

## جانمایی رقابتی تسهیلات با بازی ورونوی وزن دار تک دوری

زینب حسنی

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکده علوم کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه کوثر، دانشکده علوم پایه و فنی، گروه کامپیوتر، بجنورد، ایران.

مرضیه اسکندری\*

دانشگاه الزهراء، دانشکده علوم ریاضی، گروه کامپیوتر

پذیرش ۹۷/۰۸/۰۷

دریافت ۹۶/۰۷/۱۹

### چکیده

بازی ورونوی، یک مدل هندسی ساده برای مسائل جانمایی رقابتی تسهیلات با دو بازیکن ارائه می‌دهد. بازی ورونوی با دو بازیکن (سفید و سیاه)، در یک ناحیه پیوسته و محدود (یک بعدی یا دو بعدی) به‌عنوان صفحه بازی، انجام می‌شود. در مدل تک دوری، ابتدا بازیکن سفید تمامی مهره‌های خود را که نقطه هستند، روی صفحه بازی قرار می‌دهد. سپس نوبت به بازیکن سیاه می‌رسد تا تمامی نقاط خود را قرار دهد. سپس صفحه بازی براساس معیار نزدیکی فاصله، بین دو بازیکن تقسیم شده و بازیکنی که مساحت بیش‌تری از ناحیه بازی را از آن خود کرده است، برنده بازی شناخته می‌شود. در این مقاله، بازی ورونوی "وزن دار" تک دوری در نواحی یک بعدی و دو بعدی بررسی می‌شود. در بازی ورونوی وزن دار، سرویس-گیرندگان می‌توانند علاوه بر معیار نزدیکی فاصله برای انتخاب سرویس‌دهنده، کیفیت امکانات آن را نیز مد نظر قرار دهند. براین اساس، در ناحیه یک بعدی دو حالت مختلف از تسهیلات (همسان و غیرهمسان) را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم در بازی ورونوی وزن دار تک دوری بازیکن سیاه دارای استراتژی برد است.

**واژه‌های کلیدی:** هندسه محاسباتی، جانمایی رقابتی تسهیلات، دیاگرام ورونوی، دیاگرام ورونوی وزن دار مضربی، بازی ورونوی.

### مقدمه

امروزه یکی از مسائل مهم در حوزه جانمایی رقابتی تسهیلات، تعیین مکان برای ایجاد یک تسهیل جدید در ارائه سرویس‌های رقابتی است. مشتریان همیشه برای انتخاب تسهیلات، ملاک‌هایی مانند نزدیکی فاصله تسهیلات، امکانات تسهیلات و امتیازهای ارائه شده به‌وسیله سرویس‌دهنده تسهیلات را در نظر می‌گیرند. بازی ورونوی یک مدل هندسی برای جانمایی رقابتی تسهیلات است که چگونگی تأثیر تصمیم‌پذیری رفتار مشتریان را به‌خوبی مدل می‌کند. بازی ورونوی با دو بازیکن سفید و سیاه که هر کدام دارای تعداد مشخص  $n$  مهره که نشان‌گر تسهیلات هستند و در ناحیه پیوسته و محدود  $U$  انجام می‌شود. بازیکن سفید همانند بازی شطرنج آغازگر بازی است. پس از این که تمامی  $2n$  تسهیلات به‌وسیله دو بازیکن سفید و سیاه جای‌گذاری شد، دیاگرام ورونوی  $2n$  نقطه برای ارزیابی نتیجه بازی بررسی می‌شود و بازیکنی که تسهیلات آن ناحیه بزرگ‌تری را تحت کنترل داشته باشد، برنده بازی است. تاکنون مدل‌های مختلفی از بازی ورونوی با بعدهای متفاوت ناحیه بازی و هم‌چنین تعداد دورهای بازی، معرفی شده است. در بازی ورونوی تک دوری ابتدا بازیکن سفید تمامی  $n$  مهره‌اش را که نقطه هستند، در ناحیه بازی قرار می‌دهد، سپس نوبت به بازیکن سیاه می‌رسد تا  $n$  نقطه خود را قرار دهد.

آهن و همکارانش بازی ورونوی ساده‌ای با ناحیه بازی یک بعدی (خط و دایره) بررسی کردند و استراتژی بردی برای بازیکن دوم ارائه کردند و نشان دادند که بازیکن اول می‌تواند اختلاف برد بازیکن دوم را تا حد دلخواه کاهش دهد [۱]. چانگ و همکارانش سناریوی متفاوتی را در ناحیه بازی یک‌بعدی و بیش‌تر معرفی کرده و استراتژی برد را برای بازیکن دوم در حالتی که  $n > n_0$  و ناحیه بازی مربعی شکل باشد، ارائه کردند [۳]. فکت و همکارانش بازی ورونوی دوبعدی را در ناحیه بازی مستطیل شکل بررسی کردند [۴]. آنها برای بازیکن دوم استراتژی برد را در حالتی که  $n \geq 3$  با  $\rho > \sqrt{2}/n$  و  $n = 2$  با  $\rho > \sqrt{3}/2$  ارائه کردند، که در آن  $\rho$  نسبت عرض به طول مستطیل ناحیه بازی است و نشان دادند بازیکن اول در سایر حالت‌های باقی‌مانده برنده است. راشد و همکارانش بازی ورونوی متفاوتی را به نام بازی ورونوی همسایه معرفی کردند که استراتژی‌هایی برای برتری برهمسایه ارائه می‌شود (نه بر رقیب) [۷]. باندیپا و همکارانش بازی ورونوی را روی گراف وزن‌دار بررسی کرده و نشان دادند که یافتن استراتژی برد برای بازیکن دوم NP-Complete است [۲].

