{T}_n \psi_W)(L^2(W)) = L^2(A^{*n} W)$  و شامل  $\hat{D}^n \hat{T}_n \psi_W$  می‌باشد. بنا به لم ۱۲ این زیر فضاها متعامندند و جمع مستقیم آنها برابر با  $L^2(\hat{G})$  است. بنابراین انتقال‌ها و اتساع‌های  $\psi_W$  متعامد یکه بوده است و تشکیل پایه کامل می‌دهند. از این رو  $W$  مجموعه موجک است.

حال از لم ۱۴ کمک می‌گیریم تا مجموعه‌های موجک را به صورتی دیگر مشخص کنیم.

لم ۱۴. فرض کنید مجموعه  $E \subseteq \hat{G}$  اندازه‌پذیر باشد. مجموعه  $\{A^{*n} E : n \in \mathbb{Z}\}$  افزار اندازه‌پذیری از  $\hat{G}$  به هنگ مجموعه‌های صفر است اگر و تنها اگر  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) = 1$  تقریباً همه جا  $\xi \in \hat{G}$ .

برهان: اگر  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) = 1$  در نتیجه  $\xi \in (A^*)^{-n} E$ . از این رو اتساع‌های  $E$  مجموعه  $\hat{G}$  را می‌پوشانند.

اگر برای  $n \neq k$  مجموعه  $A^{*n} E \cap A^{*k} E = F$  اندازه نا صفر داشته باشد، آن‌گاه  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) = 2$  تقریباً همه جا  $\xi \in F$  که با فرض در تناقض است. بنابراین  $\{A^{*n} E : n \in \mathbb{Z}\}$  افزار اندازه‌پذیری از  $\hat{G}$  است.

حال فرض کنید مجموعه  $\{A^{*n} E : n \in \mathbb{Z}\}$  افزار اندازه‌پذیری از  $\hat{G}$  باشد از این رو برای هر  $\xi \in \hat{G}$  وجود دارد  $k \in \mathbb{Z}$  به طوری که  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) > k$ . بنابراین  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) \geq k$  حداقل یک است. اگر  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) < k$  بزرگ‌تر از یک باشد، آن‌گاه  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) < k$  موجود است به طوری که  $n \neq k$  بوده است و اندازه  $A^{*n} E \cap A^{*k} E = F$  ناصفر باشد. اما این با افزار مجموعه  $\{A^{*n} E : n \in \mathbb{Z}\}$  در تناقض است.

در قضیه ۱۵ مجموعه‌های موجک مشخص شده‌اند. در حقیقت این قضیه صورت دیگری از قضیه ۱۳ است.

قضیه ۱۵. فرض کنید مجموعه  $E \subseteq \hat{G}$  اندازه‌پذیر باشد. در این صورت  $W$  مجموعه موجک است اگر و تنها اگر این شرایط برقرار باشد:

$$\sum_{\eta \in H^\perp} \chi_E(\xi + \eta) = 1.1$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(A^{*n} \xi) = 1.2$$

برهان: بنا به قضیه ۱۳ و لم ۱۴.

قضیه ۱۶ موجک‌های فرکانسی با محمل مینیمال را که دارای ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز هستند، مشخص می‌کند.

قضیه ۱۶. فرض کنید تابع  $\psi_W$  موجک فرکانسی با محمل مینیمال باشد. در این صورت  $\psi_W$  موجک با ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز است اگر و تنها اگر مجموعه  $E = \bigcup_{j < 0} A^{*j} W$  هم ارز انتقال  $\hat{H}$  باشد.

برهان: موجک  $\psi_W$  یک موجک با ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز است اگر و تنها اگر تابع مقیاس  $(\varphi \in L^2(G))$  موجود باشد به طوری که مجموعه  $\{T_h \varphi : h \in H\}$  تشکیل یک پایه متعامد یکه برای  $V_0$  دهد یا به طور همارز  $\{\overline{(h, \xi)} \varphi(\xi) : h \in H\}$  تشکیل پایه متعامد یکه برای  $V_0 = L^2(E)$  دهد. بنا به لم ۱۰ این همارز است با این که مجموعه  $E$  هم ارز انتقال  $\hat{H}$  باشد.

