الگوریتمی سریع برای پوشش دید مستطیلی چندضلعی‌های متعامد ساده با حداقل تعداد r-Star ها

کیوان برنا؛ دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

دریافت ۹۶/۰۷/۰۱ پذیرش ۹۶/۱۱/۲۸

چکیده

این مقاله الگوریتمی برای پوشش دید چندضلعی‌های متعامد ساده با حداقل تعداد نگهبانان به‌دست می‌دهد. در واقع حداقل تعداد نگهبان را برای چندضلعی‌های ساده (بدون حفره) متعامد برای همهٔ حالت‌ها بررسی کرده و قادر هستیم که برای هر یک از نگهبانان نیز محدودهٔ مستطیل شکلی را بیابیم. به‌عبارت دیگر مسئلهٔ پوشش چندضلعی‌های متعامد ساده با حداقل r-Star ها را بررسی می‌کنیم. در هر چندضلعی متعامد P دو نقطهٔ p و q ، نسبت به‌هم r-visible هستند اگر و تنها اگر آن دو نقطه را دو گوشه مخالف مستطیلی در نظر بگیریم، تمام مستطیل درون چندضلعی P قرار داشته باشد. حال یک چندضلعی P را یک r-Star گوییم اگر یک نقطهٔ p در آن وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر نقطهٔ q عضو چندضلعی، از p، r-visible باشد. در این مقاله الگوریتمی را پیشنهاد می‌کنیم که روی همهٔ چندضلعی‌های ساده متعامد کاربرد دارد و قادر است حداقل تعداد نگهبانان را در جای خود مستقر کند. این الگوریتم با استفاده از روشی به‌نام مستطیل‌بندی (تقسیم چندضلعی متعامد به تعدادی مستطیل)، تعدادی از r-Star ها را افراز کرده و به پردازش آن‌ها برای درج نگهبانان در محل خود برای رسیدن به هدف، که حداقل تعداد نگهبانان است می‌پردازد. الگوریتم پیشنهادی ما قادر است تا در زمان $O(n^5)$ حداقل تعداد نگهبانان را به‌همراه محدوده مستطیل شکلی برای آن‌ها تعیین کند در حالی‌که مرتبهٔ اجرایی بهترین الگوریتم‌های موجود قبلی $O(n^{17}\ poly-log\ n)$ بوده است. از دیگر مزایای این الگوریتم می‌توان به نداشتن محدودیت در چندضلعی های متعامد ساده اشاره کرد.

واژه‌های کلیدی: چندضلعی متعامد (راست گوشه)، مستطیل‌بندی، r-Star، r-visible ، افراز r-Star ها.

رده بندی موضوعی: 52B55، 68U05.

۱. مقدمه

مسائل گالری هنر مسئله‌ای پژوهشی بزرگ و پرکاربرد در هندسهٔ محاسباتی و ترکیبی است [۷]،[۸]. به‌دست آوردن حداقل تعداد نگهبان برای تماشای یک چندضلعی داده شده NP-Complete است[۱]. این مسئله را Worman و Keil بررسی کرده‌اند [10] که یک الگوریتم با مرتبهٔ زمانی $O(n^{17}\ poly-logn)$ به‌طوری‌که n اندازهٔ چندضلعی داده شده است توصیف شده است و از روش افراز چندضلعی P به چندضلعی‌های کوچک‌تر بهره می‌گیرد. بدین‌صورت که یک افراز از چندضلعی P مجموعه‌ای از تعدادی چندضلعی است که اجتماع هندسی آن‌ها دقیقاً برابر P است. حال که مسائل نگهبانی روی چندضلعی‌های متعامد مطرح شده است، (یعنی چندضلعی‌هایی که اضلاع آن افقی یا عمودی‌اند، از این‌رو، یال‌هایش می‌توانند به‌صورت یال‌های N، S، E و W نام‌گذاری شوند) باعث شده تا بتوان برای این‌گونه مسائل الگوریتم هایی برای پوشش دید بهینه ارائه کرد.

*نویسنده مسئول borna@khu.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

در این مقاله الگوریتمی برای پوشش دید چندضلعی‌های متعامد با حداقل تعداد نگهبان با میدان دید r یا همان r-visibility ارائه می‌شود که ایدهٔ پیشنهادی، حداقل تعداد نگهبان را برای چندضلعی‌های ساده متعامد (بدون محدودیت) بررسی می‌کند و قادر است برای هر یک از نگهبانان نیز محدودهٔ مستطیل شکلی تعیین کند.

در الگوریتم پیشنهادی این مقاله باید ابتدا چندضلعی متعامد را به چندین چندضلعی متعامد کوچک‌تر که هر کدام یک r-Star است تقسیم کنیم که باعث به‌وجود آمدن روشی به‌نام مستطیل‌بندی می‌شود. مستطیل‌بندی به‌نوبهٔ خود دارای مراحل و قسمت‌های مختلفی است که در بخش ۵-۴ شرح داده می‌شود. به‌وضوح مسئلهٔ تعیین حداقل مجموعه‌ای از نگهبانان با قابلیت میدان دید r برای تماشای یک چندضلعی متعامد ساده، برابری می‌کند با تعیین حداقل پوشش همان چندضلعی به‌وسیلهٔ r-Star ها. در بخش بعدی خلاصه‌ای از کارهای پیشین را ملاحظه می‌کنید. در بخش سوم تعاریف و اصطلاحات مربوط به این مقاله از قبیل فرورفتگی، انواع یال‌ها، میدان دید r، r-Star و غیره بیان می‌شود. در بخش چهارم به‌شرح کامل الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم. در بخش پنجم مقایسه الگوریتم پیشنهادی با کارهای انجام شده و بخش ششم و پایانی به نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

۲. کارهای پیشین

در مقاله‌های مشابه با این موضوع کارهایی صورت گرفته که هر کدام فاکتور خاصی را برای رسیدن به هدف در نظر داشته‌اند. برای $0 \leq k \leq 4$ یک چندضلعی متعامد در ردهٔ-k است هرگاه فرورفتگی‌های آن حداکثر در k جهت باشد. چندضلعی‌های ردهٔ ۲ می‌توانند به دو ردهٔ 2a و 2b تقسیم شوند. فرورفتگی‌های ردهٔ 2a در راستاهای موازی (شمال و جنوب) یا (شرق و غرب) است در حالی که فرورفتگی های ردهٔ 2b به‌صورت متعامد است. توجه کنید که چندضلعی های متعامد واقع در ردهٔ 2a یکنوا هستند.

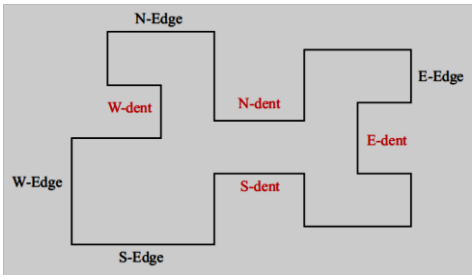
مسئلهٔ پوشش دید مستطیلی را Leonidas Palios و Petros Tzimas برای چندضلعی‌های متعامد ساده ردهٔ-۳ پوشش داده‌اند [12]، که در مرتبهٔ زمانی O (n+klogk) صورت می‌گیرد. Keil یک الگوریتم با مرتبهٔ زمانی $O(n^2)$ را برای پوشش یک چندضلعی متعامد ردهٔ-$2a$ به‌وسیلهٔ r-Starها توصیف کرده است [4]. پیچیدگی زمانی پوشش چندضلعی متعامد ردهٔ $2a$ با r-Starها را Gewail، Keil و Ntalos بهبود داده‌اند [3]،که یک الگوریتم با مرتبهٔ زمانی $O(n)$ برای گزارش محل‌های یک مجموعه از حداقل تعداد نگهبانان را می‌دهد. یک بهبود از این الگوریتم در [۵] داده شده است که Worman و Keil به مسئلهٔ پوشش چندضلعی‌های متعامد عمومی با r-Starها پرداخته‌اند و از روی‌کرد تئوری گراف استفاده شده در [۶] بهره گرفته است (برای پوشش‌های s-Star)، تا یک الگوریتم با مرتبهٔ زمانی $O(n^{17}\ poly - logn)$ شرح داده شود [۱۰]. در اکثر مقاله‌های ذکر شده، مسئلهٔ پوشش r-Star برای چندضلعی‌های متعامد ردهٔای خاصی بررسی شده است ولی الگوریتم پیشنهادی در این مقاله همهٔ چندضلعی‌های متعامد ساده، شامل هر رده‌ای را قادر است پوشش دهد و حداقل تعداد نگهبانان با میدان دید r را با محدودهٔ قرارگیری مناسب پیدا کند.

