

## در مورد سرشت‌های تحویل‌ناپذیر سه‌تایی‌های کامینا

جواد باقریان

دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۶/۲۰

پذیرش ۹۷/۰۹/۰۳

### چکیده

شرط سه‌تایی کامینا تعمیمی از شرط کامینا در نظریه گروه‌های متناهی است. سرشت‌های تحویل‌ناپذیر سه‌تایی‌های کامینا در حالت‌های خاص بررسی شده‌اند. در این مقاله در حالت کلی یک سه‌تایی کامینا  $(G, M, N)$  را در نظر گرفته و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G$  را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $M$  و  $G/N$  ارائه می‌دهیم. **واژه‌های کلیدی:** گروه متناهی، سرشت، سه‌تایی کامینا

### مقدمه

فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد. گروه  $G$  را دارای خاصیت سه‌تایی کامینا<sup>۱</sup> گویند هر گاه زیرگروه‌های نرمال  $M$  و  $N$  از  $G$  که  $N \leq M$  وجود داشته باشند به طوری که به‌ازای هر  $g \in G \setminus M$ ، کلاس تزویج  $g$  در  $G$  برابر  $gN$  باشد. در این حالت  $(G, M, N)$  را یک سه‌تایی کامینا گوئیم [۸]. در حالت خاص که  $M = N = G'$ ، گروه  $G$  را یک گروه کامینا<sup>۲</sup> گویند. این نشان می‌دهد که شرط سه‌تایی کامینا تعمیمی از شرط کامینا در گروه‌ها است. ویژگی‌های گروه‌هایی با خاصیت سه‌تایی کامینا در حالت‌های خاص در چندین مقاله بررسی شده‌اند. در [۱۰] سه‌تایی کامینا  $(G, Z(G), G')$  بررسی شده است و یک مشخصه‌سازی از این گروه‌ها بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیرشان داده شده است. در واقع سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آنها بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G/G'$  و  $Z(G)$  تعیین شده است. هم‌چنین ویژگی‌های سه‌تایی‌های کامینای  $(G, Z(G), G')$  که گروه‌های کامینای تعمیم یافته<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند، در [۹] بررسی شده‌اند. سرشت‌های تحویل‌ناپذیر این گروه‌ها نیز بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G/G'$  و  $Z(G)$  قابل تعیین هستند. در این مقاله در حالت کلی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک سه‌تایی کامینای  $(G, M, N)$  را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G/N$  و  $M$  تعیین می‌کنیم. برای این منظور از نظریه جبری اسکیم‌های شرکت‌پذیر<sup>۴</sup> استفاده می‌کنیم.

اسکیم‌های شرکت‌پذیر از نظر جبری تعمیمی از گروه‌های متناهی هستند و بسیاری از نتایج نظریه گروه‌ها مانند قضایای سیلو، قضیه کلیفورد در نمایش گروه‌ها، قضیه شور-زازه‌هاوس و قضیه  $p^\alpha q^\beta$ -برنساید به نوعی برای اسکیم‌های شرکت‌پذیر تعمیم داده شده‌اند [۱]، [۴]، [۵]، [۶]. در بخش اول این مقاله، ابتدا تعاریف و نتایج از

bagherian@sci.ui.ac.ir

\*نویسنده مسئول

1. Camina triple  
2. Camina group  
3. Generalized Camina group  
4. Association schemes

اسکیم‌های شرکت‌پذیر که در بخش دوم این مقاله برای اثبات نتایج اصلی به آنها نیاز داریم، به‌طور مختصر بیان می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای مطالعه کامل‌تر این تعاریف و نتایج به [۲]، [۳]، [۱۱] و [۱۲] مراجعه کند.

### اسکیم‌های شرکت‌پذیر

فرض کنید  $X$  یک مجموعه متناهی و  $S = \{R_i\}_{0 \leq i \leq d}$  یک افراز از  $X \times X$  باشد. در این صورت زوج  $(X, S)$  را یک اسکیم شرکت‌پذیر گوییم هر گاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$(1) R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

(۲) به‌ازای هر  $0 \leq i \leq d$  یک  $0 \leq i' \leq d$  موجود باشد به‌طوری‌که

$$R_i^t = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_i\} = R_{i'}$$

(۳) به‌ازای هر  $0 \leq i, j, k \leq d$  و  $(x, y) \in R_k$ ، اندازهٔ مجموعه

$$\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}$$

به انتخاب  $(x, y) \in R_k$  بستگی نداشته باشد. در این حالت اندازهٔ مجموعه مذکور را با  $\lambda_{ijk}$  نمایش می‌دهیم.

فرض کنید  $(X, S)$  یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد. به‌ازای هر  $0 \leq i \leq d$ ، عدد  $\lambda_{i0}$  را ظرفیت  $R_i$  گوییم و آن را با  $n_i$  نمایش می‌دهیم و برای یک زیرمجموعه  $H \subseteq S$  قرار می‌دهیم

$$n_H = \sum_{R_i \in H} n_i.$$

اسکیم شرکت‌پذیر  $(X, S)$  را جابه‌جایی گوییم هر گاه به‌ازای هر  $0 \leq i, j, k \leq d$  داشته باشیم  $\lambda_{ijk} = \lambda_{jik}$ . به‌ازای هر  $R_i, R_j \in S$ ، ضرب  $R_i R_j$  بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$R_i R_j = \{R_k \mid \lambda_{ijk} \neq 0\},$$

و همچنین به‌ازای هر دو زیرمجموعه  $H$  و  $T$  از  $S$ ، قرار می‌دهیم

$$HT = \bigcup_{\substack{R_i \in H \\ R_j \in T}} R_i R_j.$$

یک زیرمجموعه  $H$  از  $S$  را یک زیرمجموعه بسته<sup>۲</sup> از  $S$  گوییم هر گاه  $HH \subseteq H$ .