با توجه به قسمت ۱ از قضیه ۱۳، اگر  $E$  و  $F$  دو مجموعه موجک باشند، آن‌گاه  $E$  و  $F$  هم‌ارز انتقال هستند. بنابراین نگاشت  $\sigma: E \rightarrow F$  موجود است به‌طوری‌که  $\eta \in H^\perp$  برای  $\sigma(x) - x = \eta$ . حال به بررسی این نگاشت، تعمیم و خواص آن می‌پردازیم.

**گزاره ۱۷.** اگر  $E$  و  $F$  دو مجموعه موجک باشند، آن‌گاه نگاشت  $\sigma$  که در بالا تعریف شده است را می‌توان به نگاشتی اندازه‌پذیر، یک به یک و پوشانه از  $\hat{G}$  به روی خودش تعمیم داد.

**برهان:** بنا به قسمت ۲ از قضیه ۱۳ خانواده  $\{A^{*n}E : n \in \mathbb{Z}\}$  افزایی از  $\hat{G}$  است. از این‌رو برای هر  $\xi \in \hat{G}$  عضو  $e \in E$  وجود دارد به‌طوری‌که  $\xi = A^{*j}e$ . تعریف می‌کنیم  $\sigma(\xi) = A^{*j}\sigma(e) = A^{*j}\sigma(A^{*-j}\xi) = \sigma(A^{*-n}\xi)$ . در این صورت  $\sigma$  نگاشتی از  $\hat{G}$  است که اتساع‌های  $E$  را به اتساع‌های  $F$  منتقل می‌کند. در حقیقت اگر  $\xi \in A^{*n}E$ ، آن‌گاه  $\xi \in E$ . با توجه به این‌که  $\sigma(\xi) = A^{*n}\sigma(A^{*-n}\xi) \in F$  و  $\sigma(A^{*-n}\xi) \in F$  داریم  $A^{*n}F$ . چون  $\sigma$  نگاشتی از  $E$  به روی  $F$  است، از این‌رو،  $\sigma$  مجموعه  $A^{*n}E \subset A^{*n}F$  تصویر می‌کند. این نشان می‌دهد که  $\sigma$  یک به یک و پوشانه است.

حال نشان می‌دهیم  $\sigma$  اندازه‌پذیر است. بدیهی است که  $\sigma$  روی  $E$  اندازه‌پذیر است. بنابراین روی  $A^{*n}E$  نیز  $\sigma(H \cap A^{*n}E) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (H \cap A^{*n}E)$  داریم  $H \subseteq \hat{G}$  اندازه‌پذیر است و از این‌رو،  $\sigma(H)$  نیز اندازه‌پذیر است.

نگاشت  $\sigma: \hat{G} \rightarrow \hat{G}$  که در گزاره ۱۷ تعریف شد را نگاشت مجموعه‌های موجک  $E$  و  $F$  گویند.

**گزاره ۱۸.** فرض کنید  $E$  و  $F$  مجموعه‌های موجک و  $\sigma$  نگاشت مجموعه‌های موجک  $E$  و  $F$  باشد. در این صورت نگاشت  $\sigma$  اندازه‌پایا و  $A^*$ -همگن است.