در همه این مدل‌ها، محققان با فرض یک‌سان بودن خدمات تسهیلات و تنها با معیار فاصله از تسهیلات، به بررسی انواع مختلف بازی ورونوی پرداخته‌اند. در حالی که در واقعیت مشتریان و سرویس‌گیرندگان علاوه بر نزدیکی فاصله تسهیلات، کیفیت امکانات تسهیلات را نیز در نظر می‌گیرند که این امر با دیاگرام ورونوی وزن‌دار مضربی قابل مدل‌سازی است و می‌توان علاوه بر فاصله تسهیلات، امکانات رقابتی تسهیلات را برای مشتریان در نظر گرفت. در این مقاله بازی ورونوی تک دوری با معیار انتخاب کیفیت امکانات و فاصله برای دو بازیکن بررسی شده است. بازی ورونوی وزن‌دار مضربی به‌عنوان مدل مناسبی برای این مسئله معرفی و در ناحیه بازی یک‌بعدی و دوبعدی بررسی می‌شود و استراتژی برد برای بازیکن دوم ارائه می‌شود. با توجه به این که در این مدل مشتریان می‌توانند سرویس‌دهنده خود را بر اساس هر دو معیار نزدیکی فاصله و خصوصیات سرویس‌دهنده مانند پارکینگ، قیمت، تنوع، کیفیت محصولات و .... انتخاب کنند، این مدل به دنیای واقعی نزدیک‌تر است.

### تعاریف

فرض کنید مجموعه  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  شامل  $n$  نقطه، که سایت نامیده می‌شوند، در صفحه داده شده باشد. دیاگرام ورونوی  $S$  افرازی از صفحه به  $n$  ناحیه است (یک ناحیه نظیر هر سایت) با این خاصیت که ناحیه نظیر هر سایت  $p_i$  شامل نقاطی از صفحه است که  $p_i$  نزدیک‌ترین سایت به آنها باشد. در دیاگرام ورونوی مرزهای نواحی بخش‌هایی از عمود منصف زوج سایت‌های مجاور است. در این تعریف کلاسیک از دیاگرام ورونوی، فاصله براساس متر اقلیدسی محاسبه می‌شود [۶]. فاصله اقلیدسی دو نقطه  $x$  و  $y$  را با نماد  $d(x, y)$  نشان می‌دهیم.

در بازی ورونوی دو بازیکن سفید و سیاه که هر یک دارای  $n$  مهره‌ی نقطه‌ای هستند، شرکت دارند. مهره‌های بازیکن سفید را با  $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  و مهره‌های بازیکن سیاه را با  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  نشان می‌دهیم. در مدل تک دوری، ابتدا بازیکن سفید بازی را شروع می‌کند و تمامی  $n$  نقطه‌اش را در ناحیه بازی  $U$  جای‌گذاری می‌کند. سپس نوبت بازیکن سیاه است تا  $n$  نقطه‌اش را در ناحیه بازی قرار دهد. هم‌چنین دو بازیکن نمی‌توانند نقاطی را که قبلاً اشغال شده است تغییر یا مجدداً استفاده کنند. سپس دیاگرام ورونوی همه نقاط محاسبه شده و مجموع مساحت‌های نواحی ورونوی که سایت نظیرشان سفید است به‌عنوان امتیاز بازیکن سفید در نظر گرفته می‌شود. مشابهاً امتیاز بازیکن سیاه هم قابل محاسبه و براین اساس برنده بازی تعیین می‌شود. در واقع مجموع مساحت‌های نواحی ورونوی که سایت نظیرشان به یک رنگ است، نشان‌گر سهم آن بازیکن از بازار است.

با توجه به کاربردهای دیاگرام ورونوی در انواع مسائل جانمایی تسهیلات، تعمیم‌های مختلفی از دیاگرام ورونوی وجود دارد که با جای‌گزینی توابع فاصله دیگری به جای فاصله اقلیدسی در تعریف و محاسبه دیاگرام ورونوی به دست می‌آیند.

**تعریف ۱:** اگر برای هر سایت  $p_i$  یک عدد حقیقی مثبت  $\omega_i$  به عنوان وزن نظیر کنیم، تابع فاصله وزن دار بدین صورت تعریف می‌شود [۵].

$$d_w(p_i, x) = d(p_i, x) / \omega_i \quad (۱)$$

بر اساس تعریف فاصله وزن دار، دیاگرام ورونوی وزن دار مضر برای سایت‌های وزن دار تعریف می‌شود. در دیاگرام ورونوی وزن دار مضر، ناحیه ورونوی سایت  $p_i$  به صورت (۲) مشخص می‌شود:

$$V(p_i) = \{x / d_w(p_i, x) \leq d_w(p_j, x), \forall i \neq j\} \quad (۲)$$

فرض کنید سایت‌ها در یک فضای یک‌بعدی واقع باشند. در کاربردهای مختلف، این فضای یک‌بعدی معمولاً یک خط یا یک دایره در نظر گرفته می‌شود. برای توصیف دیاگرام ورونوی وزن دار مضر سایت‌های وزن دار واقع بر یک خط یا یک دایره، توجه داشته باشید که فاصله اقلیدسی دو نقطه  $x$  و  $y$  در این فضا، طول پاره خط یا کمان  $xy$  است که با نماد اختصاری  $|x - y|$  نیز نشان داده می‌شود. توجه کنید که در حالت دایره، مقدار  $|x - y|$  طول کمان  $xy$  را نشان می‌دهد. در چنین فضایی با در نظر گرفتن فاصله وزنی، عمودمنصف دو سایت  $x_i$  و  $x_j$ ، مکان هندسی نقاطی مانند  $x$  در این فضاست که شرط  $d_w(x_i, x) = d_w(x_j, x)$  برقرار باشد. با ساده کردن این رابطه، داریم:

$$d_w(x_j, x) = d_w(x_i, x) \Rightarrow |x_j - x| / \omega_j = |x_i - x| / \omega_i \Rightarrow |x_j - x| = |x_i - x| * \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