فرض کنید  $(X, S)$  یک اسکیم شرکت‌پذیر و  $H$  یک زیرمجموعه بسته از  $S$  باشد. به‌ازای عنصر دلخواه  $x \in X$

قرار دهید  $xH = \{y \in X \mid (x, y) \in H\}$ . همچنین به‌ازای هر رابطه  $R_i$  از  $S$  داریم  $(R_i)_H = R_i \cap xH \times xH$ .

در این‌صورت بنا بر قضیه ۲، ۱، ۸، از [۱۲]، زوج  $(xH, S_H)$  که در آن  $S_H = \{(R_i)_H \mid R_i \in S\}$  یک اسکیم شرکت‌پذیر است که به آن یک زیراسکیم<sup>۳</sup> روی  $xH$  گویند.

**مثال ۱:** فرض کنید  $G = \{g_0, \dots, g_n\}$  یک گروه متناهی باشد. به‌ازای هر  $0 \leq i \leq n$ ، قرار دهید

$$R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y = g_i\}.$$

1. Valency  
2. Closed subset  
3. Subscheme

در این صورت به راحتی دیده می‌شود که  $(G, \{R_i\}_{0 \leq i \leq n})$  یک اسکیم شرکت‌پذیر است به طوری که به ازای هر  $0 \leq i, j, k \leq n$  داریم  $\lambda_{ijk} = 1$  هرگاه  $g_i g_j = g_k$  و در غیر این صورت  $\lambda_{ijk} = 0$ . هم‌چنین زیرمجموعه‌های بسته این اسکیم شرکت‌پذیر در تناظر یک به یک و پوشا با زیرگروه‌های  $G$  هستند.

فرض کنید  $(X, S)$  و  $(Y, T)$  دو اسکیم شرکت‌پذیر باشند. گوییم  $(Y, T)$  یک فیوژن<sup>۱</sup>  $(X, S)$  است هرگاه هر رابطه در  $T$  اجتماعی از تعدادی رابطه در  $S$  باشد. در این حالت می‌نویسیم  $T \subseteq S$ .

**مثال ۲:** فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $Cl_G(g_0), \dots, Cl_G(g_h)$  کلاس‌های تزویج  $G$  باشند. به ازای هر  $0 \leq i \leq h$  قرار دهید

$$R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in Cl_G(g_i)\}.$$

در این صورت دیده می‌شود که  $(G, S)$  که  $S = \{R_i\}_{0 \leq i \leq h}$  یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی است که به آن اسکیم شرکت‌پذیر گروهی<sup>۲</sup> روی  $G$  گویند [۲]. هم‌چنین به ازای هر  $i$ ،  $n_i = |\{z \in G \mid xz^{-1} \in Cl_G(g_i)\}| = |Cl_G(g_i)|$  که در آن  $x \in G$  یک عنصر دلخواه است. زیرا هر زیرگروه نرمال در  $G$  اجتماع تعدادی از کلاس‌های تزویج  $G$  است، زیرمجموعه‌های بسته  $S$  در تناظر یک به یک و پوشا با زیرگروه‌های نرمال  $G$  هستند.

به علاوه فرض کنید  $M \leq G$  با تغییر اندیس‌گذاری در صورت لزوم فرض کنید  $M = \bigcup_{i=0}^t Cl_G(g_i)$ . به ازای هر  $0 \leq i \leq t$  قرار دهید

$$T_i = \{(x, y) \in M \times M \mid xy^{-1} \in Cl_G(g_i)\}.$$

از طرف دیگر، فرض کنید  $M = \bigcup_{i=0}^r Cl_M(m_i)$ . به ازای هر  $i$ ، قرار می‌دهیم:

$$R_i = \{(x, y) \in M \times M \mid xy^{-1} \in Cl_M(m_i)\}.$$

در این صورت چون هر رابطه  $T_i$  اجتماع تعدادی از رابطه‌های  $R_0, \dots, R_r$  است، اسکیم شرکت‌پذیر  $(M, \{T_i\}_{0 \leq i \leq t})$  یک فیوژن از اسکیم شرکت‌پذیر  $(M, \{R_i\}_{0 \leq i \leq r})$  است.

فرض کنید  $(X, S)$  یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد. به ازای هر  $R \in S$ ، ماتریس مجاورت<sup>۳</sup>  $R$  که آن را با  $A(R)$  نمایش می‌دهیم برابر ماتریسی  $|X| \times |X|$  است که سطرها و ستون‌های آن با  $X$  اندیس‌گذاری شده است به طوری که به ازای هر  $x, y \in X$

$$A(R)_{xy} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R. \\ 0, & (x, y) \notin R. \end{cases}$$

قرار می‌دهیم  $\mathcal{CS} = \bigoplus_{R \in S} CA(R)$ . در این صورت  $\mathcal{CS}$  یک جبر شرکت‌پذیر یک‌دار با پایه  $\{A(R) \mid R \in S\}$  است.