**برهان:** ابتدا نشان می‌دهیم  $\sigma$  اندازه‌پایا است. در حقیقت  $\sigma$  اندازه‌پایا از  $F$  به  $E$  است، چون  $E$  و  $F$  انتقال‌هایی از یکدیگرند. هم‌چنین  $\sigma$  روی اتساع‌های  $E$  نیز اندازه‌پایا است. فرض کنید  $M \subseteq A^{*n}E$ ، در این صورت  $\sigma(M) = A^{*n}\sigma(A^{*-n}M) \subseteq A^{*n}M$ . چون  $A^{*n}M \subseteq E$  از این‌رو، اندازه  $\sigma(A^{*n}M)$  با اندازه  $A^{*n}M$  برابر است. پس  $\sigma(A^{*n}M)$  دارای اندازه یکسانی با  $A^{*n}M$  است. در نتیجه  $\sigma$  اندازه‌پایا است. حال نشان می‌دهیم  $\sigma$  نگاشتی  $A^*$ -همگن است یعنی  $\sigma(A^*\xi) = A^*\sigma(\xi)$  برای هر  $\xi \in \hat{G}$ . اگر  $\xi \in A^{*n}E$  باشد، آن‌گاه  $\sigma(A^*\xi) \in A^{*(n+1)}F$  و  $A^*\sigma(\xi) \in A^{*(n+1)}F$  اما  $\sigma(\xi) \in A^{*n}F$  از این‌رو،  $\sigma(A^*\xi) = A^*\sigma(\xi)$ . چون  $\sigma$  نگاشتی یک به یک و پوشانه است از این‌رو  $\sigma(A^*\xi) = A^*\sigma(\xi)$ .

### مجموعه‌های مقیاس تعمیم یافته روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده

در این بخش مجموعه مقیاس تعمیم یافته و تابع بعد روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده تعریف می‌شود. سپس با استفاده از تابع بعد و مجموعه مقیاس تعمیم یافته مجموعه‌های موجک روی گروه‌های آبلی موضع‌آ فشرده را تعیین می‌شوند.

چنان‌که قبل نشان داده شد ( $E = \bigcup_{j < 0} A^*W$  جایی که  $W = A^*E \setminus E$  مشابه [۵]، ما

تعریف ۱۹ را ارائه می‌کنیم).

**تعريف ۱۹.** مجموعه اندازه‌پذیر  $E \subseteq \hat{G}$  مجموعه مقیاس تعمیم یافته متناظر با اتساع  $A$  گوییم هرگاه و  $|E| = \frac{1}{q-1} \cdot q = |A| \cdot E \setminus E^*$  مجموعه موجک باشد جایی که  $|A|$

با استفاده از گزاره ۲۰ می‌توان تعریف معادلی برای مجموعه مقیاس تعمیم یافته بدین صورت بیان کرد:

**گزاره ۲۰.** مجموعه اندازه‌پذیر  $E \subseteq \hat{G}$  مجموعه مقیاس تعمیم یافته است اگر و تنها اگر برای مجموعه موجک  $W$  داشته باشیم  $E = \bigcup_{j<0} A^{*j} W$ .

**برهان:** فرض کنید  $W$  مجموعه موجک باشد و  $E = \bigcup_{j<0} A^{*j} W$ . بنا به قضیه ۱۳ این اجتماع مجزا است و در نتیجه

$$|E| = \frac{1}{q-1} \cdot W = A^* E \setminus E.$$

برای اثبات طرف دیگر مجموعه  $A^* E \setminus E$  را با  $W$  نشان می‌دهیم. چون  $|W| = 1$  و  $E \subseteq A^* E$  پس  $\bigcup_{j<0} A^{*j} W \subseteq E$  اما با توجه به این که هر دو این مجموعه‌ها اندازه مساوی دارند، از این‌رو، تقریباً همه جا با یکدیگر برابرند.

حال به تعریف تابع بعد روی گروه‌های آبلی موضع‌آفسرده می‌پردازیم که تعمیمی از تابع بعد موجک در حالت اقلیدسی است [۵].

**تعريف ۲۱.** فرض کنید  $f \in L^2(G)$ . در این صورت تابع بعد روی  $\hat{G}$  بدین‌هود صورت تعریف می‌کنیم:

$$D_f(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*j}(\xi + \eta)) \right|^2.$$

**گزاره ۲۲.** برای هر  $f \in L^2(G)$  تابع بعد  $D_f$  تقریباً همه جا روی  $\hat{G}$  متناهی است و

$$\|D_f\|_{L^1(\hat{H})} = \frac{1}{|A|-1} \|f\|_{L^2(G)}^2.$$

**برهان:** بنا به قضیه پلانشر و فرمول وایل داریم

$$\|D_f\|_{L^1(\hat{H})} = \int_{\hat{H}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*j}(\xi + \eta)) \right|^2 d\xi$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\hat{H}} \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*j}(\xi + \eta)) \right|^2 d\xi$$