۳. تعاریف پایه در الگوریتم پیشنهادی

در این مقاله پردازش روی چندضلعی‌های متعامد یا راست گوشه انجام می‌شود پس فقط چهار نوع یال داریم. اگر چندضلعی مورد نظر را به‌صورت گونیا نسبت به صفحهٔ مورد پردازش فرض کنید یال شمالی یا همان یال N، یالی است

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

که داخل چندضلعی پایین آن قرار دارد. یال جنوبی یا S که درون چندضلعی بالای آن قرار دارد. یال شرقی یا E درون چندضلعی را در سمت چپ خود دارد و یال غربی یا یال W داخل چندضلعی در سمت راستش قرار می‌گیرد (شکل ۱). هم‌چنین چهار نوع فرورفتگی وجود دارد که عبارتند از فرورفتگی شمالی (N-dent)، فرورفتگی جنوبی (S-dent)، فرورفتگی شرقی (E-dent) و فرورفتگی غربی (W-dent) که در شکل ۱ نشان داده شده است. در الگوریتم پیشنهادی پس از مستطیل‌بندی یال‌ها و رئوس جدیدی در چندضلعی متعامد P ایجاد می‌شوند که آن‌ها را یال‌های فرعی و رئوس فرعی می‌نامیم. یال‌های فرعی به‌صورت یال‌های فرعی افقی و عمودی شناخته می‌شوند و ممکن است در مواردی برخی از یال‌های فرعی افقی را یال‌های شمالی فرعی بنامیم و رئوس فرعی نیز از تقاطع یال‌های فرعی با یال‌های اصلی یا فرعی ایجاد می‌شوند که تمام این نقاط تقاطع را رئوس فرعی جنوبی می‌نامیم. چندضلعی‌های متعامد می‌توانند بر حسب نوع فرورفتگی‌ها طبقه‌بندی شوند [۲] که یک چندضلعی متعامد ردهٔ k (class-k) به طوری‌که $1 \leq k \leq 4$، به این‌صورت تعریف می‌شود که فرورفتگی‌هایش حداکثر در k جهت مختلف باشند. چندضلعی‌های ردهٔ ۲ می‌توانند مجدداً ردهٔبندی شوند. در ردهٔهای $2a$ به‌طوری‌که ۲ جهت فرورفتگی موازی باشند (یعنی N و S یا E و W) و ردهٔ $2b$ به‌طوری‌که ۲ جهت فرورفتگی عمود بر یک‌دیگر باشند.



شکل ۱. یک چندضلعی متعامد ساده با انواع یال‌ها و فرو رفتگی‌ها

میدان دید نگهبانان را به‌صورت r-visibility یعنی میدان دید مستطیلی که این‌گونه تعریف می‌کنیم: (شکل ۲ ب) در هر چندضلعی متعامد P دو نقطه p و q نسبت به هم r-visible هستند اگر و فقط اگر آن دو نقطهٔ را دو گوشه مخالف مستطیلی در نظر بگیریم تمام مستطیل درون چندضلعی P قرار داشته باشد. حال یک چندضلعی P را یک r-Star گوییم اگر یک نقطه p در آن وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر نقطه q عضو چندضلعی، از p، r-visible باشد. شکل ۲ ب در واقع یک r-Star است و هسته آن که همان مستطیل نگهبان است که با یک مستطیل خط‌چین نشان داده شده است. در مسئلهٔ r-Star فرض می‌کنیم که هر نگهبان میدان دید ۳۶۰ درجه دارد.

۴. الگوریتم پیشنهادی

در این مقاله ایدهٔ جدیدی بر مبنای مستطیل‌بندی چندضلعی متعامد مطرح می‌شود که باعث ایجاد یال‌های جدیدی در آن می‌شود. در واقع چندضلعی متعامد اولیه P را با روشی موسوم به مستطیل‌بندی که در بخش ۵-۴ توضیح داده خواهد شد به تعدادی مستطیل افراز می‌کنیم به‌طوری‌که اجتماع هندسی آن‌ها دقیقاً برابر چندضلعی اولیهٔ P است. از این رو یال‌ها را بعد از مستطیل‌بندی در دو گروه یال‌های اصلی و یال‌های فرعی قرار داده که در شکل‌ها، یال‌های فرعی را با خط‌چین نمایش می‌دهیم. بدیهی است که یال اشتراکی بین دو مستطیل افراز شده از نوع فرعی بوده و مانع دید نگهبان نخواهد شد. ابتدا طبق روشی که در بخش ۵-۴ این مقاله گفته خواهد شد چندضلعی اولیه را

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

مستطیل‌بندی کرده و سپس طبق روش افراز چندضلعی متعامد که در زیر بخش بعدی آمده است، چندضلعی اولیه P را در صورت امکان به دو یا چند، چندضلعی متعامد تقسیم می‌کنیم که هر کدام از آن‌ها یک r-Star خواهد بود. سپس مستطیل‌های بن‌بست را تعیین کرده و برای هر کدام یک نگهبان افزایشی در محدودهٔ مورد نظر قرار می‌دهیم و در مرحلهٔ بعد، از بالاترین r-Star کار پیمایش را آغاز می‌کنیم و نسبت به نگهبانان درج شده بررسی می‌شوند و در صورت نیاز r-Starها و مستطیل نگهبانان بروز و یا نگهبانان جدید با روش تعیین محدوده نگهبان (مستطیل نگهبان) درخواست می‌شوند و در محدودهٔ مورد نظر قرار می‌گیرند و با پردازش r-Star یک سطح پایین‌تر نسبت به مستطیل‌های نگهبان آغازین در ابتدا و سپس نسبت به مستطیل‌های نگهبان r-Starها بررسی این‌که آیا دیده می‌شوند یا خیر صورت می‌گیرد. با توجه به توضیحاتی که در زیر بخش ۳-۴ به‌طور مفصل آمده است کار را ادامه داده و r-Star اول را تا جای ممکن بسط داده و این کار را برای بقیه r-Starها نیز تکرار خواهیم کرد تا حداقل تعداد نگهبانان یا بهتر بگوییم حداقل تعداد r-Starها را مشخص کنیم. در این مقاله در واقع به‌دنبال حداقل تعداد r-Starها هستیم.

۴-۱. افراز چندضلعی متعامد اولیه مستطیل‌بندی شده به چندضلعی‌های متعامد r-Star

با استفاده از مختصات دو رأس یال‌های شمالی و مختصات یال‌ها و رئوس فرعی که در مرحله مستطیل‌بندی ذخیره شده است افراز r-Star ها را از بالاترین یال شمالی آغاز می‌کنیم. یال‌های شمالی را نسبت به مؤلفهٔ y از بالاترین به پایین‌ترین، اولویت‌بندی کرده و در یک لیست قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال بالاترین یال شمالی اولویت ۱ و یال شمالی بعدی اولویت ۲ و به‌همین ترتیب برای سایر یال‌های شمالی اولویت‌بندی را انجام می‌دهیم. سپس کار تشخیص و ذخیره مستطیل‌ها و افراز r-Star ها را آغاز می‌کنیم. برای این کار دو رأس از یال شمالی مذکور را به‌عنوان دو رأس از مستطیل ابتدایی در نظر گرفته و رأس سمت چپ آن را با A و رأس سمت راست را با B نشان می‌دهیم. سپس طبق مراحلی که در زیر آمده رأس سوم و چهارم مستطیل را می‌یابیم:

۱. رأسی از لیست رئوس جنوبی که از درجه ۲ باشد و مؤلفهٔ x آن برابر با مؤلفه x رأس A و مؤلفهٔ y آن کوچک‌تر از مؤلفه y رأس A و بیشینه باشد را به‌عنوان C (رأس سوم) تعیین می‌کنیم.
۲. رأس چهارم نیز رأسی با مؤلفهٔ x رأس B و مؤلفه y رأس C است که با D نمایش می‌دهیم.
۳. ABCD را به‌عنوان یک مستطیل از r-Star جاری ذخیره می‌کنیم.

بدین‌صورت اولین مستطیل به‌همراه چهار یالش ذخیره می‌شود. در مرحلهٔ بعد با توجه به این‌که همهٔ مستطیل‌ها (به‌غیر از مستطیل پایانی که تمام ضلع جنوبی آن از نوع یال جنوبی چندضلعی P است) دارای یک یال افقی فرعی در ضلع جنوبی خود هستند، یال افقی فرعی مذکور از مستطیل اول را به‌عنوان یال شمالی مستطیل دوم در نظر گرفته و مراحل بالا را برایش تکرار می‌کنیم. این مراحل را برای هر کدام از یال‌های شمالی چندضلعی P تا رسیدن به مستطیلی که تمام ضلع جنوبی آن از نوع یال جنوبی چندضلعی P است ادامه می‌دهیم. در انتها اجتماع مستطیل‌های پیمایش شده برای هر کدام از یال‌های شمالی را به‌عنوان یک چندضلعی متعامد r-Star، همراه با یال شمالی، یال(های) شرقی، یال(های) غربی و یال(های) جنوبی با اولویت یال شمالی آن ذخیره می‌کنیم.

تبصره ۱: اگر در هنگام پیمایش مستطیل‌ها، یال جنوبی مستطیل جاری شامل بیش از یک یال فرعی افقی باشد (این امر زمانی رخ می‌دهد که بعد از مرحلهٔ مستطیل‌بندی، تمام حداقل یک یال فرورفتگی جنوبی (S-dent) از P، قسمتی میانی از ضلع جنوبی مستطیلی را تشکیل دهد) مستطیل و یا مستطیل‌های پیمایش شده تا آن مستطیل را

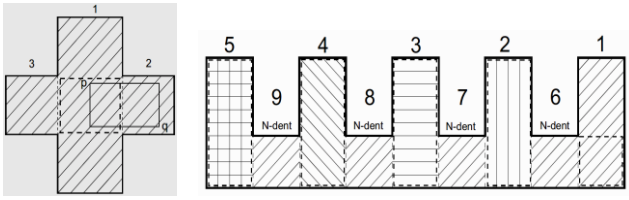
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

به‌همراه مستطیل جاری به‌عنوان یک r-Star ذخیره کرده که آن را یک r-Star والد نامیده و آن یال‌های فرعی افقی را به‌همراه تعدادشان ذخیره کرده و با عنوان یال شمالی فرزند به‌ترتیب از راست به چپ اولویت می‌دهیم. به‌عنوان مثال اگر در سطح اولویت یال شمالی ۵ باشیم و اولین بار شرایط فوق نمایان شود، راست‌ترین یال فرعی افقی را به ابتدای لیست یال‌های شمالی فرزند و بعدی را به انتهای آن و به‌همین ترتیب اضافه می‌کنیم. پس از اتمام یال‌های شمالی اصلی و افراز r-Star ها باید همین مراحل افراز را برای یال‌های شمالی فرزند تکرار کنیم و r-Star هایی را که r-Star های فرزند می‌نامیم، ثبت کنیم.