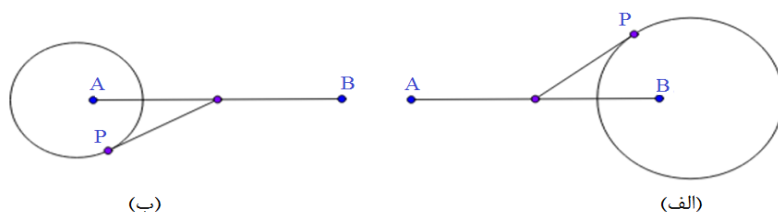
حال با توجه به این که  $x$  نقطه‌ای روی کمان یا پاره خط  $x_i x_j$  است، داریم:  $|x_i - x_j| = |x_j - x| + |x_i - x|$ . بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| / \omega_j &= |x_i - x| * \frac{\omega_j}{\omega_i} + |x_i - x| = \frac{\omega_j + \omega_i}{\omega_i} |x_i - x| \Rightarrow \\ |x_i - x| &= \frac{\omega_i}{\omega_j + \omega_i} |x_i - x_j| \end{aligned} \quad (۳)$$

بنابراین عمودمنصف دو نقطه‌ی  $x_i$  و  $x_j$  در فضای یک بعدی یک نقطه بر پاره خط یا کمان  $x_i x_j$  است که آن را به دو بخش به طول‌های  $\frac{\omega_i}{\omega_j + \omega_i} |x_i - x_j|$  و  $\frac{\omega_j}{\omega_j + \omega_i} |x_i - x_j|$  تقسیم می‌کند.

در حالتی که سایت‌های وزن دار در ناحیه دوبعدی مانند صفحه قرار داشته باشند، برای توصیف دیاگرام ورونوی وزن دار مضر لازم است ساختار عمودمنصف دو سایت  $p_i$  و  $p_j$  بررسی می‌شود.

**تعریف ۲:** نقاط  $A$  و  $B$  با وزن‌های  $\omega_A$  و  $\omega_B$  به فاصله  $d$  از هم در فضای  $R^2$  قرار دارند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله آنها از دو نقطه  $A$  و  $B$  متناسب با نسبت وزن دو نقطه باشد، را در هندسه کلاسیک دایره آپولونیوس می‌نامند [۵].



شکل ۱. الف) دایره آپولونیوس دو نقطه  $A$  و  $B$  برای  $\omega_B < \omega_A$  به طوری که مقدار  $k=3$ ، ب) دایره آپولونیوس دو نقطه  $A$  و  $B$  برای  $\omega_B > \omega_A$  مقدار  $k=0.3$

در شکل ۱ دایره‌های آپولونیوس دو نقطه  $A$  و  $B$  با نسبت‌های متفاوت وزن دو نقطه نشان داده شده است. در صورتی که دو نقطه دارای وزن یکسان باشند، دایره آپولونیوس همان عمودمنصف پاره خط واصل این دو نقطه است.

دایره آپولونیوس، در واقع مکان هندسی نقاطی مانند  $p$  است به طوری که:

$$\frac{|A-p|}{|B-p|} = \frac{\omega_A}{\omega_B}$$

توجه داشته باشید که عبارت فوق معادل این است که فاصله وزن دار نقطه  $p$  از  $A$  و  $B$  به یک اندازه باشد، یعنی نقاط واقع بر عمودمنصف  $AB$  با متر وزن دار. این نسبت را با  $k$  نشان می‌دهیم:

$$\frac{Ap}{Bp} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = k \quad (۴)$$

آن‌گاه شعاع دایره آپولونیوس از رابطه (۵) به دست می‌آید [۵]:

$$r = \frac{k}{k^2-1} d \quad (k > 1) \quad (۵)$$

که در آن  $r$  شعاع دایره آپولونیوس و  $d$  فاصله بین دو نقطه  $A$  و  $B$  است. با توجه به مقدار  $k$ ، عمود منصف  $AB$  دایره یا خط است:

$$(۱) \quad (\omega_B < \omega_A) k > 1: \text{ عمودمنصف } AB, \text{ دایره‌ای به مرکز } B \text{ است.}$$

$$(۲) \quad (\omega_B > \omega_A) k < 1: \text{ عمودمنصف } AB, \text{ دایره‌ای به مرکز } A \text{ است.}$$

$$(۳) \quad (\omega_B = \omega_A) k = 1: \text{ عمودمنصف } AB, \text{ خطی بین دو نقطه است.}$$

مساحت دایره  $\pi r^2$  است که شعاع دایره تحت تأثیر مقادیر  $k$  و  $d$  است. بنابراین مقادیر  $k$  و  $d$  بر میزان مساحت ناحیه‌های دیاگرام ورونوی مؤثر است. با افزایش مقدار  $d$  مساحت دایره افزایش می‌یابد و مقدار  $k$  هر چه به ۱ نزدیک‌تر باشد شعاع دایره بزرگ‌تر و مساحت دایره بیش‌تر است.

توجه کنید که براساس ساختار عمودمنصف نقاط وزن دار، نواحی ورونوی در دیاگرام ورونوی وزن دار مضربی برخلاف دیاگرام ورونوی معمولی چندضلعی نیست.

### بازی ورونوی وزن دار یک بعدی

در بازی ورونوی وزن دار، ناحیه بازی براساس دیاگرام ورونوی وزن دار مضربی بین دو بازیکن تقسیم می‌شود. ابتدا در بازی تک دوری، وقتی که سایت‌ها دارای وزن یکسان باشند، یعنی کیفیت امکانات تمام شعب دو سرویس‌دهنده مشابه هستند، برای بازیکن سیاه در ناحیه یک‌بعدی، استراتژی برد ارائه می‌کنیم. سپس بازی ورونوی وزن دار با تسهیلات غیرهمسان را بررسی می‌کنیم.