به‌ویژه  $\mathcal{CS}$  یک جبر نیم ساده نیز است که به آن جبر مجاورت<sup>۴</sup> اسکیم  $(X, S)$  گویند [۱۱]. هم‌چنین اگر  $H \subseteq S$  یک زیرمجموعه بسته باشد آن‌گاه بنابر قضیه ۱.۵.۱ از [۱۱] جبر مجاورت زیر اسکیم  $(XH, S_H)$  یک‌ریخت با  $CH = \bigoplus_{R \in H} CA(R)$  است. مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر جبر  $\mathcal{CS}$  را با  $Irr(S)$  نمایش می‌دهیم. نگاشت

$\Gamma: \mathcal{CS} \rightarrow Mat_x(\mathbb{C})$  که  $\Gamma(A(R)) = A(R)$ ، یک نمایش از  $\mathcal{CS}$  است. (در این جا منظور از  $Mat_x(\mathbb{C})$ ، مجموعه

1. Fusion  
2. Group association scheme  
3. Adjacency matrix  
4. Adjacency algebra

تمام ماتریس‌های  $|X| \times |X|$  است که سطرها و ستون‌های آنها با عناصر  $X$  اندیس‌گذاری شده است و درایه‌های آنها در  $\mathbb{C}$  هستند. فرض کنید  $\gamma$  سرشت متناظر با نمایش  $\Gamma$  باشد. به علاوه فرض کنید  $\gamma = \sum_{\chi \in \text{Irr}(S)} m_\chi \chi$  که  $m_\chi \in \mathbb{C}$

در این صورت به  $m_\chi$  ها، ضرایب استاندارد<sup>۱</sup>  $(X, S)$  گویند. زیرا  $\gamma(A(R_0)) = |X|$  همواره داریم:

$$|X| = \sum_{\chi \in \text{Irr}(S)} m_\chi \chi(A(R_0)). \quad (1)$$

فرض کنید  $(X, S)$  یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد که  $S = \{R_i\}_{0 \leq i \leq d}$  و  $H$  یک زیرمجموعه بسته از  $S$  باشد. به ازای هر دو سرشت  $\chi$  و  $\psi$  از  $\mathbb{C}H$  ضرب داخلی  $\chi$  و  $\psi$  که آن را با  $[\chi, \psi]$  نمایش می‌دهند، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$[\chi, \psi] = \frac{1}{n_H} \sum_{R_i \in H} \frac{\chi(A_i) \overline{\psi(A_i)}}{n_i}, \quad (2)$$

که در آن  $A_i = A(R_i)$  و  $\overline{\psi(A_i)}$  مزدوج مختلط  $\psi(A_i)$  است. بنابر اولین رابطه تعامد در مورد سرشت‌های اسکیم‌های شرکت‌پذیر قضیه ۴.۱.۵ در [۱۱]، اگر  $\chi, \psi \in \text{Irr}(S)$  آن گاه

$$[\chi, \psi] = \delta_{\chi, \psi} \frac{\chi(1)}{m_\chi}. \quad (3)$$

بنابراین سرشت  $\chi$  از  $\mathbb{C}S$  تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر  $[\chi, \chi] = \frac{\chi(1)}{m_\chi}$ . توجه کنید در حالی که

$(X, S) = (G, \{R_i\}_{0 \leq i \leq n})$  اسکیم شرکت‌پذیر ارائه شده در مثال ۱ باشد، ضرب داخلی معرفی شده در بالا همان ضرب داخلی سرشت‌ها در گروه‌ها (تعریف ۲.۱۶ در [۷]) است. زیرا در این حالت  $\text{Irr}(S) = \text{Irr}(G)$  و نمایش  $\Gamma$  همان نمایش منظم ضرب از راست از  $G$  است، از این رو، بنابر لم ۲.۱۱ در [۷]، به‌ازای هر  $\chi \in \text{Irr}(G)$  داریم  $m_\chi = \chi(1)$ . در نتیجه در این حالت ضرب داخلی ارائه شده در (۱) به صورت  $[\chi, \psi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}$  است. بنابراین سرشت  $\chi$  تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر  $[\chi, \chi] = 1$ .

فرض کنید  $\chi$  یک سرشت از  $\mathbb{C}S$  باشد. فرض کنید  $\chi_H$  تحدید سرشت  $\chi$  از  $\mathbb{C}S$  به زیر جبر  $\mathbb{C}H$  باشد. در این صورت بنابر رابطه (۲) داریم:

$$n_H [\chi_H, \chi_H] = \sum_{R_i \in H} \frac{\chi(A_i) \overline{\chi(A_i)}}{n_i} \leq \sum_{R_i \in S} \frac{\chi(A_i) \overline{\chi(A_i)}}{n_i} = n_S [\chi, \chi].$$

از این رو

$$[\chi_H, \chi_H] \leq \frac{n_S}{n_H} [\chi, \chi]. \quad (4)$$

به‌وضوح در (۴) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $\chi(A_i) = 0$  به‌ازای هر  $R_i \in S \setminus H$ .

لم ۳: فرض کنید  $(X, S)$  یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی و  $H$  یک زیرمجموعه بسته از  $S$  باشد. فرض کنید

$\chi \in \text{Irr}(S)$  به‌طوری که  $\chi(A(R)) = 0$  به‌ازای هر  $R \in S \setminus H$ . اگر  $\psi = \chi_H \in \text{Irr}(H)$  آن گاه  $m_\chi = \frac{n_S}{n_H} m_\psi$ .