نکته: به‌عنوان یک قرارداد فرضی، از میان چندین یال شمالی در یک سطح، راست‌ترین یال شمالی، بالاترین اولویت را بین آن‌ها به خود اختصاص می‌دهد.

از آن‌جاکه هر چندضلعی متعامد جدید افراز شده یک r-Star است و فقط به یک نگهبان برای دیده شدن نیاز دارد ولی هم‌اکنون برای آن‌ها نگهبانی درج نمی‌شود. در مرحلهٔ افراز چندضلعی اولیه به (r-Starها) ممکن است مستطیل‌هایی با عنوان بن‌بست ذخیره شوند که در مرحله بعد اولین گزینه‌ها برای دریافت نگهبان هستند. بن بست را به‌طور مفصل در زیربخش ۲-۴ شرح می‌دهیم.

در شکل ۲ دو چندضلعی متفاوت مستطیل‌بندی شده را می‌بینید که نواحی قابل رویت برای هر نگهبان نیز مشخص شده است. در شکل ۲ آ، چندضلعی اولیه بر طبق الگوریتم پیشنهادی از ۹ ناحیهٔ تشکیل شده است. نواحی ۶، ۷، ۸، و ۹ همگی به‌وسیلهٔ نگهبان ناحیهٔ ۱ دیده می‌شوند. هم‌چنین هر کدام از ناحیه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ نیز به‌وسیلهٔ یک نگهبان قابل رویت است و به آن‌ها چهار نگهبان اختصاص می‌یابد. با این شرایط حداقل به ۵ نگهبان برای دیدن کل چندضلعی نیازمندیم. شکل ۲ ب به ۳ ناحیه تقسیم شده است که با توجه به شکل با قرار گرفتن یک نگهبان در r-Star اول، قادر هستیم تا دو ناحیهٔ دیگر را نیز به‌طور کامل ببینیم.



آ) با توجه به جهت هاشور زدگی که در نواحی مختلف تغییر جهت می‌دهد پنج نگهبان لازم است **ب) فقط به یک نگهبان ابتدایی نیازمندیم**

شکل ۲. دو شکل ساده و شانه‌ای که مستطیل‌بندی شده اند که تعداد نگهبان‌های‌شان با مستطیل‌های خط چین مشخص شده است

خط‌چین‌ها، یال‌های فرعی هستند که در مرحله مستطیل‌بندی ایجاد شده‌اند و هاشورها r-Star های افراز شده هستند.

۴-۲. محدودهٔ نگهبان برای چندضلعی‌های کوچک یا همان مستطیل نگهبان

چنان‌که گفته شد هر چندضلعی بدست آمده کوچک‌تر با روش ذکر شده یک r-Star است. برای به‌دست آوردن محدوده نگهبان چندضلعی‌های r-Star، از یال شمالی و یال(های) شرقی، یال(های) غربی و یال(های) جنوبی بهره می‌بریم، به این ترتیب که یک مستطیل را طوری درون این چندضلعی در نظر می‌گیریم که اگر نگهبان در هرقسمت از داخل آن‌قرار گیرد تمام چندضلعی اولیه P را می بیند. چندضلعی‌ها ممکن است با جذب قسمت‌هایی از چندضلعی‌های دیگر بزرگ‌تر شده و محدوده نگهبانشان نیز تغییر کند و در برخی مواقع قسمت‌های جذب شده به‌صورت مجزا نسبت

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

به چندضلعی مذکور قرار می‌گیرند، زیرا ممکن است پیوسته نباشند و فقط روی مستطیل نگهبان تأثیرگذار باشند. برای تعیین محدودهٔ نگهبان این موارد را برای درخواست‌های نگهبان، از هر r-Star پیدا می‌کنیم:

۱. یال N
۲. بالاترین یال S
۳. چپ‌ترین یال E
۴. راست‌ترین یال W

به‌طوری‌که از امتداد دادن این یال‌ها و انتخاب محل تقاطع پاره خط ها به‌عنوان رئوس مستطیل، می‌توان چهار رأس مستطیل نگهبان را به‌دست آورد.

۴-۳. پیمایش r-Star ها و تعیین حداقل تعداد نگهبان

پس از مراحل مستطیل‌بندی و عملیات افراز، تمامی r-Star ها به‌همراه مختصات یال‌های مستطیل‌های شان ذخیره می شوند که ممکن است برخی از این r-Star ها به‌صورت مستطیلی ایجاد شوند و یا مستطیل‌هایی که به‌طور قطع به یک نگهبان نیازمندند، که شرایط ویژه‌ای را برای تعیین نگهبان به‌وجود می‌آورند. در ادامه به مفهوم بن‌بست می‌پردازیم و نحوهٔ تعیین نگهبان را برای بن‌بست‌ها شرح می‌دهیم.

بن‌بست: به مستطیلی که یال شمالی و سه یال مجاور از نوع اصلی (همه یا قسمتی از یال) و یک یال به‌طور کامل از نوع فرعی داشته باشد بن‌بست گفته می‌شود.

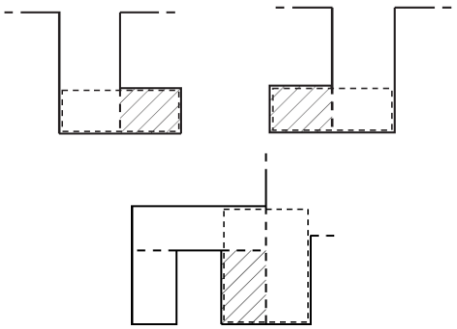
محدودهٔ نگهبان افزایشی: این نوع محدوده بیش‌ترین کاربرد را روی بن‌بست ها دارد اما روی r-Star هایی نیز اعمال می‌شود که حداقل یک سمت یال آن‌ها به‌طور کامل از نوع فرعی باشد و در خواست نگهبان داده باشند. برای این منظور ابتدا تغییراتی در بن‌بست یا r-Star مذکور به‌منظور گسترش آن انجام می‌دهیم و سپس مستطیل نگهبان را برای محدودهٔ جدید فرضی تعیین می‌کنیم که با توجه به انواع بن‌بست‌های پیش‌بینی شده داریم:

۱. برای بن بست‌هایی که دارای یال شرقی فرعی هستند و یا r-Star هایی که دارای یک یال شرقی و از نوع فرعی هستند، دو رأس یال فرعی را حذف کرده و از دو رأس آن یال فرعی، در امتداد یال‌های شمالی و جنوبی، به سمت خارج از آن (به‌سمت راست) پاره خط‌هایی رسم می‌کنیم تا چندضلعی متعامد P را در یالی (و نه رأسی مگر این‌که به انتهای P برسد) قطع کند. از بین نقاط تقاطع ایجاد شده، نقطه تقاطعی که دارای مؤلفه x کم‌تر است را به‌عنوان یک رأس جای‌گزین برای یال شرقی مستطیل یا r-Star مذکور تعیین کرده و رأس دیگر را به‌کمک مختصات رئوس دیگر به‌دست می‌آوریم.
۲. برای بن‌بست‌هایی که دارای یال غربی فرعی هستند و یا r-Star هایی که دارای یک یال غربی و از نوع فرعی هستند، دو رأس یال فرعی را حذف کرده و از دو رأس آن یال فرعی، در امتداد یال‌های شمالی و جنوبی، به سمت خارج از آن (به‌سمت چپ) پاره خط‌هایی رسم می‌کنیم تا چندضلعی متعامد P را در یالی (ونه رأسی مگر اینکه به انتهای P برسد) قطع کند. از بین نقاط تقاطع ایجاد شده، نقطه تقاطعی که دارای مؤلفه x بیش‌تر است را به‌عنوان یک رأس جای‌گزین برای یال غربی مستطیل یا r-Star مذکور تعیین می‌کنیم و رأس دیگر را به‌کمک مختصات رئوس دیگر می‌یابیم.
۳. برای r-Starها و مستطیل‌هایی که دو یال از یال‌های آن‌ها به‌طور کامل فرعی باشد نیز باید محدودهٔ نگهبان افزایشی تعیین شود که شامل شرقی- غربی، شمالی- شرقی و شمالی- غربی هستند. برای نوع اول نیاز به چهار

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

رأس جدید فرضی داریم که مانند مراحل ۱ و ۲ که در بالا آمده است عمل کرده و در نهایت تمام محدوده را به عنوان مستطیل نگهبان افزایشی تعیین می‌کنیم. اما برای حالت‌های دوم و سوم به سه رأس جدید فرضی نیازمندیم که مانند مراحل بالا برای هر نوع از یال‌های شرقی و غربی عمل کرده با این تفاوت که باید پس از آن، یال شمالی بروز شده را در امتداد شرقی‌ترین و غربی‌ترین یال به سمت بالا تا جایی‌که یکی از رئوس آن یک یال شمالی از P را قطع کند، گسترش داد.

در شکل ۳ می‌توان حالت هایی از موارد بالا را مشاهده کرد.



شکل ۳. حالت‌هایی از نگهبان افزایشی با یال‌های فرعی مختلف

با توجه به تعاریف بالا پس از تشخیص بن‌بست‌ها که با استفاده از اطلاعات ذخیره شده در مرحله‌افراز r-Star ها میسر است، برای هرکدام از بن‌بست‌ها یک نگهبان درخواست شده که در صورت نداشتن اشتراک با محدوه یا محدوده‌های دیگر نگهبانان در محدودهٔ نگهبان مستطیلی افزایشی خود درج می‌شود و به‌همراه مختصات رئوسش ذخیره می‌شودد و به‌دلیل آن‌که این نواحی بن‌بست به‌طور یقین به یک نگهبان در آن محدوده خاص برای دیده شدن نیاز دارند، آنان را نگهبانان اولیه یا نگهبانان قطعی نام‌گذاری می‌کنیم.