با تغییر متغیر  $\xi + \eta = w$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\hat{G}} \left| \hat{f}(A^{*j}w) \right|^2 dw$$

با تغییر متغیر  $w = A^{*j}w$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |A^*|^j \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{|A|-1} \|f\|_{L^2(G)}^2.$$

**تعریف ۲۳.** فرض کنید  $f \in L^2(G)$  و  $D_f$  تابع بعد باشد. در این صورت تابع بعد  $D_f$  در معادله توافقی صدق می‌کند هرگاه

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*j}(\xi + \eta)) \right|^2 = D_f(\xi) + 1. \quad (1-4)$$

**قضیه ۲۴.** فرض کنید  $f \in L^2(G)$ . در این صورت تابع بعد  $D_f$  در معادله توافقی صدق می‌کند اگر و تنها اگر انتقال‌های تابع  $f$  متعامد یکه باشند.

**برهان:** سمت چپ معادله (۱-۴) را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*j}(\xi + \eta)) \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*j}(\xi + \eta)) \right|^2 + \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*0}(\xi + \eta)) \right|^2 \\ &= D_f(\xi) + \sum_{\eta \in H^\perp} \left| \hat{f}(A^{*0}(\xi + \eta)) \right|^2. \end{aligned}$$

بنابراین تابع بعد  $D_f$  در معادله توافقی صدق می‌کند اگر و تنها اگر  $\sum_{\eta \in H^\perp} |\hat{f}(\xi + \eta)|^2 = 1$ . حال بنا به لم ۶

مجموعه  $\{T_h f : h \in H\}$  متعامد یکه است. در نتیجه قضیه اثبات می‌شود.

با استفاده از تعریف تابع بعد و قضیه ۲۴ می‌توان نتیجه ۲۵ را به دست آورد.

**نتیجه ۲۵.** اگر  $\psi_W$  موجک فرکانسی با محمل مینیمال و  $E = \bigcup_{j<0} A^{*j}W$ ، آن‌گاه تابع بعد  $D_{\psi_W}$  برابر است با

$$D_{\psi_W}(\xi) = \sum_{\eta \in H^\perp} \chi_E(\xi + \eta).$$

به علاوه، تابع  $D_{\psi_W}$  در معادله توافقی صدق می‌کند اگر و تنها اگر  $\sum_{\eta \in H^\perp} \chi_E(\xi + \eta) = 1$ .

بونیک و همکاران [۵] مجموعه‌های مقیاس تعییم یافته روی مجموعه‌های اقلیدسی  $n$  بعدی را مشخص کردند. در اینجا مجموعه‌های مقیاس تعییم یافته روی گروه‌های آبلی و موضع‌آفسرده بررسی می‌شود.

**قضیه ۲۶.** مجموعه اندازه‌پذیر  $\hat{G} \subseteq E$  مجموعه مقیاس تعییم یافته متناظر با اتساع  $A$  است اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{1}{|A|-1} . \quad ۱ \\ E &\subseteq A^*E . \quad ۲ \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_E(A^{*-n}\xi) = 1 . \quad ۳$$

$$\text{تابع } m(\xi) = \sum_{\eta \in H^\perp} \chi_E(\xi + \eta) \text{ در معادله توافقی صدق می‌کند.} . \quad ۴$$

**برهان:** ابتدا ثابت می‌کنیم شرایط ۱ تا ۴ لازم هستند. شرط ۱ بنا به تعریف برقرار است. شرط ۲ از اثبات گزاره ۲۰ به دست می‌آید. به علاوه از آن‌جایه  $E = \bigcup_{j<0} A^{*j}W$  برای مجموعه موجک  $W$  می‌توان نوشت

$$\chi_E(A^{*-n}\xi) = \sum_{j=-n+1}^{\infty} \chi_W(A^{*j}\xi)$$

نتیجه ۳ نیز برقرار خواهد بود. هم‌چنین شرط ۴ بنا به لم و قضیه ۱۵ برقرار است.