در حالتی که ناحیه بازی، محیط دایره واحد  $C$  باشد، بازی ورونوی وزن دار تک دوری را می‌توان چنین توصیف کرد. بازیکن سفید، ابتدا بازی را شروع می‌کند و  $n$  مهره خود را که دارای وزن هستند، روی محیط دایره قرار می‌دهد. نقطه با بیشینه وزن بازیکن سفید را  $W_n$  می‌نامیم. نقطه مجاور  $W_n$ ، در جهت ساعت‌گرد را  $W_1$  می‌نامیم و  $n-2$  نقطه باقی‌مانده بازیکن سفید که بین  $W_n$  و  $W_1$  قرار می‌گیرند را در جهت ساعت‌گرد به ترتیب  $W_2$  تا  $W_{n-1}$  نام‌گذاری می‌کنیم. وزن هر نقطه  $W_i$  را با  $\omega(W_i)$  که در آن  $1 \leq i \leq n$  نشان می‌دهیم.

برای  $1 \leq i \leq n-1$ ، قسمتی از کمان دایره را که بین دو نقطه  $W_i$  و  $W_{i+1}$  قرار می‌گیرد بازه  $d_i$  و قسمتی از کمان دایره را که بین دو نقطه  $W_1$  و  $W_n$  واقع است را بازه  $d_n$  می‌نامیم. در هر بازه  $d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )، از بین دو نقطه  $W_i$  و  $W_{i+1}$  نقطه با وزن کم‌تر را با  $W'_i$  و نقطه با وزن بیش‌تر را با  $W''_i$  نام‌گذاری می‌کنیم، یعنی داریم:

$$\omega(W'_i) = \min \{ \omega(W_i), \omega(W_{i+1}) \} \quad (۶)$$

$$\omega(W_i'') = \max \{ \omega(W_i), \omega(W_{i+1}) \} \quad (7)$$

که در آن تابع  $\omega(\cdot)$  معرف وزن یک نقطه است. هم‌چنین طول کمان  $d_i$  را با  $|d_i|$  نشان می‌دهیم.

### ۱. بازی ورونوی وزن دار یک بعدی: سایت‌های همسان

در این بخش فرض می‌کنیم، دو بازیکن سفید و سیاه دارای نقاطی با وزن یک‌سان هستند و برای بازیکن سیاه استراتژی برد ارائه می‌دهیم. بازیکن سیاه قصد دارد در هر بازه  $d_i$  یکی از مهره‌های خود را طوری قرار دهد که در نهایت بیش از نیمی از محیط دایره  $C$  را از آن خود کند. مهره سیاه، با بیش‌ترین وزن بازیکن سیاه را  $B_n$  می‌نامیم. بازیکن سیاه برای هر  $1 \leq i \leq n-1$ ، نقطه  $B_i$  را در بازه  $d_i$  و  $B_n$  را در بازه  $d_n$  طوری قرار می‌دهد تا برنده بازی باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که بازیکن سیاه می‌تواند در یک بازه دلخواه  $(1 \leq i \leq n-1)$  طوری  $B_i$  را جای‌گذاری کند که نزدیک به نیمی از طول  $d_i$  را از آن خود کند.

لم ۱: در بازه دلخواه  $d_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ )، برای هر عدد حقیقی مثبت  $\varepsilon$  داده شده که  $0 < \varepsilon < L(\frac{|d_i|}{2})$ ، بازیکن سیاه همواره می‌تواند حداقل  $\varepsilon - \frac{|d_i|}{2}$  را به خود اختصاص دهد که در آن داریم:

$$L = \frac{\frac{\omega(W_n) - \omega(W_1)}{\omega(W_n) + \omega(W_1)}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\omega(W_{i+1}) - \omega(W_i)|}{|\omega(W_{i+1}) + \omega(W_i)|}} \quad (8)$$

اثبات: اگر بازیکن سیاه در بازه  $d_i$ ، نقطه‌ی  $B_i$  با وزن بزرگ‌تر یا مساوی  $W_i'$  را به فاصله  $\varepsilon$  از  $W_i''$  قرار دهد، در این صورت امتیاز بازیکن سیاه در بازه  $d_i$  به صورت (۹) قابل محاسبه است:

$$S_{B_i} = \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} |W_i - B_i| + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} |W_{i+1} - B_i| \quad (9)$$

و برای امتیاز بازیکن سفید در بازه  $d_i$  داریم:

$$S_{W_i} = \frac{\omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} |W_i - B_i| + \frac{\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} |W_{i+1} - B_i| \quad (10)$$

حال بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم:  $\omega(W_i) < \omega(W_{i+1})$  پس داریم:

$$\omega(W_i) < \omega(W_{i+1}) \rightarrow W_i' = W_i, W_i'' = W_{i+1} \quad (11)$$

در این صورت داریم:

$$|W_{i+1} - B_i| = \varepsilon \quad (12)$$

$$|W_i - B_i| = |d_i| - \varepsilon \quad (13)$$

بنابراین داریم:

$$S_{B_i} = \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} (|d_i| - \varepsilon) + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} \varepsilon \quad (14)$$

حال با توجه به انتخاب  $B_i$  داریم:  $\omega(W_i) \leq \omega(B_i)$ ، بنابراین:

$$S_{B_i} \geq \frac{1}{2} (|d_i| - \varepsilon) + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} \varepsilon = \frac{|d_i|}{2} - \frac{\omega(W_{i+1}) - \omega(B_i)}{2(\omega(B_i) + \omega(W_{i+1}))} \varepsilon$$

$$\Rightarrow S_{B_i} > \frac{|d_i|}{2} - \frac{\omega(W_{i+1}) - \omega(W_i)}{2(\omega(W_i) + \omega(W_{i+1}))} \varepsilon \quad (15)$$

$$\Rightarrow S_{B_i} > \frac{|d_i|}{2} - \varepsilon$$

لم ۲: بازیکن سیاه قادر است مهره‌های  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  را به‌گونه‌ای در بازه‌های  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$  قرار دهد که در تمامی بازه‌های  $d_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ )، امتیاز  $\varepsilon - \frac{|d_i|}{2}$  را کسب کند.