تبصره ۲: ممکن است دو محدودهٔ نگهبان اولیه با هم دارای اشتراک باشند که در این صورت باید اشتراک آن‌ها را به‌عنوان مستطیل نگهبان اولیه در نظر گرفته و محدوده‌های نگهبان عامل اشتراک حذف گردند.

نکته: اگر یک محدودهٔ نگهبان اولیه با دو یا چند محدوده نگهبان اولیه دیگر دارای اشتراک بود، دو محدوده‌ای که مؤلفهٔ y یال شمالی‌شان بیش‌تر باشد را انتخاب می‌کنیم.

در ادامه به بررسی نواحی مختلف ایجاد شده در چندضلعی متعامد P پرداخته و پس از بررسی درخواست‌های آن‌ها نگهبان(های) جدید را در صورت لزوم درج می‌کنیم.

پیمایش را از بیش‌ترین اولویت که بالاترین r-Star است آغاز می‌کنیم، به این‌صورت که مستطیل‌های r-Star جاری را نسبت به اولین نگهبان اولیه به‌ترتیب اولویت (از بالا به پایین) برای دیده شدن بررسی می‌کنیم که مراحل بررسی و تعیین نگهبان در صورت لزوم بدین‌صورت است:

۱. ابتدا بررسی برروی بالاترین و پایین‌ترین مستطیل از r-Star جاری صورت می‌گیرد که در صورت دیده شدن به معنای آن است که تمام r-Star قابل رویت است و نیازی به درخواست نگهبان جدید نیست و باید به‌سراغ r-Star بعدی برویم.

۲. اکنون با توجه به مرحلهٔ قبل که آیا بالاترین مستطیل دیده شده و یا پایین‌ترین مستطیل، یکی از مراحل زیر انجام می پذیرد:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

- اگر پایین‌ترین مستطیل دیده شده باشد، بررسی از مستطیل ماقبل آخر به‌سمت بالا آغاز می‌شود تا جایی‌که دیگر نتواند مستطیلی را رویت کند و در نتیجه اجتماع مستطیل‌های دیده شده را به‌عنوان r-Star فرعی ذخیره کرده و r-Star جاری را با توجه به مستطیل‌های باقی‌مانده بروز می‌کنیم و ادامه بررسی با نگهبانان عادی به‌ترتیب اولویت صورت می‌گیرد.
- اگر بالاترین مستطیل دیده شده باشد بررسی از مستطیل دوم به‌سمت پایین آغاز می‌شود تا جایی‌که دیگر نتواند مستطیلی را رویت کند و در نتیجه اجتماع مستطیل‌های دیده نشده را به‌عنوان r-Star فرعی ذخیره کرده و نگهبان جاری را نسبت به مستطیل‌های دیده شده بروز می‌کنیم.

۳. اگر هیچ‌یک از مستطیل‌های بالا یا پایین از r-Star جاری به‌وسیلهٔ هیچ‌کدام از نگهبانان اولیه قابل مشاهده نباشد، r-Star جاری باید با نگهبانان عادی که در طول پیمایش چندضلعی P ایجاد می‌شوند، بررسی شود. اما اگر r-Star جاری اولین r-Star باشد ناگزیر نگهبان جدیدی درخواست شده و در محدوده مستطیلی خود قرار می‌گیرد و اولویتش بعد از نگهبانان اولیه و نسبت به یال شمالی r-Star مربوطه‌اش به‌عنوان نگهبان عادی تعیین می‌شود.

در حالت دوم، در صورتی‌که بخش پایین یک r-Star جدا شود باعث به‌وجود آمدن یک r-Star با یال شمالی فرعی شده که به آن‌ها r-Star های فرعی می‌گوییم و باید اولویت جدیدی برای آن در نظر گرفته شود ولی اجازه ندارد تا پایان کار درخواست نگهبان بدهد. در ادامه انواع r-Star هایی که باید تا پایان کار بررسی r-Star های چندضلعی متعامد P ، منتظر بمانند بدین‌قرار است:

۱. چندضلعی متعامد r-Star والد
۲. چندضلعی متعامد r-Star فرزند
۳. چندضلعی متعامد r-Star فرعی

هر کدام از سه بخش ذکر شده در بالا نباید تا اتمام کار بررسی دیگر r-Star ها بررسی شوند. پس از اتمام بررسی‌ها و درخواست‌ها و درج نگهبانان مورد نیاز، موارد مذکور درخواست‌های خود را بر طبق دستورالعمل بخش ۴-۳-۱ اعلام می‌کنند و در صورت دیده نشدن به‌وسیلهٔ نگهبانان موجود، نگهبان جدیدی درج می‌شود. هر چندضلعی باید به نگهبانان با توجه به اولویت‌شان درخواست دهد. اولویت نگهبانان درج شده بدین‌ترتیب آمده است:

۱. نگهبانان اولیه به‌ترتیب از بالا به پایین
۲. نگهبانان عادی به‌ترتیب از بالا به پایین

در مرحلهٔ بعد نوبت به r-Star بعدی در یک سطح پایین‌تر می‌رسد که با توجه به نگهبانان درج شده و اولویتشان درخواست‌های خود را ارسال می‌کند. اگر هیچ‌یک از نگهبانان اولیه قادر به دیدن بالاترین یا پایین‌ترین مستطیل آن نشدند، r-Star جاری درخواست خود را برای دیده شدن به نگهبانان عادی (در صورت وجود) می‌دهد که اگر باز هم دیده نشد باید برای خود نگهبانی بگیرد و آن را به لیست نگهبانان عادی اضافه کند.

تبصره ۳: اگر یک r-Star فقط یک مستطیل داشته باشد و بن‌بست نباشد اجازه درخواست نگهبان را در ابتدا ندارد و باید به انتهای لیست r-Star های اصلی انتقال داده شوند و منتظر پایان درخواست‌های این دسته بمانند.

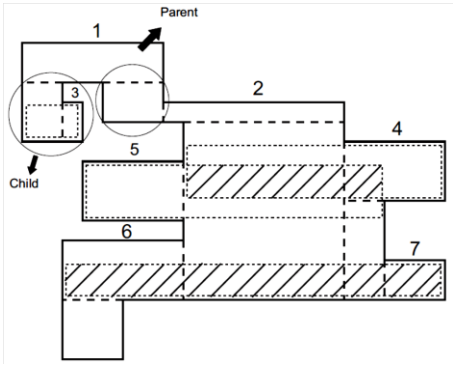
در شکل ۴، r-Star های ۳، ۴، ۵ و ۷ بن‌بست بوده است و باید برای آن‌ها نگهبانانی به‌صورت افزایشی درج شود. چنان‌که در شکل می‌بینید ابتدا r-Star شمارهٔ ۳ درخواست نگهبان افزایشی هد که محدوده‌اش مشخص می‌شود. در

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

مرحلهٔ بعد r-Star شمارهٔ ۴ درخواست نگهبان افزایشی خود را صادر کرده که باید با نگهبان اولیه قبلی برای وجود اشتراک بررسی شود که در شکل ۴ پاسخ بررسی منفی است و یک نگهبان به آن اختصاص داده می‌شود. سپس r-Star شمارهٔ ۵ درخواست می دهد که نتیجهٔ بررسی اشتراک با نگهبانان اولیه قبلی در این مرحله مثبت است و باید مستطیل اشتراکی بین آن دو را به‌عنوان نگهبان اولیه ذخیره کرده و عامل اشتراک حذف شود و برای هر دوی آن‌ها فقط یک نگهبان درج می‌شود.

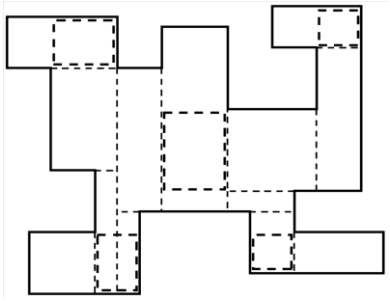
چنان‌که گفته شد، مستطیل(های) دیده شده از یک r-Star به‌وسیلهٔ یکی از نگهبانان ممکن است به r-Star صاحب آن نگهبان متصل نباشند ولی در محدودهٔ مستطیل نگهبان تأثیرگذار است. مثلاً r-Star شماره ۶ در شکل ۴ پس از درخواست‌های متوالی به نگهبانان اولیه، نگهبان اولیه سوم که r-Star شمارهٔ ۶ است پاسخ مثبت داده و با بروزرسانی محدوده نگهبانش قادر است تمام r-Star شمارهٔ ۵ را ببیند.

هر یک از نگهبانان اگر به‌طور کامل و یا مستطیل(های) بالای یک r-Star را ببینند اتمام پیمایش برای r-Star جاری است و به پیمایش r-Satr بعدی می‌پردازیم.



شکل ۴. یک چندضلعی متعامد ساده به‌همراه دو نگهبان اولیه

چنان‌که در شکل ۴ مشاهده می‌کنید r-Star شمارهٔ ۱ باعث به‌وجود آمدن والد و فرزند شده که r-Star والد فقط شامل یک مستطیل است که در شکل، با کلمه Parent مشخص شده و دارای دو فرزند است که در شکل با دایره و کلمه Child نشان داده شده‌اند. r-Star های فرعی نیز مانند r-Star های فرزند دارای یال شمالی فرعی هستند که در مرحلهٔ تخصیص نگهبان این دو دسته از r-Star ها با هم ادغام شده و نسبت به مؤلفهٔ y یال شمالی از پایین به بالا مرتب می‌شوند و سپس درخواست نگهبان خود را طبق الگوریتم پیشنهادی اعلام می‌کنند. در شکل ۵ برای یک چندضلعی متعامد با هر چهار نوع فرورفتگی، پس از مستطیل-بندی و افراز، حداقل تعداد نگهبانان مورد نیاز که در شکل با مستطیل‌های خط‌چین مشخص شده‌اند، تعیین شده است.