1. Standard multiplicities

اثبات: چون  $\chi(A(R))=0$  به‌ازای هر  $R \in S \setminus H$ ، طبق رابطه (۴)  $[\chi_H, \chi_H] = \frac{n_S}{n_H} [\chi, \chi]$ ، از این‌رو، بنابر

تساوی (۳) داریم  $\frac{\psi(1)}{m_\psi} = \frac{n_S}{n_H} \frac{\chi(1)}{m_\chi}$ . حال چون  $\mathbb{C}S$  یک جبر جابه‌جایی است داریم  $\chi(1) = \psi(1) = 1$  و در

$$\text{نتیجه } m_\chi = \frac{n_S}{n_H} m_\psi$$

**مثال ۴:** فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی و  $C=(G, S)$  اسکیم شرکت‌پذیر گروهی  $G$  باشد. در این‌صورت جبر مجاورت اسکیم شرکت‌پذیر  $C$  با  $Z(CG)$  یک‌ریخت است که در آن  $Z(CG)$  مرکز گروه جبر  $\mathbb{C}G$  است [۲]. بنابراین با توجه به سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $Z(CG)$  (فصل ۳ از [۷]) داریم:

$$\text{Irr}(S) = \{ \omega_\chi \mid \chi \in \text{Irr}(G) \},$$

که در آن

$$\omega_\chi(\overline{\text{Cl}_G(g)}) = \frac{|\text{Cl}_G(g)| \chi(g)}{\chi(1)},$$

که  $\overline{\text{Cl}_G(g)} = \sum_{h \in \text{Cl}_G(g)} h$  هم‌چنین چون  $|G| = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2$ ، بنابر تساوی (۱) داریم  $m_{\omega_\chi} = \chi(1)^2$  [۲، (۷.۱۵)].

فرض کنید  $(X, S)$  یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی باشد. در این‌صورت همه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $\mathbb{C}S$  خطی هستند. فرض کنیم  $S = \{R_i\}_{0 \leq i \leq d}$  و قرار دهید  $A_i = A(R_i)$ . در این‌صورت جدول سرشت اسکیم شرکت‌پذیر  $(X, S)$  برابر یک ماتریس  $(d+1) \times (d+1)$  مانند  $P$  است که درایه  $(i, j)$ -ام آن برابر  $\chi_i(A_j)$  است. در واقع  $P = \{ \chi_i(A_j) \}_{0 \leq i, j \leq d}$ .

**مثال ۵:** فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $T = (\chi_i(g_j))_{0 \leq i, j \leq h}$  جدول سرشت  $G$  باشد. فرض کنید  $(G, S)$  اسکیم شرکت‌پذیر گروهی روی  $G$  و  $P$  جدول سرشت آن باشد. در این‌صورت، بنابر قضیه ۲.۷ از [۲]، این رابطه بین  $P$  و  $T$  وجود دارد:

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{m_{\chi_0}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_{\chi_h}} \end{pmatrix} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{|\text{Cl}_G(g_0)|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{|\text{Cl}_G(g_h)|} \end{pmatrix}.$$

اگر  $(X, T)$  یک فیوژن  $(X, S)$  باشد، آن‌گاه جدول سرشت  $(X, T)$  را می‌توان به‌کمک جدول سرشت  $(X, S)$  به‌دست آورد. برای این منظور از قضیه ۶ که در [۳] آورده شده است، استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۶:** فرض کنید  $C=(X, S)$  یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی باشد و  $P = \{ \chi_i(A_j) \}_{0 \leq i, j \leq d}$  جدول سرشت آن باشد. فرض کنید  $E_0 = \{0\}, E_1, \dots, E_e$  یک افراز از  $\{0, 1, \dots, d\}$  باشد. قرار دهید  $\bar{R}_\alpha = \bigcup_{i \in E_\alpha} R_i$ . در این‌صورت

$$\bar{C} = \left( X, \{ \bar{R}_\alpha \}_{0 \leq \alpha \leq e} \right)$$

۱. به‌ازای هر  $\alpha \in \{0, 1, \dots, e\}$  داشته باشیم

$$\bigcup_{i \in E_{\alpha'}} R_i = \bigcup_{j \in E_{\alpha'}} R_j,$$

به‌ازای یک  $\alpha' \in \{0, 1, \dots, e\}$

۲. افزاز  $\{0, 1, \dots, d\}$  از  $E_0^*, \dots, E_1^*, E_e^* = \{0\}$  وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر  $r, t \in E_{\alpha'}^*$  و هر  $0 \leq \beta \leq e$ ,

$$\sum_{i \in E_{\beta}} \chi_r(A_i) = \sum_{i \in E_{\beta}} \chi_t(A_i).$$

در این صورت  $\bar{P} = \{\bar{\chi}_i(\bar{A}_j)\}_{0 \leq i, j \leq e}$  جدول سرشت اسکیم  $\bar{C}$  است که در آن  $\bar{A}_j = A(\bar{R}_j)$  و

$$\bar{\chi}_i(\bar{A}_j) = \sum_{k \in E_j} \chi_i(A_k), \quad 0 \leq \alpha \leq e$$

$$m_{\bar{\chi}_i} = \sum_{r \in E_i^*} m_{\chi_r}$$

(توجه کنید که در ماتریس  $\bar{P}$  سطرهای تکراری حذف شده است.)