**اثبات:** ابتدا بازیکن سیاه در بازه  $d_1$  مهره  $B_1$  با وزن  $\omega(W'_1)$  را مطابق لم (۱) جای‌گذاری می‌کند. سپس در هر بازه  $d_i$  ( $2 \leq i \leq n-1$ )، اگر نقطه‌ای با وزن  $\omega(W'_i)$  استفاده نشده باشد، آن را در این بازه قرار می‌دهد در غیر این صورت، نقطه‌ای با وزن حداقل وزن باقی‌مانده را قرار می‌دهد. بنابراین:

$$\omega(B_1) = \omega(W'_1) \quad (۱۶)$$

و برای سایر مقادیر  $i$  ( $2 \leq i \leq n-1$ )، داریم:

$$\omega(B_i) = \begin{cases} \omega(W'_i) & \text{اگر مهره‌ای با وزن } \omega(W'_i) \text{ باشد که قبلاً استفاده نشده در} \\ \omega(B_j) & \text{غیراین‌صورت، اگر } B_j \text{ مهره با کم‌ترین وزن باقی‌مانده باشد} \end{cases} \quad (۱۷)$$

با چنین انتخابی برای هر  $i$  داریم:

$$\omega(B_i) \geq \omega(W'_i) \quad (۱۸)$$

و بازیکن سیاه در هر بازه  $d_i$  همواره می‌تواند حداقل  $\frac{|d_i|}{2} - \varepsilon$  را به خود اختصاص دهد. **قضیه ۱:** بازیکن سیاه دارای استراتژی برد است.

**اثبات:** ابتدا بازیکن سیاه  $n-1$  مهره‌اش را در بازه‌های مربوطه براساس لم (۲) و به فاصله  $\varepsilon$ ،  $0 < \varepsilon < L(\frac{|d|}{2})$  قرار می‌دهد، که در آن  $|d| = \min_{1 \leq i \leq n} \{|d_i|\}$ . سپس آخرین نقطه،  $B_n$ ، را که بیش‌ترین وزن را دارد، در بازه  $d_n$  نزدیک به  $W_n$  به فاصله دلخواه  $0 < \delta < |d_n|/2$  قرار می‌دهد. حال نشان می‌دهیم بازیکن سیاه برنده است. توجه کنید وزن  $B_n$  و  $W_n$  با هم برابر است.

$$S_B = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W'_i)} (|d_i| - \varepsilon) + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W''_i)} \varepsilon \right) + \frac{\delta}{2} + \frac{\omega(B_n)}{\omega(B_n) + \omega(W_1)} (|d_n| - \delta) \quad (۱۹)$$

$$S_W = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\omega(W'_i)}{\omega(B_i) + \omega(W'_i)} (|d_i| - \varepsilon) + \frac{\omega(W''_i)}{\omega(B_i) + \omega(W''_i)} \varepsilon \right) + \frac{\delta}{2} + \frac{\omega(W_1)}{\omega(B_n) + \omega(W_1)} (|d_n| - \delta) \quad (۲۰)$$

که در آن  $S_B$  و  $S_W$  به ترتیب مجموع امتیاز بازیکن سیاه و سفید است. با توجه به رابطه (۱۵) اختلاف امتیاز دو بازیکن برابر است با:

$$S_B - S_W \geq \frac{\omega(W_n) - \omega(W_1)}{\omega(W_n) + \omega(W_1)} (|d_n| - \delta) - \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\omega(W_{i+1}) - \omega(W_i)}{\omega(W_{i+1}) + \omega(W_i)} \right| \varepsilon = \frac{\omega(W_n) - \omega(W_1)}{\omega(W_n) + \omega(W_1)} \left( |d_n| - \delta - \frac{\varepsilon}{L} \right) \geq \frac{\omega(W_n) - \omega(W_1)}{\omega(W_n) + \omega(W_1)} (|d_n|/2 - |d|/2) > 0 \quad (۲۱)$$

یعنی امتیاز بازیکن سیاه بیش‌تر است.

## ۲. بازی ورونوی وزن‌دار یک‌بعدی: سایت‌های غیرهمسان

در این بخش فرض می‌کنیم، دو بازیکن سفید و سیاه دارای نقاطی با وزن غیرهم‌سان هستند به طوری که  $\sum_{i=1}^n \omega(W_i) = \sum_{i=1}^n \omega(B_i)$  و برای بازیکن سیاه استراتژی برد ارائه می‌دهیم. بازیکن سفید  $n$  نقطه خود را در محیط دایره بازی می‌کند. سپس نوبت بازیکن سیاه است که  $n$  نقطه خود را با وزن‌های متفاوت از بازیکن سیاه به گونه‌ای در محیط دایره بازی کند که برنده بازی باشد. همانند بخش قبل بازه‌ها و نقاط بازیکن سفید را در جهت ساعت‌گرد نام‌گذاری می‌کنیم.

**لم ۳:** در هر بازه دلخواه  $d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) و برای هر عدد حقیقی مثبت  $\varepsilon$  داده شده، اختلاف امتیاز دو بازیکن سیاه و

سفید با فرض  $\omega(W_i) \leq \omega(W_{i+1})$  می‌تواند حداکثر  $\varepsilon/2$  ( $|W_{i+1} - W_i|$ ) باشد.