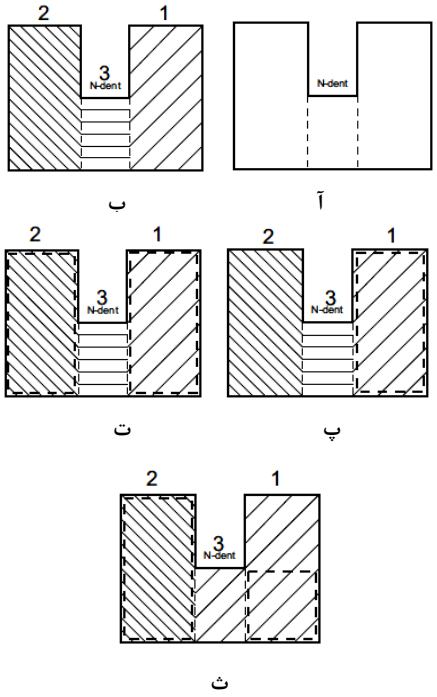


شکل ۵. چندضلعی ساده متعامد با همه فرورفتگی‌ها که حداقل تعداد نگهبان را با مستطیل‌های خط چین، برای نواحی نیازمند نگهبان نشان می‌دهد

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

در شکل ۶ مراحل پیمایش بعد از مستطیل‌بندی در یک چندضلعی متعامد با فرورفتگی شمالی را مشاهده می‌کنیم که در نهایت به دو نگهبان نیاز دارد که با مستطیل های خط چین نشان داده شده است و هم‌چنین نواحی قابل رویت برای هر نگهبان با هاشورهای متفاوت مشخص شده است.

چنان‌که مشاهده شود در شکل ۶ ب، ابتدا سه r-Star افراز شده است که اولویت‌هایشان نیز به‌ترتیب از ۱ تا ۳ مشخص شده است و در قسمت پ، محدودهٔ اولین نگهبان نسبت به اولین r-Star تعیین شده است. در قسمت ت r-Star با اولویت پایین‌تر نسبت به مستطیل نگهبان اول بررسی شده که به‌دلیل دیده نشدن به‌وسیلهٔ آن، یک نگهبان درخواست کرده و هم‌چنین در قسمت ث هم به‌دلیل رویت کامل r-Star شمارهٔ ۳ به‌وسیلهٔ نگهبان اول نیازی به درج نگهبان نیست و فقط در مستطیل نگهبان مربوط به r-Star شمارهٔ ۱ به‌روز رسانی انجام شده و در نتیجه تمام چندضلعی برای دیده شدن حداقل به دو نگهبان نیاز دارد.



شکل ۶. مراحل پیمایش در یک نمونه شکل با فرورفتگی نوع N و تعین حداقل تعداد نگهبان.

۴-۳-۱. نحوه درخواست‌های r-Star های والد و فرزند و فرعی برای نگهبان

مطابق آن‌چه بیان شد، بالاترین اولویت پس از ***r-Star*** های عادی برای درخواست نگهبان، ***r-Star*** های والد هستند و موضوع بسیار مهم برای تخصیص نگهبان به والدها و فرزندها، اولویت پایین به بالای آن‌هاست. ***r-Star*** های فرعی نیز شباهت بسیاری به ***r-Star*** های فرزند دارند و دلیل این شباهت یال شمالی فرعی آن‌هاست که هم می‌توانند از بالا و هم از پایین دیده شوند. در نتیجه در الگوریتم پیشنهادی این دو دسته از ***r-Star*** ها را با یک‌دیگر به‌صورت صعودی (نسبت به مؤلفه ***y*** یال شمالی) ادغام کرده و در یک دسته قرار می‌دهیم و می‌توان از ***r-Star*** های فرعی به عنوان "فرزند خوانده" نام برد.

پس در ابتدا ***r-Star*** های والد درخواست نگهبان خود را ابتدا برای نگهبانان اولیه و سپس برای نگهبانان عادی ارسال کرده و طبق روشی که توضیح داده شد بررسی می‌شوند و در صورت دیده نشدن توسط هیچ‌کدام از آن‌ها،

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

نگهبان جدیدی دریافت می کنند. در مرحلهٔ بررسی والدها برای تخصیص نگهبان، درخواستی به والد دیگری ارسال نمی‌شود که ممکن است محدوده‌های نگهبان مشترکی نیز به‌وجود آید، اما باید تا انتهای درخواست‌های ***r-Star*** های فرزند و فرعی صبر کنند و در انتهای الگوریتم اگر اشتراکی باقی‌مانده باشد به‌عنوان مستطیل نگهبان محاسبه شده و عوامل اشتراک حذف می‌شوند.

r-Star های والد اگر نگهبان جدید دریافت کنند آن را در لیست جدید به نام نگهبانان والد قرار می‌دهند ولی اگر ***r-Star*** ها فرزند و یا فرعی که در یک لیست "فرزند-فرعی" به‌صورت ادغام شده قرار دارند، نگهبان جدیدی بگیرند، آن را به انتهای لیست نگهبانان عادی اضافه می‌کنند. سپس دسته ***r-Star*** های ادغام شده فرزند-فرعی به‌ترتیب از پایین‌ترین به بالاترین درخواست‌های خود را ابتدا به نگهبانان اولیه، سپس به نگهبانان عادی و در آخر به نگهبانان والد اعلام می کنند و در صورت دیده نشدن توسط این سه دسته، نگهبان جدید دریافت کرده و در به انتهای لیست نگهبانان عادی اضافه می‌کنند. تفاوت عمده این دسته از ***r-Star*** ها با بقیه، این‌است که آن‌ها به ***r-Star*** های فرعی تقسیم نمی‌شوند و همه قسمت‌ها باید بررسی شوند و در صورت دیده شدن نگهبان را بروز می‌کنند. یعنی اگر از بالا دیده شوند و قسمت پایینی آن‌ها جدا شود، در همان مرحله آن را به‌وسیلهٔ نگهبانان دیگر نیز بررسی کرده و در صورت دیده نشدن به آن نگهبان اختصاص می‌دهند. در انتهای درخواست های والدها و فرزندها و فرعی ها، هر نگهبان والد با نگهبانان والد قبلی از لحاظ اشتراک بررسی می‌شود و در صورت داشتن اشتراک، مستطیل اشتراکی به‌عنوان نگهبان نهایی ثبت شده و عوامل اشتراک حذف می‌شوند. در نتیجه تعداد نگهبانان والد در انتها به تعداد قبلی (نگهبانان اولیه و عادی) اضافه می‌شود.

۴-۴. بیان و توصیف شبه کد الگوریتم پیشنهادی Min_rStar_Cover

این الگوریتم، یک چندضلعی متعامد ساده را از ورودی می‌گیرد پس از مستطیل‌بندی چندضلعی اولیه و افراز آن به r-Starها و تعیین نگهبان برای r-Star های درخواست دهنده، حداقل تعداد نگهبانان را به‌همراه مکان قرارگیری‌شان تعیین می‌کند.

هنگام گرفتن ورودی، مختصات رئوس و توالی یال‌ها به‌همراه نوع‌شان به‌صورت پادساعت‌گرد در یک ساختمان داده ذخیره می‌شود. ابتدا یال‌های فرعی عمودی و افقی و هم‌چنین رئوس فرعی ذخیره می‌شوند. بعد عملیات جداسازی r-Star ها به‌همراه ذخیره‌سازی مستطیل‌های هر r-Star به‌صورت جداگانه ادامه یافته، بن‌بست‌ها نیز تعیین می‌شوند. سپس در ابتدا به درخواست‌های بن‌بست‌ها و سپس به درخواست‌های r-Star ها برای نگهبان‌ها به‌ترتیب اولویت‌شان (از بالاترین به پایین‌ترین) پاسخ داده می‌شود. با توجه به مستطیل‌بندی مطرح شده در این مقاله، هر r-Star افراز شده عادی دارای یک یال شمالی خواهد بود.

الگوریتم Min_rStar_Cover: پوشش چندضلعی متعامد ساده با حداقل تعداد نگهبان

ورودی: یک چندضلعی متعامد ساده (P)

خروجی: حداقل تعداد نگهبانان و تعیین محدوده مستطیلی برای آن‌ها

بخش پیش پردازش الگوریتم:

ذخیره‌سازی مختصات رئوس و نوع یال‌های‌شان

ذخیره‌سازی یال‌های شمالی به‌صورت نزولی (نسبت به مؤلفهٔ y)

ذخیره‌سازی یال‌های فرعی عمودی برای همهٔ یال‌های غربی و شرقی

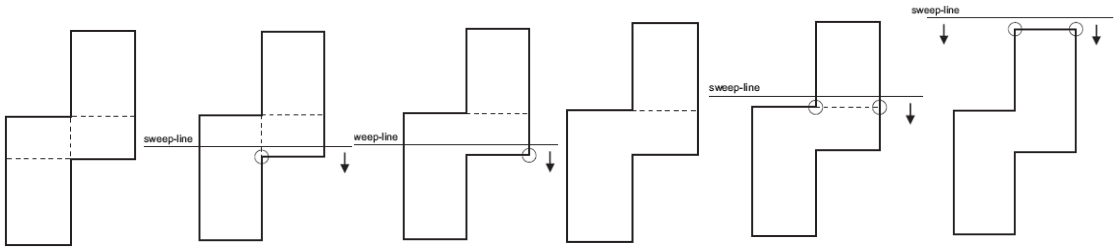
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