### جدول سرشت سه‌تایی‌های کامینا

فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد. گروه  $G$  را دارای خاصیت سه‌تایی کامینا گویند هر گاه زیرگروه‌های نرمال  $M$  و  $N$  از  $G$  که  $N \subseteq M$  موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر  $g \in G \setminus M$ ، داشته باشیم،  $Cl_G(g) = gN$ ، [۸]. در حالتی که  $M = N$ ، جفت  $(G, N)$  را یک جفت کامینا گویند و اگر  $M = N = G'$ ، آن‌گاه گروه  $G$  را یک گروه کامینا گویند. بنابراین شرط سه‌تایی کامینا تعمیمی از شرط کامینا است. نتایج بسیار زیادی در مورد خواص و ویژگی‌های گروه‌های کامینا تا کنون ارائه شده است. اما در مورد گروه‌هایی که دارای خاصیت سه‌تایی کامینا هستند، بجز چند حالت خاص نتایج زیادی وجود ندارد. لویس<sup>۱</sup> گروه‌هایی که تمامی سرشت‌های غیرخطی آنها روی عناصر غیرمرکزی گروه، صفر هستند را بررسی کرده است [۱۰]، که به اختصار به آنها  $VZ$ -گروه‌ها گفته می‌شود. این گروه‌ها در واقع دارای خاصیت سه‌تایی کامینا به‌ازای  $M = Z(G)$  و  $N = G'$  هستند. لویس سرشت‌های تحویل‌ناپذیر این گروه‌ها را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G/G'$  و  $Z(G)$  تعیین کرده است. هم‌چنین لویس در مقاله دیگری گروه‌هایی با خاصیت سه‌تایی کامینا به‌ازای  $M = Z(G)G'$  و  $N = G'$  را بررسی کرده است و به‌طور مشابه یک مشخصه‌سازی از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر این گروه‌ها ارائه کرده است [۹].

فرض کنیم  $(G, M, N)$  یک سه‌تایی کامینا باشد. در این بخش سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه  $G$  را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G/N$  و  $M$  تعیین می‌کنیم. برای این منظور در ادامه این مقاله فرضیات زیر را نظر می‌گیریم و از آنها در لم‌های بعد استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم  $(G, M, N)$  یک سه‌تایی کامینا باشد. فرض کنیم  $M = \bigcup_{i=0}^t Cl_G(g_i)$ . قرار می‌دهیم  $\bar{M} = \{Cl_G(g_i) \mid 0 \leq i \leq t\}$  که در آن  $Cl_G(g_i) = \sum_{h \in Cl_G(g_i)} h$  و  $\bar{C}M$  را زیرجبر  $Z(\bar{C}M)$  تولید شده به‌وسیله

$\bar{M}$  روی  $\bar{C}$  در نظر می‌گیریم.

لم ۷: با توجه به فرضیات بالا، به‌ازای هر  $0 \leq i \leq t$  قرار دهید:

$$T_i = \{(x, y) \in M \times M \mid xy^{-1} \in Cl_G(g_i)\}.$$

در این صورت  $(M, \{T_i\}_{0 \leq i \leq t})$  یک اسکیم شرکت‌پذیر جابه‌جایی است و جبر مجاورت آن یکرخت با  $\mathbb{C}\bar{M}$  است. اثبات: همان‌طور که در مثال ۲ اشاره کردیم  $C = (M, \{T_i\}_{0 \leq i \leq t})$  یکی از فیوژن‌های اسکیم شرکت‌پذیر گروهی روی  $M$  است. به‌ازای هر  $i$ ، قرار دهید:

$$A_i = A(T_i).$$

در این صورت به‌ازای هر  $0 \leq i, j \leq t$ ،

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^t \lambda_{ijk} A_k$$

که در آن  $\lambda_{ijk} = \left| \left\{ z \in M \mid xz^{-1} \in Cl_G(g_i), zy^{-1} \in Cl_G(g_j) \right\} \right|$  به‌ازای عناصر  $x, y \in M$  به‌طوری‌که  $xy^{-1} \in Cl_G(g_k)$ ،  $0 \leq i, j \leq t$  از طرف دیگر به‌ازای هر

$$\overline{Cl_G(g_i)Cl_G(g_j)} = \sum_{k=0}^t \mu_{ijk} \overline{Cl_G(g_k)},$$

که در آن  $\mu_{ijk} = \left| \left\{ (a, b) \in M \times M \mid a \in Cl_G(g_i), b \in Cl_G(g_j), ab = c \right\} \right|$  که در آن  $c \in Cl_G(g_k)$  عنصر دلخواه  $0 \leq i, j, k \leq t$  داریم  $\lambda_{ijk} = \mu_{ijk}$ . برای این منظور فرض کنید  $x, y \in M$  به‌طوری‌که  $c = xy^{-1} \in Cl_G(g_k)$  فرض کنید  $\lambda_{ijk}$  عنصر  $z \in M$  وجود دارد که  $xz^{-1} \in Cl_G(g_i)$  و  $zy^{-1} \in Cl_G(g_j)$ . اگر  $a = xz^{-1} \in Cl_G(g_i)$  و  $b = zy^{-1} \in Cl_G(g_j)$  قرار دهیم  $ab = xy^{-1} = c$  وجود دارد که  $ab = xy^{-1} \in Cl_G(g_k)$  بنابراین  $\mu_{ijk} \geq \lambda_{ijk}$ . برعکس، فرض کنیم  $\mu_{ijk}$  عنصر  $(a, b) \in M \times M$  وجود دارد که  $ab = xy^{-1} \in Cl_G(g_k)$  قرار می‌دهیم  $z = by$  در این صورت حداقل  $\mu_{ijk}$  عنصر  $z \in M$  وجود دارد که  $xz^{-1} = a \in Cl_G(g_i)$  و  $zy^{-1} = b \in Cl_G(g_j)$  از این‌رو،  $\lambda_{ijk} \geq \mu_{ijk}$ . بنابراین  $\lambda_{ijk} = \mu_{ijk}$ ،  $0 \leq i, j \leq t$  در نتیجه به‌ازای هر

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^t \lambda_{ijk} A_k$$

اگر و تنها اگر

$$\overline{Cl_G(g_i)Cl_G(g_j)} = \sum_{k=0}^t \lambda_{ijk} \overline{Cl_G(g_k)}.$$

بنابراین اگر  $W(C)$  را جبر مجاورت اسکیم شرکت‌پذیر  $C$  در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \theta: W(C) &\rightarrow \mathbb{C}\bar{M} \\ A_i &\rightarrow \overline{Cl_G(g_i)} \end{aligned}$$

یک یکرختی جبری است. در نتیجه  $\mathbb{C}\bar{M}$  با جبر مجاورت  $C$  یکرخت است.