**اثبات:** اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه با توجه به امتیاز دو بازیکن در هر بازه  $d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )، براساس روابط (۹) و (۱۰) بدین‌صورت است:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} |W_i - B_i| + \frac{\omega(B_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} |W_{i+1} - B_i| \\ & - \left( \frac{\omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} |W_i - B_i| + \frac{\omega(W_{i+1})}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} |W_{i+1} - B_i| \right) \\ & = \frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} |W_i - B_i| + \frac{\omega(B_i) - \omega(W_{i+1})}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} |W_{i+1} - B_i| \end{aligned} \quad (22)$$

در هر بازه  $d_i$  بدون این که از کلیت مسئله کم شود، فرض می‌کنیم:  $\omega(W_i) < \omega(W_{i+1})$ . اگر بازیکن سیاه نقطه  $B_i$  را در نزدیکی نقطه با وزن بیش‌تر بازیکن سفید یعنی  $W_{i+1}$  و در فاصله  $\varepsilon$  از آن قرار دهد، داریم:

$$|W_{i+1} - B_i| = \varepsilon, \quad |W_i - B_i| = |W_{i+1} - W_i| - \varepsilon \quad (23)$$

آن‌گاه اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه برابر است با:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} (|W_{i+1} - W_i| - \varepsilon) + \frac{\omega(B_i) - \omega(W_{i+1})}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} \varepsilon \\ & = \frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} (|W_{i+1} - W_i| + \left[ \frac{\omega(B_i) - \omega(W_{i+1})}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} - \frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} \right] \varepsilon \end{aligned} \quad (24)$$

با توجه به  $\omega(W_i) < \omega(W_{i+1})$  داریم:

$$\left[ \frac{\omega(B_i) - \omega(W_{i+1})}{\omega(B_i) + \omega(W_{i+1})} - \frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} \right] < -\frac{1}{2} \quad (25)$$

پس اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه کم‌تر است از:

$$\frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} (|W_{i+1} - W_i|) - \frac{1}{2} \varepsilon \quad (26)$$

با توجه به رابطه (۲۶)، در مورد وزن نقاط بازیکن سیاه و سفید در بازه  $d_i$  چهار حالت رخ می‌دهد:

۱. وزن نقطه بازیکن سیاه بیش‌تر از وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازه  $d_i$  باشد یا بیش‌تر از وزن یک نقطه بازیکن

سفید و برابر با دیگر وزن نقطه بازیکن سفید باشد.

$$\omega(W_i), \omega(W_{i+1}) \leq \omega(B_i) \quad (27)$$

۲. وزن نقطه بازیکن سیاه بین وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازه  $d_i$  باشد یا ممکن است برابر با یکی از وزن نقطه

بازیکن سفید باشد.

$$\omega(W_i) < \omega(B_i) < \omega(W_{i+1}) \quad (28)$$

۳. وزن نقطه بازیکن سیاه کم‌تر از وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازه  $d_i$  باشد یا کم‌تر از وزن یک نقطه بازیکن سفید

و برابر با دیگر وزن نقطه بازیکن سفید باشد.

$$\omega(W_i), \omega(W_{i+1}) > \omega(B_i) \quad (29)$$

۴. وزن نقطه بازیکن سیاه برابر با وزن دو نقطه بازیکن سفید در بازه باشد.

**قضیه ۲:** در صورتی که واریانس توزیع نقاط سیاه و سفید را به ترتیب با  $\delta_B^2$  و  $\delta_W^2$  نشان دهیم، بازیکن سیاه دارای استراتژی برد است اگر  $\delta_B^2 \leq \delta_W^2$ .

**اثبات:** با توجه به لم (۳)،  $\omega(B_i) - \omega(W_i)$  نقش مؤثری در اختلاف امتیاز بازیکن سیاه و سفید در بازه  $d_i$  دارد.

باتوجه به این که  $|d_i|$  و  $\varepsilon$  مقادیر مثبتی هستند، در علامت رابطه بالا تنها عبارت  $\omega(B_i) - \omega(W_i)$  تأثیر دارد.

با توجه به چهار حالت ذکر شده برای وزن نقاط بازیکن سیاه داریم:

در حالت اول رابطه (۲۶) مثبت است و بازیکن سیاه امتیاز بیش‌تری را در این بازه دارد. در حالت دوم چنان که در

لم (۱) نشان دادیم بازیکن سیاه امتیاز  $\varepsilon - |d_i|/2$  را به دست می‌آورد. در حالت سوم  $\omega(W_i), \omega(W_{i+1}) >$

$\omega(B_i)$  رابطه مذکور منفی است و بازیکن سیاه امتیاز کمتری را در این بازه دارد. در حالت چهارم اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه صفر است.

در حالت سوم که بازیکن سیاه امتیاز کمتری را به دست می‌آورد، برای جبران کمبود امتیاز از بازه‌های حالت اول استفاده می‌کند. در رابطه (۲۶)، مؤلفه‌های دیگری در مقدار اختلاف امتیاز دو بازیکن سفید و سیاه تأثیر دارد. با توجه به این‌که:

$$\sum_{i=1}^n \omega(W_i) = \sum_{i=1}^n \omega(B_i) \quad (30)$$

میانگین وزن نقاط سفید و سیاه برابرند و داریم:

$$\bar{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega(W_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega(B_i)}{n} \quad (31)$$

$$\omega(B_i) - \omega(W_i) = \omega(B_i) - \omega(W_i) + \bar{\omega} - \bar{\omega} = (\omega(B_i) - \bar{\omega}) - (\omega(W_i) - \bar{\omega}) \quad (32)$$

حال می‌توان پراکندگی وزن نقاط را نسبت به میانگین وزن نقاط در بازه  $d_i$  به عنوان ملاک ارزیابی در نظر گرفت. اگر بازیکن سیاه نقطه‌ای با اختلاف وزن بیشتری با میانگین نسبت به بازیکن سفید داشته باشد، آن‌گاه نقاط دیگر بازیکن سیاه اختلاف وزن بیشتری با میانگین خواهند داشت. بنابراین پراکندگی نقاط بازیکن سیاه بیشتر از بازیکن سفید است. در این صورت است که حالت سوم بیش‌تر رخ می‌دهد و بازیکن سیاه نمی‌تواند کمبود امتیاز را جبران کند و برنده شود. پس زمانی که پراکندگی نقاط بازیکن سیاه بیشتر از بازیکن سفید است بازیکن سیاه نمی‌تواند برنده باشد. پراکندگی نقاط بازیکن سیاه برابر است با:

$$\frac{\sum_{i=1}^n |\omega(B_i) - \bar{\omega}|}{n} \quad (33)$$

از طرفی پراکندگی وزن نقاط نسبت به میانگین آنها با واریانس نقاط مرتبط است و هر چه پراکندگی وزن نقاط نسبت به میانگین بیش‌تر باشد. واریانس (انحراف معیار) نقاط برای  $n$  بازه بیش‌تر است و از طرفی واریانس شاخص پایدارتری نسبت به پراکندگی آنها است.