ذخیره‌سازی یال‌های فرعی افقی برای همهٔ یال‌های جنوبی
ذخیره‌سازی r-Star های اصلی، فرزند، والد، فرعی
ذخیره‌سازی مستطیل‌های r-Star های اصلی، فرزند، والد، فرعی
ذخیره‌سازی مستطیل‌های بن‌بست
آرایه‌هایی برای نگه‌داری نگهبانان اولیه، والد، عادی

مراحل الگوریتم در حالت کلی:

۱. مستطیل‌بندی چندضلعی اولیه P
۲. افراز چندضلعی متعامد اولیه مستطیل‌بندی شده به چندضلعی‌های متعامد r-Star
۳. تعیین محدوده نگهبان برای چندضلعی‌های کوچک (مستطیل نگهبان)
۴. پیمایش r-Star ها و تعیین حداقل تعداد نگهبان
۵. تخصیص نگهبان برای r-Star های والد، فرزند و فرعی

مستطیل‌بندی با روش آشنای خط جاروب است که باعث می‌شود در مرحلهٔ بعد بتوانیم چندضلعی اولیه را به تعدادی چندضلعی کوچک‌تر که هرکدام یک r-Star است افراز کنیم. با شروع حرکت خط جاروب از بالا به پایین و در نظر گرفتن اولویت از راست به‌چپ محل تلاقی خط جاروب با رئوس P را به‌دست می‌آوریم:



شبه‌کد الگوریتم پیشنهادی:

Algorithm **Min_rStar_Cover** (P)
Input: A simple orthogonal polygon P
Output: A minimum number of r-visibility guards
1. **Sort** the N-edges of P by decreasing y-coordinate
2. **Put** the N-edges in an array
3. **For each** N-edge e **do**
4. **Sweep** from e to bottom
5. **Create** an orthogonal polygon
6. **while** (not reached to S-edge of last rectangle) **do**
7 **Create** orthogonal polygon
8. **Put** R as the new orthogonal polygon
9. **RG** ← **FIND_RECTANGLE_GUARD** (R)
10. **Initialize** an empty stack
11. **Push** R in the stack
12. **Check** whether R can see polygons inside the stack or not
13. **if** it can be seen **then**
14. **Remove** RG
15. **Update** the rectangle guard for R

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

در خط ۱ یال‌های شمالی چندضلعی P به‌صورت نزولی روی مؤلفهٔ y مرتب می‌شوند و در خط ۲ در یک آرایه قرار می‌گیرند. در خطوط ۳ تا ۱۵ با یک خط جاروب از بالا به پایین نگهبانان مورد نیاز را پیدا کنیم بدین‌ترتیب که یک نگهبان برای بالاترین چندضلعی افراز شده پیدا کرده و به سراغ چندضلعی بعدی در یک سطح پایین‌تر می‌رویم (اگر بیش‌تر از یک چندضلعی در یک سطح قرار داشته باشند، راست‌ترین بین آن‌ها ابتدا انتخاب می‌شود) و محدوده‌اش را با نگهبان یا نگهبانان قبل بررسی می‌کنیم، خطوط ۶ تا ۷، که آیا تمام یا قسمت و یا قسمت‌هایی (منظور از قسمت، همان مستطیل‌های درون چندضلعی‌هاست) از آن به‌وسیلهٔ نگهبانان قبلی دیده می‌شود یا خیر. اگر تماماً دیده شد نگهبان جدید درخواست نمی‌شود و با چندضلعی افراز شده بعدی ادامه پیدا می‌کند، و اگر قسمتی از آن دیده شد، از چندضلعی جاری جدا شده و به مالکیت نگهبان مذکور در می‌آیند و قسمت پایینی دیده نشده به‌صورت یک چندضلعی جدید افراز شده در می‌آید و منتظر می‌ماند تا نوبتش فرارسد که دوباره مورد پردازش قرار بگیرد ولی اگر تماماً دیده نشود درخواست نگهبان جدید می‌شود. این مرحلهٔ تا زمانی تکرار می‌شود که تمام چندضلعی‌های افراز شده بررسی شوند (خط ۸). در خط ۹ محل قرارگیری نگهبانان (تابع **FIND_RECTANGLE_GUARD**) با توجه به بالاترین یال جنوبی، راست‌ترین یال غربی، چپ‌ترین یال شرقی و تک‌یال شمالی به‌صورت یک مستطیل تعیین شده و مستطیل نگهبان نامیده می‌شود. در خطوط ۱۰ تا ۱۵ پیمایش یک چندضلعی افراز شده برای دیده شدن به‌وسیلهٔ نگهبانان قبلی، نسبت به مستطیل نگهبان آن صورت می‌گیرد به این صورت که ابتدا پایین‌ترین یال جنوبی r-Star افراز شده نسبت به مستطیل نگهبان مذکور بررسی شده که آیا دیده می‌شود یا خیر. اگر دیده شد به معنای آن است که تمام آن دیده می‌شود وگرنه از بالاترین مستطیل آن بررسی آغاز می‌شود تا به پایین، و هر تعداد مستطیل که دیده شد، به‌صورت فرضی از آن چندضلعی جدا شده و به چندضلعی مورد بحث می‌پیوندد و در نتیجه مستطیل نگهبان آن بروزرسانی می‌شود و این عمل تا انتها ادامه پیدا می‌کند. فرایند به‌روز رسانی که در خط ۱۵ مطرح شده بدین‌صورت است که این r_Star ها که یکی پس از دیگری فراخوانی می‌شوند شامل r_Star های اصلی، r_Star های والد و r_Star های فرزند و فرعی است. در ابتدا هر r_Star اصلی را بررسی می کند که آیا تک مستطیلی است یا خیر؟ اگر بود درخواستی برای نگهبان داده نمی‌شود و آن را به انتهای لیست r-Star های اصلی انتقال داده تا در انتها به درخواستش برای نگهبان پاسخ داده شود. مستطیل‌های r-Star ورودی با نگهبانان اولیه به‌ترتیب اولویت، بررسی می‌شوند که در صورت دیده شدن بالاترین و پایین‌ترین مستطیل فقط نیاز به بروزرسانی نگهبان اولیه جاری داریم و باید به بررسی r-Star بعدی بپردازیم ولی اگر فقط بالاترین مستطیل دیده شود، مستطیل‌های r-Star جاری از بالا به پایین بررسی می‌شوند و نگهبان، نسبت به مستطیل‌های دیده شده بروز شده و مابقی r-Star به جمع r-Star های فرعی می‌پیوندد و باز هم به سراغ r-Star بعدی می‌رویم. اگر پایین‌ترین مستطیل دیده شده باشد، مستطیل‌های r-Star مورد نظر از پایین به بالا تا جایی که دیده شوند را به‌صورت یک r-Star به لیست r-Staهای فرعی اضافه کرده و r-Star جاری را با توجه به مستطیل‌های باقی‌مانده بروز می‌کند.

تابع **FIND_RECTANGLE_GUARD** برای تعیین محدوده مستطیل نگهبان یک r-Star است و چهار رأس برای محدودهٔ مستطیل شکل نگهبان آن را تعیین می‌کند. اگر r-Star ورودی فقط یک یال شرقی داشته باشد و آن یال به‌طور کامل فرعی باشد سپس یال شرقی را به‌سمت راست تا یکی از رئوس آن یک یال شرقی از P را قطع کند گسترش می‌دهیم. اگر یال شمالی r-Star فرعی باشد سپس یال شمالی به‌روز شده را به‌سمت بالا تا یکی از رئوس آن یک یال شمالی از P را قطع کند گسترش می‌دهیم. وگرنه اگر r-Star ورودی فقط یک یال غربی داشته باشد و آن

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

یال، به‌طور کامل فرعی باشد سپس یال غربی را به‌سمت چپ تا یکی از رئوس آن یک یال غربی از P را قطع کند گسترش می‌دهیم. اگر یال شمالی r-Star فرعی باشد سپس یال شمالی به‌روز شده را به‌سمت بالا تا یکی از رئوس آن یک یال شمالی از P را قطع کند گسترش می‌دهیم. اکنون رئوس محدوده مستطیل شکل نگهبان را چنین می‌یابیم:

RW: راست‌ترین یال غربی r-Star ورودی، LE: چپ‌ترین یال شرقی r-Star ورودی

TS: بالاترین و چپ‌ترین یال جنوبی r-Star ورودی، N: یال شمالی r-Star ورودی

A: نقطهٔ تقاطع امتداد یال LE و یال N، B: نقطهٔ تقاطع امتداد یال RW و یال N

Cx : برابر با مقدار x خط عمودی LE شود Cy *: برابر با* مقدار y خط افقی TS شود.

Dx *: برابر با* مقدار x نقطه B شود. Dy *: برابر با* مقدار y نقطه D شود.

مستطیلی با رئوس A و B و C و D همان مستطیل نگهبان مد نظر است.

قضیهٔ ۱: الگوریتم ***Min_rStar_Cover***، پوشش دید مستطیلی چندضلعی‌های متعامد ساده با حداقل ***r-Star*** ها را به درستی محاسبه می‌کند.