لم ۸: فرض کنید  $\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$  مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $M$  باشند به‌طوری‌که دو به دو در  $G$  مزدوج نیستند. در این صورت  $\text{Irr}(\mathbb{C}\bar{M}) = \{W_{\psi_1}, \dots, W_{\psi_r}\}$  که

$$W_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g_i)}) = \sum_{Cl_M(m) \subseteq Cl_G(g_i)} \omega_{\psi_i}(Cl_M(m)).$$

به‌علاوه به‌ازای هر  $i$ ،

$$m_{W_{\psi_i}} = |G : I_G(\psi_i)| m_{\omega_{\psi_i}}$$

که در آن  $I_G(\psi_i) = \{g \in G \mid \psi_i^g = \psi_i\}$  گروه لختی  $\psi_i$  در  $G$  است.

اثبات: چون طبق لم بالا،  $\mathbb{C}\bar{M}$  جبر مجاورت یک فیوژن از اسکیم شرکت‌پذیر گروهی روی  $M$  است، طبق قضیه ۶، افزای از  $Irr(Z(\mathbb{C}M))$  وجود دارد به طوری که به ازای هر دو سرشت تحویل‌ناپذیر متعلق به یک کلاس مانند  $\omega_\theta$  و  $\omega_\theta$  باید داشته باشیم

$$\omega_\theta(\overline{Cl_G(g_i)}) = \omega_\phi(\overline{Cl_G(g_i)}) , \forall \theta \leq i \leq t.$$

اما عبارت بالا برقرار است اگر و تنها اگر  $\phi = \theta^h$ ، به ازای یک  $h \in G$ . در نتیجه تمامی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $-G$  مزدوج با  $\phi$  در کلاس  $\phi$  از افزای ذکر شده قرار می‌گیرند. از این‌رو، متناظر با کلاس  $\phi$ ، سرشت تحویل‌ناپذیر  $W_\phi \in Irr(\mathbb{C}\bar{M})$  تعریف می‌شود به طوری که

$$W_\phi(Cl_G(g_i)) = \sum_{Cl_M(m) \subseteq Cl_G(g_i)} \omega_\phi(Cl_M(m)).$$

بعلاوه  $m_{W_\phi} = \sum_{\theta \in T_\phi} m_{\omega_\theta}$  که در آن  $T_\phi$  مجموعه تمام  $-G$  مزدوج‌های  $\phi$  است. حال چون  $T_\phi$  مدار  $\phi$  تحت

عمل  $G$  روی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $M$  با عمل تزویج است [۷، فصل ۶]، از این‌رو، طبق قضیه مدار-پایدارساز داریم  $|T_\phi| = |G : I_G(\phi)|$ . بنابراین  $m_{W_\phi} = |G : I_G(\phi)| m_{\omega_\phi}$ . در لم ۹ و قضیه ۱۰ از نمادهایی معرفی شده در لم ۸ استفاده شده است.

لم ۹: فرض کنید  $\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$  مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $M$  باشند به طوری که به ازای هر  $i$ ،  $N \not\subseteq \ker \psi_i$  و  $\psi_i$ ها دو به دو  $-G$  مزدوج نیستند. در این صورت به ازای هر  $i$ ، نگاشت

$$\bar{W}_{\psi_i} : Z(\mathbb{C}G) \rightarrow \mathbb{C}$$

به طوری که

$$\begin{cases} \bar{W}_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g)}) = W_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g)}), & g \in M \\ W_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g)}) = 0, & g \in G \setminus M \end{cases}$$

یک سرشت تحویل‌ناپذیر  $Z(\mathbb{C}G)$  است و به علاوه

$$m_{\bar{W}_{\psi_i}} = |G : M| m_{W_{\psi_i}}.$$

اثبات: فرض کنیم  $G = \bigcup_{i=0}^n Cl_G(g_i)$ . در این صورت  $G \setminus M = \bigcup_{i=t+1}^n Cl_G(g_i)$ . برای این که نشان دهیم

$$\bar{W}_{\psi_i} \in Irr(Z(\mathbb{C}G)),$$

کافی است نشان دهیم به ازای هر  $0 \leq i, j \leq n$  داریم

$$\bar{W}_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g_i) Cl_G(g_j)}) = \bar{W}_{\psi_i}(Cl_G(g_i)) \bar{W}_{\psi_i}(Cl_G(g_j)).$$

ابتدا فرض کنیم  $0 \leq i, j \leq t$ . چون  $M \trianglelefteq G$ ، داریم

$$\overline{Cl_G(g_i) Cl_G(g_j)} = \sum_{k=0}^t \lambda_{ijk} \overline{Cl_G(g_k)}.$$

در این صورت چون  $W_{\psi_i} \in Irr(\mathbb{C}\bar{M})$  و  $(\bar{W}_{\psi_i})_{\mathbb{C}\bar{M}} = W_{\psi_i}$  دیده می‌شود که



$$\begin{aligned}\overline{W_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g_i)Cl_G(g_j)})} &= \sum_{i=0}^t \lambda_{ijk} \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_k))} \\ &= \sum_{i=0}^t \lambda_{ijk} \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_k))} \\ &= \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_i)Cl_G(g_j))} \\ &= \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_i))W_{\psi_i}(Cl_G(g_j))} \\ &= \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_i))} \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_j))}.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم  $0 \leq i \leq t+1$  و  $t+1 \leq j \leq n$  و یا  $t+1 \leq i, j \leq n$ . در این صورت

$$\overline{Cl_G(g_i)Cl_G(g_j)} = \sum_{k=t+1}^n \lambda_{ijk} \overline{Cl_G(g_k)}$$