$$\delta_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\omega(B_i) - \bar{\omega})^2}{n} \text{ و } \delta_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\omega(W_i) - \bar{\omega})^2}{n} \quad (34)$$

پس زمانی که واریانس نقاط بازیکن سیاه بیشتر از واریانس نقاط بازیکن سفید باشد، بازیکن سیاه نمی‌تواند برنده شود. بنابراین همیشه استراتژی برد برای بازیکن سیاه وجود ندارد و به وزن‌های نقاط دو بازیکن مرتبط است. زمانی که واریانس بازیکن سیاه کمتر یا مساوی واریانس بازیکن سفید باشد، بازیکن سیاه می‌تواند برنده شود.

لم ۴: اگر داشته باشیم  $\delta_b^2 \leq \delta_w^2$ ، بازیکن سیاه قادر است مهره‌های  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  را به گونه‌ای در بازه‌های  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$  قرار دهد که برنده بازی شود.

**اثبات:** بازه‌های  $d_i$  را براساس کم‌ترین وزن نقاط دو سر آن به صورت صعودی مرتب می‌کنیم و بازه‌های مرتب شده را مجدداً نام‌گذاری می‌کنیم:  $D = \{D_1, D_2, D_3, \dots, D_n\}$ . همچنین نقاط بازیکن سیاه را با توجه به وزن آنها به صورت صعودی مرتب کرده و مجدداً نام‌گذاری می‌کنیم:  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ . بازیکن سیاه نقطه با کوچک‌ترین وزن را در بازه  $D_1$  و به فاصله  $\varepsilon$  از نقطه سفید با وزن بیش‌تر قرار می‌دهد. این روند را در بازه‌های  $D_i$  ادامه می‌دهد.

با توجه به چهار حالت ذکر شده و اختلاف امتیاز دو بازیکن در لم (۳)، بازیکن سیاه می‌تواند در حالت اول امتیاز مثبت، در حالت دوم  $|d_i|/2 - \varepsilon$  امتیاز، در حالت سوم امتیاز منفی و در حالت چهارم امتیاز صفر را به دست بیاورد. با فرض این‌که  $k$  تعداد بازه‌های حالت اول و  $m$  تعداد بازه‌های حالت سوم و  $l$  تعداد بازه‌های حالت دوم باشد. برای این‌که مجموع امتیازهای به دست آمده بازیکن سیاه از امتیازهای از دست رفته او بیش‌تر باشد، باید داشته باشیم:



$$\sum_{i=1}^m \frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} |d_i| - \varepsilon_1 < \sum_{q=1}^l \left| \frac{\omega(B_q) - \omega(W_q)}{\omega(B_q) + \omega(W_q)} \right| |d_q| - \varepsilon_2 + \sum_{j=1}^k \frac{\omega(B_j) - \omega(W_j)}{\omega(B_j) + \omega(W_j)} dj - \varepsilon_3 \quad (۳۵)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\omega(B_i) - \omega(W_i)}{\omega(B_i) + \omega(W_i)} |d_i| - \varepsilon < \sum_{q=1}^l \frac{1}{2} |d_q| + \sum_{j=1}^k \frac{\omega(B_j) - \omega(W_j)}{\omega(B_j) + \omega(W_j)} |dj| \quad (۳۶)$$

با توجه به  $\delta_B^2 \leq \delta_W^2$ ، بازیکن سیاه می‌تواند برنده بازی شود.

**گزاره:** بازی ورونوی وزن دار با نقاط وزن همسان حالت خاصی از بازی ورونوی وزن دار مهره‌های غیرهمسان است به طوری که در استراتژی برد بازیکن سیاه تنها یکی از بازه‌هایی که امتیاز بیش‌تری دارد را برای برد استفاده می‌کند.

### بازی ورونوی وزن دار دو بعدی: سایت‌های با وزن همسان

در بازی ورونوی دو بعدی بررسی استراتژی برد بازیکن‌ها مشابه حالت یک بعدی نیست. تاکنون در بازی ورونوی دو بعدی به بررسی استراتژی برد برای بازی تک دوری و در موارد خاص چون ناحیه مستطیلی با نسبت  $\rho$  پرداخته شده است. فرض می‌کنیم وزن‌های نقاط دو بازیکن یکسان و بازی تک دوری است. در حالت دو بعدی، محاسبه ناحیه‌های دیاگرام ورونوی وزن دار مضربی آسان نیست. زیرا همانند دیاگرام ورونوی معمولی نواحی ورونوی چندضلعی ساده نیست.

در بازی تک دوری، در ابتدا بازیکن سفید تمام نقاط خود را قرار می‌دهد. سپس نوبت به بازیکن سیاه که نقاط خود را قرار دهد. بازیکن سیاه دارای این امتیاز برای برد است که از وضعیت بازی بازیکن اول آگاه است. در ادامه به بررسی استراتژی برد برای بازیکن سیاه می‌پردازیم.

**تعریف ۳:** یک ناحیه ورونوی را متقارن می‌نامیم اگر سایت نظیرش مرکز تقارن آن باشد. به عبارت دیگر با وصل کردن هر نقطه روی مرز آن به سایت نظیرش و امتداد آن به همان اندازه، نقطه‌ای روی مرز ناحیه به دست آید. در غیر این صورت آن را نامتقارن می‌نامیم.

در دیاگرام ورونوی وزن دار مضربی، ناحیه‌های ورونوی وزن دار متقارن نیستند، مگر این‌که ناحیه‌های ورونوی دایره باشند. زیرا مرزهای ناحیه‌های ورونوی از کمانهای دایره آپولونیوس بین نقطه‌ها به وجود می‌آیند. این ویژگی ناحیه‌های ورونوی وزن دار به برد بازیکن سیاه کمک می‌کند به طوری که بازیکن سیاه می‌تواند با استفاده از ناحیه‌های نامتقارن برنده بازی شود.