اثبات: در الگوریتم ***Min_rStar_Cover*** ابتدا عملیات مربوط به مستطیل‌بندی انجام می‌شود. ابتدا مختصات رئوس و نوع یال‌ها را توسط توالی آنها به‌صورت پادساعت‌گرد در یک ساختمان داده به‌نام ***P*** ذخیره می‌کنیم. سپس یال‌های شمالی در یک آرایه دوبعدی به‌نام ***N*** به‌صورت نزولی مرتب می‌شوند. پاره خط‌هایی عمودی از رأس پایینی یال‌های شرقی و غربی ***P*** در راستای آن‌ها امتداد داده تا ***P*** را در یک یال جنوبی قطع کنند. آن پاره خط را یال فرعی عمودی و آن نقطه تقاطع را رأس فرعی جنوبی می‌نامیم. در مرحلهٔ بعد به‌صورت مشابه، به‌وسیلهٔ یال‌های جنوبی که از درجهٔ ۲ باقی‌مانده‌اند، یال‌های فرعی افقی پدید می‌آیند با این تفاوت که یال‌های جنوبی مذکور را در راستای افق تا یکی از یال‌های اصلی ***P*** و یا یال فرعی عمودی را قطع کند امتداد می‌دهیم. در ادامه برای یال‌های شمالی مرتب شده در آرایه ***N*** در دو حلقه تکرار (یک حلقه روی یال‌های شمالی و حلقه بعدی برای تعیین و ذخیره‌سازی مستطیل‌های هر ***r-Star***) ابتدا چهار رأس مستطیل اول را پیدا کرده و به‌وسیلهٔ یال فرعی افقی که قسمتی از یال جنوبی آن را تشکیل می‌دهد به‌دنبال مستطیل بعدی رفته و این کار را تا زمانی ادامه می‌دهد که یکی از شرایط ذیل رخ دهد:

- به مستطیلی برسد که تمام یال جنوبی آن، همه یا قسمتی از یال جنوبی ***P*** باشد.
- به مستطیلی برسد که بیش از یک یال فرعی افقی در یال جنوبی خود داشته باشد.

اگر حالت اول رخ دهد اجتماع مستطیل‌های پیمایش شده را به‌عنوان یک ***r-Star*** عادی و اگر حالت دوم رخ دهد اجتماع آن‌ها را به‌عنوان ***r-Star*** والد ذخیره می‌کنیم و یال‌های فرعی افقی مذکور را به‌عنوان یال‌های شمالی فرزند در نظر گرفته تا مراحل فوق را پس از اتمام یال‌های شمالی برای آن‌ها تکرار کند و ***r-Star*** های فرزند پدید آیند.

در ادامه پس از مشخص کردن مستطیل نگهبان بن‌بست‌ها با تابع **FIND_RECTANGLE_GUARD** بررسی می‌کنیم که آیا نگهبان اولیه جاری با نگهبانان اولیه قبلی اشتراک دارد یا خیر. اگر اشتراک داشته باشد، مستطیل نگهبان اشتراکی روی هر دو نگهبان عامل اشتراک بازنویسی می‌شود. سپس به بررسی ***r-Star*** های ورودی برای دیده شدن به‌وسیلهٔ نگهبانان اولیه می‌پردازیم. البته اگر ***r-Star*** ورودی (فرزند-فرعی) باشد و توسط نگهبانان عادی نیز دیده نشود برای بررسی به‌وسیلهٔ نگهبانان والد فرستاده می‌شود. در الگوریتم ابتدا بررسی می‌شود که آیا ***r-Star*** ورودی بن‌بست است یا خیر، که اگر بن‌بست باشد باید نگهبانش به‌صورت افزایشی در نظر گرفته شود. در مرحلهٔ اول از سمت یال فرعی عمودی آن، عملیات گسترش را انجام داده و در ادامه مستطیل نگهبان را چنان‌که در بخش ۲-۴ گفته

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

شد توسط یال شمالی، راست‌ترین یال غربی، چپ‌ترین یال شرقی و بالاترین یال جنوبی به‌دست می‌آوریم. در انتها اشتراک نگهبانان مستطیل‌های نگهبان ***r-Star*** های والد با یک‌دیگر بررسی شده و در صورت وجود اشتراک، عوامل اشتراک حذف و مستطیل نگهبان اشتراکی به‌عنوان نگهبان جدید ثبت می‌شود.

۴-۵. پیچیدگی زمانی الگوریتم

قضیه ۲: پیچیدگی زمانی بدترین حالت الگوریتم **Min_rStar_Cover**، $O(n^5)$ است.

اثبات: با فرض این‌که $\mathbf{n}$ تعداد رئوس چندضلعی P باشد، ذخیره توالی یال‌های چندضلعی که تعدادشان n است در زمان$O(n)$ صورت می‌گیرد. در مرحلهٔ مستطیل‌بندی که در مجموع، امتداد یال‌های شرقی و غربی را در ابتدا و یال‌های جنوبی را پس از آن به‌دنبال دارد، برای یافتن نقطه تقاطع برای هر یک از یال ها به زمان اجرای $O(n)$ نیاز داریم که برای تعداد n یال برابر با $O(n^2)$ می‌شود. مرحلهٔ بعد، عملیات افراز ***r-Star*** ها را شامل می‌شود که برای هر یال شمالی اصلی و یا فرزند، یافتن مستطیل‌های متوالی در راستای عمود تا رسیدن به انتهای چندضلعی P و یا یال‌های شمالی فرزند نیاز به زمان $O(n)$ داریم. حال آن‌که چون تعداد یال‌ها را $\mathbf{n}$ فرض کرده‌ایم در نتیجه به زمان اجرای $O(n^2)$ نیازمندیم.

مرحله سوم الگوریتم، مرحلهٔ تخصیص نگهبان است که به دو قسمت مجزا تقسیم می‌شود. یک قسمت تخصیص نگهبانان اولیه است که با در نظر گرفتن تعداد n بن بست به‌دلیل این‌که هر نگهبان اولیه با نگهبانان اولیه قبل از خود از لحاظ داشتن اشتراک بررسی می‌شود، در زمان $O(n^2)$ انجام می‌شود و دیگری تخصیص نگهبان برای انواع گوناگون ***r-Star*** ها است. تعداد هر دسته از ***r-Star*** ها حداکثر n است. بررسی هر ***r-Satr*** ابتدا به‌وسیلهٔ بالاترین و پایین‌ترین مستطیل آن صورت می‌گیرد. با توجه به این‌که بررسی دیده شدن هر مستطیل در زمان $O(1)$ انجام می‌شود، در بهترین حالت که تعداد n تا ***r-Star*** با n نگهبان اولیه به‌طور کامل دیده شوند، به زمان $O(n^2)$ خواهیم رسید. اما اگر در حالتی دیگر که می‌توان آن را حالت متوسط نامید به بررسی مستطیل های ***r-Star*** ها از بالا بپردازیم، در این حالت با در نظر گرفتن تعداد n مستطیل به زمان اجرای $O(n^3)$ نیاز داریم. ولی اگر حالت سوم به عنوان بدترین حالت رخ دهد، مستطیل های ***r-Star*** از پایین قابل رویت باشند، که در آن حالت نیز اگر تعداد n مستطیل با n نگهبان عادی دیده شود زمان $O(n^2)$ صرف خواهد شد که در نتیجه در مجموع به زمان اجرای زیر دست می‌یابیم $O(n^2) * O(n^3) = O(n^5)$. از این رو، پیچیدگی در بهترین حالت $O(n^2)$، در حالت متوسط $O(n^3)$ و در بدترین حالت $O(n^5)$ اتفاق می‌افتد.

۴-۶. پیچیدگی فضایی الگوریتم پیشنهادی

قضیه ۳: پیچیدگی فضایی الگوریتم **Min_rStar_Cover**، $O(n^2)$ است.

اثبات: در این بخش ساختار داده‌های استفاده شده در الگوریتم پیشنهادی را بررسی می‌کنیم. هر کدام از رئوس چندضلعی متعامد P را با دو مقدار به‌ازای مؤلفه‌های مختصات x و y مشخص می‌کنیم و هر کدام را می‌توانیم با یکی از انواع یال‌های شمال، جنوبی، شرقی و یا غربی نشان دهیم. پس برای هر رأس سه مقدار ذخیره می‌شود که عبارتند از مؤلفهٔ x ، مؤلفهٔ y و نوع یال. در واقع از بالاترین و راست‌ترین رأس به‌صورت پادساعت‌گرد توالی یال‌ها را دنبال کرده و یال‌ها را تعیین می‌کنیم. به این‌ترتیب که دومین رأس پیمایش شده را با برچسب یال شمالی در نظر می گیریم و به‌همین صورت ادامه می‌دهیم. یعنی هر دو مقدار متوالی در این آرایه مفهوم یک یال را دارد که نوع آن در رأس دوم

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

درج شده است. پس برای ذخیره یال‌های چندضلعی P به یک آرایهٔ دوبعدی با فضای $3n$ نیاز داریم. برای رئوس و یال‌های فرعی، بعد از مرحله مستطیل‌بندی نیز به فضایی بیش‌تر از فضای ذخیره‌سازی رئوس اصلی نیاز نداریم و به‌همین دلیل از محاسبه آن صرف‌نظر می‌کنیم.