از این رو،

$$\begin{aligned}\overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_i)Cl_G(g_j))} &= \sum_{k=t+1}^n \lambda_{ijk} \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_k))} \\ &= 0 = \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_i))} \overline{W_{\psi_i}(Cl_G(g_j))}.\end{aligned}$$

بنابراین  $\overline{W_{\psi_i}}: Z(CG) \rightarrow \mathbb{C}$  یک همریختی جبری است و در نتیجه  $\overline{W_{\psi_i}} \in \text{Irr}(Z(CG))$ . به علاوه چون

$(\overline{W_{\psi_i}})_{\mathbb{C}\overline{M}} = W_{\psi_i}$  و روی تمام عناصر  $Cl(G) \setminus \overline{M}$  صفر است، که در آن

$$.m_{\overline{W_{\psi_i}}} = |G:M| m_{W_{\psi_i}} \text{ داریم } 3 \text{ طبق لم } 3, Cl(G) = \{Cl_G(g_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$$

در زیر نتیجه اصلی این مقاله را می‌آوریم.

**قضیه ۱۰:** فرض کنید  $(G, M, N)$  یک سه‌تایی کامینا باشد. فرض کنید  $\text{Irr}(G/N) = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$  و

$\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$  مجموعه‌ای از تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $M$  باشد که به‌ازای هر  $i$ ،  $N \not\subseteq \ker \psi_i$  و  $\psi_i$  ها دو

به دو  $-G$  مزدوج نیستند. در این صورت

$$\text{Irr}(G) = \{\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_m, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_r\},$$

که در آن به‌ازای هر  $g \in G$ ،

$$\bar{\chi}_i(g) = \chi_i(gN),$$

و

$$\begin{cases} \bar{\psi}_i(g) = 0, & g \in G \setminus M \\ \bar{\psi}_i(g) = \frac{|G|\psi_i(1)}{|Cl_G(g)|\sqrt{|M||I_G(\psi_i)|}} W_{\psi_i}(Cl_G(g)), & g \in M, \end{cases}$$

که

$$W_{\psi_i}(Cl_G(g)) = \sum_{Cl_M(m) \subseteq Cl_G(g)} \omega_{\psi_i}(Cl_M(m)).$$

اثبات: طبق لم ۲.۲۲ از [۷]، به‌ازای هر  $\chi_i \in \text{Irr}(G/N)$ ، سرشت  $\bar{\chi}_i \in \text{Irr}(G)$  که  $\bar{\chi}_i(g) = \chi_i(gN)$  قابل تعریف است. بنابراین  $\{\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_m\}$  مجموعه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G$  است که  $N \not\subseteq \ker \chi_i$ . هم‌چنین طبق لم ۹، به‌ازای هر  $1 \leq i \leq r$ ، سرشت تحویل‌ناپذیر  $\bar{W}_{\psi_i} \in \text{Irr}(Z(CG))$  وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} m_{\bar{W}_{\psi_i}} &= |G:M| m_{W_{\psi_i}} \\ &= |G:M| |G:I_G(\psi_i)| \psi_i^2(1). \end{aligned}$$

(در تساوی آخر در بالا از لم ۸ استفاده شده است.) به‌علاوه طبق مثال ۴، درجه سرشت تحویل‌ناپذیر  $\bar{W}_{\psi_i}$  برابر

$$\deg \bar{W}_{\psi_i} = \sqrt{m_{\bar{W}_{\psi_i}}} = \frac{|G| \psi_i(1)}{\sqrt{|M| |I_G(\psi_i)|}},$$

است. بنابراین به‌کمک مثال ۵ به‌ازای هر  $1 \leq i \leq r$ ، سرشت تحویل‌ناپذیر  $\bar{\psi}_i$  از  $G$  وجود دارد به‌طوری‌که

$$\bar{\psi}_i(g) = \frac{(\deg \bar{W}_{\psi_i})(\bar{W}_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g)}))}{|Cl_G(g)|}$$

$$= \begin{cases} \frac{|G| \psi_i(1)}{|Cl_G(g)| \sqrt{|M| |I_G(\psi_i)|}} W_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g)}), & g \in M \\ 0, & g \in G \setminus M \end{cases}$$

که  $W_{\psi_i}(\overline{Cl_G(g)}) = \sum_{Cl_M(m) \subseteq Cl_G(g)} \omega_{\psi_i}(\overline{Cl_M(m)})$  بنابراین  $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_r\}$  زیرمجموعه‌ای از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G$  است که  $N \not\subseteq \ker \psi_i$ .

حال فرض کنید  $\theta \in \text{Irr}(G) - \text{Irr}(G/N)$ . در این صورت چون  $N \not\subseteq \ker \theta$ ، عنصر  $g \in N$  وجود دارد به‌طوری‌که  $\theta(g) \neq \theta(1)$  و یا به‌طور معادل

$$\omega_\theta(\overline{Cl_G(g)}) \neq |Cl_G(g)|.$$

حال چون به‌ازای هر  $h \in G \setminus M$  داریم

$$\overline{Cl_G(g)} \overline{Cl_G(h)} = |Cl_G(g)| \overline{Cl_G(h)},$$

از تساوی

$$\omega_\theta(\overline{Cl_G(g)}) \omega_\theta(\overline{Cl_G(h)}) = |Cl_G(g)| \omega_\theta(\overline{Cl_G(h)}),$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\omega_\theta(\overline{Cl_G(h)}) = 0.$$

بنابراین  $\theta(h) = 0$  به‌ازای هر  $h \in G \setminus M$ .