هنگامی که تمامی وزن نقاط دو بازیکن سیاه و سفید برابر باشد دیاگرام ورونوی وزن دار مضربی دیاگرام ورونوی معمولی است. در این صورت استراتژی برد به وسیله فکت و همکارانش ارائه شده است [۴]. حال نشان می‌دهیم در حالتی که وزن‌ها برابر نباشند ولی دو بازیکن دارای مهره‌هایی با وزن‌های یکسان باشند، بازیکن سیاه می‌تواند برنده شود.

**لم ۵:** در بازی ورونوی با وزن نقاط همسان، بازیکن سیاه می‌تواند نقاط خود را به گونه‌ای در نواحی ورونوی حریف جای گذاری کند که یا نزدیک به نیمی از مساحت ناحیه ورونوی یک نقطه سفید و یا بیش از نیمی از مساحت ناحیه ورونوی بازیکن سفید را به دست آورد.

**اثبات:** در دیاگرام ورونوی وزن دار مضربی، ناحیه‌های ورونوی وزن دار به دو صورت متقارن و نامتقارن هستند. در نواحی ورونوی متقارن می‌توان خط  $l$  را طوری در نظر گرفت که مساحت ناحیه ورونوی را به دو ناحیه مساوی تقسیم کند و سایت متناظرش (نقطه بازیکن سفید  $W_i$ ) روی این خط قرار داشته باشد. بازیکن سیاه با وزن یکسان با وزن  $W_i$  می‌تواند نزدیک به نیمی از مساحت این ناحیه ورونوی را به دست آورد. بنابراین در ناحیه‌های ورونوی متقارن بازیکن سیاه می‌تواند برای هر  $\varepsilon$  دلخواه نزدیک به نیمی از مساحت ناحیه ورونوی  $W_i$  یعنی  $(s_i/2 - \varepsilon)$  را به دست آورد که

در آن  $S_i$  مساحت ناحیه ورونوی متناظر با نقطه سفید  $W_i$  است. در ناحیه‌های ورونوی نامتقارن خط  $l$  را طوری در نظر می‌گیریم که نقطه بازیکن سفید  $W_i$  روی خط  $l$  باشد و ناحیه ورونوی به دو قسمت نامساوی از نظر مساحت تقسیم شود. بازیکن سیاه نقاط با وزن یک‌سان را در نزدیکی نقطه سفید  $W_i$  در سمتی از خط  $l$  که مساحت بیش‌تر است، به‌گونه‌ای قرار می‌دهد که بیش از نیمی از مساحت ناحیه ورونوی را به‌دست آورد. پس بازیکن سیاه در ناحیه‌های نامتقارن می‌تواند بیش از نیمی از مساحت ناحیه ورونوی  $W_i$  را به‌دست آورد.

**قضیه ۳:** بازیکن سیاه در ناحیه دوبعدی با وزن نقاط همسان دارای استراتژی برد است.

**اثبات:** با توجه به لم (۵) بازیکن سیاه در ناحیه‌های ورونوی متقارن می‌تواند نزدیک به نیمی از مساحت ناحیه‌های ورونوی را به‌دست آورد و در ناحیه‌های ورونوی نامتقارن بازیکن سیاه با نقاط با وزن یکسان سایت‌های آن می‌تواند بیش از نیمی از مساحت آن ناحیه ورونوی را به‌دست آورد. حال کفایت براساس مجموع امتیاز مازادی که بازیکن سیاه از نواحی نامتقارن به‌دست می‌آورد (مقدار آن را  $\alpha$  بنامید)،  $\epsilon$  را طوری انتخاب کنیم که اختلاف امتیاز مثبت شود، یعنی:  $\epsilon < \alpha/n$ .

### بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، بازی ورونوی وزن‌دار تک دوری را در ناحیه پیوسته یک‌بعدی و دوبعدی برای نقاط وزن‌دار همسان بررسی کرده و استراتژی برد برای بازیکن سیاه ارائه کردیم و نشان دادیم در حالت یک‌بعدی، در بازی ورونوی وزن‌دار با نقاط غیرهمسان، زمانی که واریانس توزیع نقاط بازیکن سیاه کم‌تر یا مساوی از واریانس توزیع نقاط بازیکن سفید باشد، بازیکن سیاه می‌تواند استراتژی برد داشته باشد. هم‌چنین در حالت دوبعدی، با استفاده از این حقیقت که ناحیه ورونوی وزن‌دار مضربی به‌صورت نامتقارن است، نشان دادیم که بازیکن سیاه در بازی تک دوری، همواره می‌تواند برنده باشد. مسئله مذکور، در حالت‌هایی که بازی در بیش از یک دور انجام شود یا تعداد بازیکن‌ها بیش از دو باشد هم‌چنان باز است.

### منابع

1. Ahn S. H., Cheng S., Cheong O., Golin M., van Oostrum R., "Competitive facility location along a highway", In 7th Annual International Computing and Combinatorics Conference, LNCS, 2108, (2001) 237-246.
2. Bandyapadhyay S., Banik A., Das S., Sarkar H., "Voronoi game on graphs", Theor, Comput, Sci., 562 (2015) 270-282.
3. Cheong O., Har-Peled S., Linial N., Matousek J., "The one-round Voronoi game", Discrete & Computational Geometry, 31(1) (2004) 125-138.
4. Fekete S. P., Meijer H., "The One-Round Voronoi Game Replayed", Comput. Geom., 30(2), (2005) 81-94.
5. Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N., "Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams", John Wiley & Sons (2009).
6. O'Rourke J., "Computational Geometry in C", Cambridge University Press (1998).
7. Rasheed M. M., Hasan M., Rahman M. S., "Maximum Neighbour Voronoi Games", WALCOM 2009, LNCS 5431 (2009) 93-104.