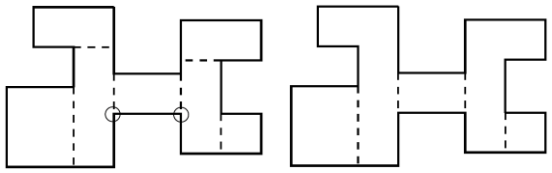
در مرحلهٔ بعد که مرحلهٔ افرازپذیری ***r-Star*** هاست، برای هر ***r-Star*** مستطیل‌هایی را ذخیره کرده که برای هر مستطیل چهار رأس را نگه‌داری می‌کنیم و نیاز به ذخیرهٔ هشت مؤلفه (دو مؤلفه برای هر رأس) برای به‌ازای هر مستطیل داریم. از طرفی تعداد مستطیل‌های هر ***r-Star*** را به‌طور تقریبی حداکثر $n/2$ در نظر می‌گیریم و هر مستطیل را با هشت مؤلفه مختصات رئوس و چهار مشخصه برای بن‌بست، والد، فرزند و شماره اولویت ذخیره کنیم به‌مقدار حافظه $6n$ برای آن‌ها نیاز داریم. تعداد ***r-Star*** ها را نیز در بدترین حالت $n/2 - 1$ است که در نتیجه برای ذخیره ***r-Star*** ها به $n^2 - 2n$ حافظه برای ذخیره‌سازی ***r-Star*** ها نیاز داریم. اگر تعداد نگهبانان اولیه را حداکثر $n/2$ در نظر بگیریم و برای هر کدام هشت مؤلفه ذخیره کنیم به $4n$ فضا برای ذخیره آن‌ها نیاز داریم. تعداد نگهبانان عادی و والد را نیز می‌توان حداکثر $n/2$ در نظر گرفت که به‌صورت مشابه به حداکثر $4n$ فضای ذخیره‌سازی نیازمندیم. در ادامه ***r-Star*** های فرعی که به‌وجود می‌آیند در مراحل قبل در محاسبهٔ فضای ذخیره‌سازی ***r-Star*** ها شرکت کرده‌اند. پس از جمع‌بندی فضاهای مورد نیاز برای نگه‌داری داده‌های چندضلعی متعامد P خواهیم داشت:
مجموع فضاهای ذخیره‌سازی الگوریتم پیشنهادی

$$n + n^2 - 2n + 4n + 4n = n^2 - 7n$$

در نتیجه پیچیدگی فضایی الگوریتم پیشنهادی را کران بالای مقدار بالا در نظر می‌گیریم که برابر $O(n^2)$ است.

۴-۷. مستطیل‌بندی چندضلعی‌های ساده متعامد

در ابتدا لیستی از تمام یال‌های چندضلعی اولیه P به‌همراه رئوسشان ذخیره می‌شود. سپس در مرحله اول مستطیل‌بندی پاره‌خط‌هایی از رئوس پایینی یال‌های شرقی و غربی که با یال مجاورشان زاویهٔ ۲۷۰ درجه دارند، در راستای عمود امتداد داده شده تا جایی‌که چندضلعی P را در یک نقطه قطع کند که تا این‌جا یال‌های عمودی فرعی به همراه رئوس فرعی خود ذخیره شده‌اند. در مرحلهٔ بعد، از آن رئوس یال‌های جنوبی که با یال مجاور زاویهٔ ۲۷۰ درجه دارند و درجهٔ آن‌ها ۲ است پاره خط‌هایی به‌سمت داخل چندضلعی P در راستای افق امتداد می‌دهیم تا جایی‌که یکی از یال‌های فرعی و یا اصلی چندضلعی P را در یک نقطه قطع کند که در این مرحله یال‌های افقی فرعی نیز به‌همراه رئوس فرعی خود ذخیره می‌شوند (تمام رئوس فرعی ایجاد شده را به‌عنوان رئوس جنوبی می‌شناسیم) و کار مستطیل‌بندی چندضلعی P به اتمام می‌رسد. در شکل ۷ ترتیب مراحل مستطیل‌بندی یک چندضلعی متعامد ساده به‌ترتیب در قسمت‌های آ و ب مشاهده می‌شود.

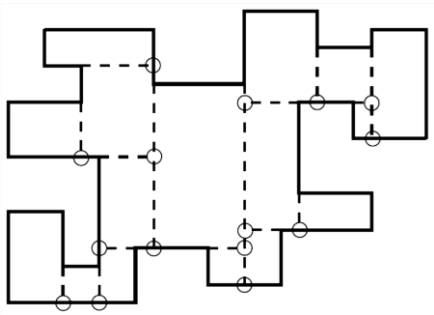


ب آ

شکل ۷. مراحل مستطیل‌بندی یک چندضلعی متعامد ساده که یال‌های فرعی در آن با خط‌چین نشان داده شده‌اند.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

با توجه به الگوریتم پیشنهادی در این مقاله، مستطیل‌های چندضلعی مستطیل‌بندی شده، در مرحلهٔ افراز ***r-Star*** ها و نه در هنگام مستطیل‌بندی شناسایی شده و ذخیره می‌شوند. در شکل ۸ چندضلعی متعامد ساده مستطیل‌بندی شده که یال‌های فرعی و رئوس فرعی ایجاد شده در آن مشخص شده‌اند را با تمام فرورفتگی‌ها مشاهده می‌شود.



شکل ۸. چندضلعی متعامد ساده مستطیل‌بندی شده که یال‌های فرعی در آن با خط چین و رئوس فرعی با دایره‌های کوچک نمایش داده شده است.

۵. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با کارهای انجام شده قبلی

الگوریتم پیشنهادی در این مقاله با روشی نوین، چندضلعی اولیه را به گونه‌ای مستطیل‌بندی می‌کند که بتوان آن را به تعدادی چندضلعی متعامد ***r-Star*** افراز کرد. این الگوریتم روی هر نوعی از چندضلعی‌های متعامد ساده (بدون حفره) کاربرد دارد و قادر است با وجود هر نوع فرورفتگی حداقل تعداد نگهبانان را در محل خود مستقر کند. الگوریتم اخیر [12] که در سال ۲۰۱۵ منتشر شده فقط روی چندضلعی‌های متعامد بدون فرورفتگی نوع N به‌کار گرفته می‌شود یعنی حتی با در نظرگرفتن زمان اجرای مطلوب، روی چندضلعی‌هایی که از همه جهات دارای فرورفتگی هستند پاسخ نمی‌دهد. پس مستلزم الگوریتم‌هایی کامل، هر چند با مرتبهٔ اجرایی بالاتر هستیم که الگوریتم پیشنهادی قبل برای مسئله پوشش کامل چندضلعی‌های ساده متعامد با میدان دید مستطیلی در سال ۲۰۰۷ [10] با مرتبهٔ اجرایی$O\ (n^{17}\ poly\text{-}logn)$ منتشر شده که در الگوریتم پیشنهادی ما در این مقاله در بدترین حالت، مرتبه اجرایی آن به $\mathbf{O(n^5)}$ می‌رسد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئلهٔ پوشش چندضلعی‌های متعامد ساده بدون محدودیت در نوع و تعداد فرورفتگی‌ها را بررسی کردیم. این الگوریتم قادر به مستطیل‌بندی و افراز یا جداسازی چندضلعی‌های کوچک‌تر است که هر کدامشان یک چندضلعی ***r-Star*** هستند. سپس با پیمایش ***r-Star*** ها نسبت به نگهبانان ثبت شده (به‌ترتیب اولویت) محدوده نگهبانان (مستطیل‌های نگهبان) را به‌روز کرده و در نهایت به حداقل تعداد نگهبانان با میدان دید r دست یافتیم.

در این مقاله، ایدهٔ مطرح شده بر چندضلعی‌های ساده متعامدی بود که دارای حفره نیستند. این مقاله راه را برای کار روی نوع دیگر چندضلعی‌ها که دارای حفره هستند [9] نیز هموار کرده است. حفره‌ها می‌توانند ستون‌ها در گالری محسوب شوند که آن‌ها را نیز می‌توان به‌صورت مستطیل یا چندضلعی متعامد ساده در نظر گرفت. مسئله این‌جاست که این مستطیل‌های داخل چندضلعی با مستطیل‌های درون چندضلعی که در این مقاله مطرح شده متفاوتند و مانع دید نگهبانان می‌شوند.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]

تشکر و قدردانی

از داوران محترم که با پیشنهادات سازنده خود موجب ارتقاء کیفیت مقاله شده‌اند تقدیر و سپاسگزاری می‌کنیم.

منابع

1. Aggarwal A., "The Art Gallery Theorem: its Variations, Applications, and Algorithmic Aspects", PhD. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, John Hopkins University (1984).
2. Culberson J., Reckhow R. A., "Orthogonally convex coverings of orthogonal polygons without holes", J. Comput.Systems Science 39 (2) (1989) 166-204.
3. Gewali L., Keil M., Ntafos S. C., "On covering orthogonal polygons with star-shaped polygons", Information Sciences 65 (1992) 45-63.
4. Keil J. M., "Minimally covering a horizontally convexorthogonal polygon", Proc. 2nd Annual ACM Symp.Computational Geometry, (1986) 43-51.
5. Lingas A., Wasylewicz A., ˙ylin´ski P. Z, "Note on covering orthogonal polygons with star-shaped polygons", Information Processing Letters 104 (6) (2007) 220-227.
6. Motwani R., Raghunathan A., Saran H., "Covering orthogonal polygons with star polygons: the perfect graph approach", J. Comput. Systems Science 40, (1990) 19-48.
7. O'Rourke J., "Art Gallery Theorems and Algorithms", Oxford University Press (1987).
8. Urrutia J., "Art gallery and illumination problems", Handbook of Computational Geometry, Elsevier Science, Amsterdam, (2000) 973-1027.
9. Pawel Zylinski, "Institute of Mathematics", University of Gda_nsk, 80952 Gda_nsk, Poland, (2006).
10. Worman C., Keil J. M., "Polygon decomposition and the orthogonal art gallery problem", International Journal of Computational Geometry & Applications 17(2) (2007) 105-138.
11. Leonidas Palios, Petros Tzimas, "Covering Class-3 Orthogonal Polygons with the Minimum Number of r-Stars, European Social Fund–ESF", National Strategic Reference Framework (NSRF), MIS 375891 (2012).
12. Leonidas Palios, Petros Tzimas, "Minimum r-Star Cover of Class-3 Orthogonal Polygons, Springer International Publishing Switzerland", J. Kratochv´ıl et al. (Eds.): IWOCA 2014, LNCS 8986 (2015) 286-297, DOI: 10.1007/978-3-319-19315-125.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-16]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.2.7.4]
[DOI: 10.29252/mmr.4.2.115]