حال بر عکس تعریف کنید  $W = A^*E \setminus E$ . بر احتی مشاهده می‌شود که  $A^{*j}W$  برای هر  $j \in \mathbb{Z}$  مجاز است. در حقیقت،  $W \subseteq A^{*j}E$ . حال بنا به شرط ۲  $A^{*j}W = A^{*(j+1)}E \setminus A^{*j}E$  که نتیجه می‌دهد  $W \cap A^{*j}W = \emptyset$ . با همین روش  $A^{*j}W \cap A^{*k}W = \emptyset$  برای  $j, k \in \mathbb{Z}$ . حال نشان می‌دهیم که  $E = \bigcup_{j<0} A^{*j}W$  زیر مجموعه  $E$  است اما

این دو مجموعه دارای اندازه یکسان هستند و در نتیجه تقریباً همه جا برابرند. این نشان می‌دهد که

$$\chi_E(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_W(A^{*j}\xi).$$

در نتیجه شرط ۲ از قضیه ۱۵ نیز برقرار است. با استفاده از شرط ۴ و لم ۸ مشاهده می‌شود که شرط ۱ قضیه ۱۵ نیز برقرار است بنابراین  $W$  مجموعه موجک است.

مثال ۲۷. فرض کنید  $G$  گروه دوتایی کانتور باشد. با توجه به مفاهیم مثل ۵ مجموعه  $W = D_1 \setminus D$  مجموعه موجک است که آن را موجک شانون گوییم. در حقیقت مجموعه  $\{A^j W : j \in \mathbb{Z}\}$  افزایی از  $G$  است. هم‌چنین  $D = W \oplus \hat{H}$  یعنی  $W$  هم ارز انتقال از  $\hat{H}$  است.

## تشکر و قدردانی

از دکتر مسعود امینی برای راهنمایی‌ها و توصیه‌های ارزشمندشان که به ارتقا مقاله کمک کرده است، سپاسگزاری می‌کنیم.

## منابع

1. Benedetto J. J., Benedetto R. L., "A wavelet theory for local fields and related groups", J. Geom. Anal. 14 (2004) 423-456.
2. Benedetto J. J., Benedetto R. L., "The construction of Wavelet sets, Wavelets and Multiscale Analysis", (2011) 17-56.
3. Benedetto J. J., Li S., "The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks", Appl. Comput. Harmon. Anal. 5 (1998) 389-427.
4. Baggett L., Medina H., Merrill K., "Generalized multiresolution analyses and a construction procedure for all wavelet sets in  $R^n$ ", J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999) 563-573.
5. Bownik M., Rzeszotnik Z., Speegle P., "A characterization of dimension function of wavelets", J. Applied and Computational Harmonic Anal., 10 (2001) 71-92.
6. Daubechies I., "Ten Lectures on Wavelets, American Mathematical Society", Providence, RI, (1992).

7. Dai X., Larson D. R., "Wandering vectors for unitary systems and orthogonal wavelets", *Mem. Amer. Math. Soc.* 134, No. 640 (1998).
8. Folland G. B., "A course in abstract harmonic analysis", CRC Press (1995).
9. Fang X., Wang X., "Construction of minimally supported frequency wavelets", *J. Fourier Anal. Appl.*, 2 (1996) 315-327.
10. Hewitt E., Ross K. A., "Abstract harmonic analysis", Vol. 1 Springer, Berlin (1963).
11. Kanuith E., Kutyniok G., "Zeros or the Zak Transform on Locally Compact Abelian Groups", American Mathematical Society, vol.126, num. 12 (1998) 3561-3569.
12. Kamyabi Gol R. A., Tousi R. R., "The structure of shift invariant spaces on a locally compact abelian group", *J. Math. Anal. Appl.* 340, (2008) 219-225.
13. Kamyabi Gol A., Tousi R. R., "Some equivalent multiresolution conditions on locally compact abelian groups, Proc", *Indian Acad. Sci.*, 120 (2010) 317-331.
14. Lang W. C., "Wavelet analysis on the Cantor dyadic group", *Houston J. Math.*, 24 (1998) 533-544.
15. Rudin W., "Fourier Analysis on Groups", John Wiley (1962).