از طرف دیگر فرض کنید  $\psi \in \text{Irr}(M)$  به‌طوری‌که  $(\theta_M, \psi) \neq 0$ . در این صورت چون  $(\omega_\theta)_{CM} = W_\psi$ ، از این‌رو، به‌ازای هر  $g \in M$

$$\omega_\theta(\overline{Cl_G(g)}) = W_\psi(\overline{Cl_G(g)})$$

که در آن

$$W_\psi(\overline{Cl_G(g)}) = \sum_{Cl_M(m) \subseteq Cl_G(g)} \omega_\psi(\overline{Cl_M(m)}).$$

پس به‌ازای هر  $g \in G$ ،  $\omega_\theta(\overline{Cl_G(g)}) = \overline{W_\psi}(Cl_G(g))$  که در آن

$$\begin{cases} \overline{W_\psi}(Cl_G(g)) = \omega_\psi(Cl_G(g)), & g \in M \\ \overline{W_\psi}(Cl_G(g)) = 0, & g \in G \setminus M. \end{cases}$$

این نشان می‌دهد که  $\theta = \overline{\psi}_i$  به‌ازای یک  $1 \leq i \leq r$ ، به‌طوری‌که  $W_\psi = W_{\psi_i}$ . بنابراین مجموعه  $\{\overline{\chi}_1, \dots, \overline{\chi}_m, \overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_r\}$  برابر تمامی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G$  است.

مثال ۱۱: سه‌تایی کامینا  $(G, Z(G), G')$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $Irr(G/G') = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$  و

$$Irr(Z(G)) - Irr(Z(G)/G') = \{\psi_1, \dots, \psi_r\}.$$

در این صورت طبق قضیه بالا،

$$Irr(G) = \{\overline{\chi}_1, \dots, \overline{\chi}_m, \overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_r\}$$

که در آن به‌ازای هر  $g \in G$ ،  $\overline{\chi}_i(g) = \chi_i(gG')$  و

$$\begin{cases} \overline{\psi}_i(g) = \sqrt{\frac{|G|}{|Z(G)|}} \psi_i(g), & g \in Z(G) \\ \overline{\psi}_i(g) = 0, & g \in G \setminus Z(G). \end{cases}$$

### نتیجه‌گیری

بررسی و تعیین جدول سرشت گروه‌های متناهی یکی از مسائل مهم در نظریه نمایش گروه‌ها به‌شمار می‌رود. چنان‌که در مثال ۵ اشاره شد یک تناظر یک به یک و پوشا بین جدول سرشت یک گروه متناهی  $G$  و جدول سرشت  $Z(CG)$  وجود دارد. از طرفی چون  $Z(CG)$  را می‌توان به‌عنوان جبر مجاورت اسکیم شرکت‌پذیر گروهی روی  $G$  در نظر گرفت، می‌توان از نتایج و قضایای موجود در نظریه نمایش اسکیم‌های شرکت‌پذیر برای تعیین جدول سرشت  $Z(CG)$  استفاده کرد. بر همین اساس در این مقاله برای تعیین زیر مجموعه‌ای از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک سه‌تایی کامینا  $(G, M, N)$  که  $N$  در هسته آنها قرار ندارد، از نتایج موجود در مورد جدول سرشت فیوژن‌های یک اسکیم شرکت‌پذیر استفاده کرده‌ایم و به‌عنوان یک نتیجه اصلی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه  $G$  را بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر  $G/N$  و  $M$  ارائه داده‌ایم.

### تقدیر و تشکر

از داوران محترم که زحمت داوری این مقاله را پذیرفته و با نظرات ارزشمند خود به بهبود این مقاله کمک کردند، تشکر می‌کنیم.

### منابع

1. Bagherian J., "A class of imprimitive association schemes", *Comm. Algebra*, 44 (2016) 3692-3704.
2. Bannai E., Ito T., "Algebraic Combinatorics I: Association Schemes", Benjamin/Cummings, Menlo Park (1984).

3. Bannai E., "Subschemes of some association schemes", *J. Algebra*, 144 (1991) 167-188.
4. French C., Zieschang P. H., "A Schur-Zassenhaus Theorem for association schemes", *J. Algebra*, 435 (2015) 88-123.
5. Hanaki A., "Clifford theory for association schemes", *J. Algebra*, 321 (2009) 1686-1695.
6. Hirasaka M., Muzychuk M., Zieschang P. H., "A generalization of Sylow's theorems on finite groups to association schemes", *Math. Z.*, 241 (2002) 665-672.
7. Isaacs I. M., "Character Theory of Finite Groups", Academic Press, New York (1976).
8. Johnson K. W., Mattarei S., Sehgal S. K., "Weak Cayley tables", *J. London Math. Soc.*, (2) 61 (2000) 395-411
9. Lewis M. L., "Generalizing Camina groups and their character tables", *J. Group Theory*, 12 (2009) 209-218.
10. Lewis M. L., "Character tables of groups where all nonlinear irreducible characters vanish off the center", in: *Proceeding of Ischia Group Theory*, (2008) 174-182.
11. Zieschang P. H., "An Algebraic Approach to Association Schemes", in: *Lect. Notes in Math.*, vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin (1996).
12. Zieschang P. H., "Theory of Association Schemes", *Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Berlin (2005).