توپولوژی معکوس در BL- جبرها

فرشته فروزش*، سید فرهاد سجادیان
مجتمع آموزش عالی بم، دانشکدهٔ ریاضی و محاسبات نرم،
مهتا بدرود
دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر

دریافت ۹۶/۰۸/۰۴ پذیرش ۹۸/۰۴/۲۵

چکیده

در این مقاله، به معرفی توپولوژی معکوس در BL - جبرها می‌پردازیم و فشردگی، هاسدورف، T_0 و T_1 بودن توپولوژی معکوس روی مجموعهٔ همهٔ فیلترهای اول مینیمال $BL-$ جبر A بررسی می‌شود. هم‌چنین ظریف‌تر بودن توپولوژی زاریسکی از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ را نشان می‌دهیم. در این راستا، ملاحظه می‌شود که تحت شرایطی این دو توپولوژی روی $Min(A)$ معادل می‌شوند. در پایان، با معرفی مفهوم کم- توسیع نشان داده می‌شود نگاشت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیر فضایی زاریسکی، پیوسته است.

واژه‌های کلیدی: فیلترهای اول مینیمال، توپولوژی زاریسکی، توپولوژی معکوس، کم- توسیع.
رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۵۵uxx و ۰۳G۲۵.

مقدمه و پیش‌نیازها

اولین بار، مفهوم BL- جبرها به‌وسیلهٔ هایک[1] معرفی شدند[۵]. او یک برهان جبری از قضیهٔ تمامیت "منطق پایه‌ای" (BL) ارائه داد که بر پایه نرم‌های مثلثی پیوسته بیان شده است. در ادامه تورونن[2]، BL- جبرها را به‌وسیله سیستم‌های قیاسی بررسی کرد [۱۰].

در حقیقت، BL- جبرها حالت خاص مشبکه‌های مانده هستند و آنها بر اساس منطق پایه‌ای چند ارزشی تعریف می‌شوند که به‌وسیلهٔ هایک به‌صورت جبری مطرح شدند. انگیزه تعریف BL- جبرها بدین‌صورت است:

در ابتدا، BL- جبرها ساختار جبری از منطق گزاره‌ای که منطق پایه‌ای نامیده می‌شوند، به‌وجود می‌آیند که این منطق‌های پایه‌ای منطق‌های چندارزشی هستند، که عبارتند از: منطق لوکاسویچ[3]، منطق گودل، منطق ضربی است که ارزش درستی گزاره در بازهٔ [۰,۱] را نشان می‌دهد. سپس، BL- جبرها یک ساختار جبری برای بررسی t- نرم‌های پیوسته روی [۰,۱] ارائه می‌دهند.

در ادامه لئوستین[4] (۲۰۰۳)، توپولوژی زاریسکی[5] در BL- جبرها را معرفی کرد که بدین‌شرح است [۷]:

*نویسنده مسئول frouzesh@bam.ac.ir

1. Hajek
2. Turunen
3. Lukasiewicz
4. Leustean
5. Zariski

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.1.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.631]

فرض کنید F یک فیلتر از BL- جبر A باشد و مجموعهٔ همه فیلترهای اول را با $Spec(A)$ نمایش داده شود و مجموعه‌های $v_A(F) = \{P \in Spec(A): F \subseteq P\}$ و $u_A(F) = \{P \in Spec(A): F \nsubseteq P\}$ به‌ترتیب مجموعه‌های باز و بسته این توپولوژی هستند که خانواده $\{u_A(F)\}_{F\subseteq A}$، خانواده مجموعه‌های باز توپولوژی زاریسکی است. او نشان داد که این توپولوژی فضایی، T_0 و فشرده است و برای $a \in A$ مجموعه‌های باز $u_A(a) = \{P \in Spec(A): a \notin P\}$ تشکیل پایه‌ای برای توپولوژی زاریسکی روی $Spec(A)$ می‌دهند.

چون در توپولوژی زاریسکی $v_A(F)$ها مجموعه‌های بسته توپولوژی‌اند اما در توپولوژی معکوس $V_A(F) = v_A(F) \cap Min(A)$ باز در نظر گرفته شده‌اند، از این‌رو این توپولوژی را توپولوژی معکوس نام نهادیم.

معرفی توپولوژی معکوس در $MV-$ جبرها که به‌وسیلهٔ فروزش و دیگران انجام شده است [۴]، انگیزه‌ای شد که ما نیز به بررسی و مطالعه توپولوژی معکوس در $BL-$ جبرها بپردازیم.

در این مقاله، ما به معرفی توپولوژی معکوس روی مجموعهٔ همه فیلترهای اول مینیمال A که با $Min(A)$ نمایش داده می‌شود، می‌پردازیم و خواص‌های توپولوژیکی مانند فشردگی، هاسدورف، T_0 و T_1 بودن آن فضا را بررسی می‌کنم. از آن‌جاکه داریم $Min(A) \subseteq Spec(A)$، توپولوژی زیر فضایی زاریسکی را روی $Min(A)$ بررسی کرده و ثابت می‌کنیم توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ ظریف‌تر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است. در این راستا، شرایطی برای معادل بودن توپولوژی زاریسکی و توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ بیان می‌کنیم. در پایان، با معرفی مفهوم یک توسیع $BL-$ جبر، به بررسی و مطالعه ارتباط بین فیلترهای اول مینیمال آنها می‌پردازیم. در ادامه، مفهوم کم- توسیع را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم نگاشت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیر فضایی پیوسته است.

تعاریف و قضایای استفاده شده در اثبات مطالب این مقاله بدین‌شرح است:

تعریف ۱.[۹]، جبر $A = (A,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ از نوع (۲،۲،۲،۲،۰،۰) مفروض است. A را یک $BL-$ جبر گویند، اگر

۱. $(A,\odot,1)$ یک تکواره جابه‌جایی باشد.

۲. $(A,\wedge,\vee,0,1)$ مشبکه‌ای با کوچک‌ترین عضو ۰ و بزرگ‌ترین عضو ۱ باشد.

۳. برای هر $a,b,c \in A$ ، روابط زیر برقرار باشد:

- $c \le a \rightarrow b$ اگر و تنها اگر $a \odot c \le b$
- $a \wedge b = a \odot (a \rightarrow b)$
- $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$

$a^n = a\odot \dots \odot a$ (n بار) تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. [۹]، در هر BL- جبر A ، برای هر $a,b,c \in A$ داریم:

$a \vee (b\odot c) \ge (a \vee b)\odot(a \vee c)$ و از این‌رو، برای هر $m,n \in \mathbb{N}$ ، $a^m \vee b^n \ge (a \vee b)^{mn}$.

تعریف ۳. [۹]، زیر مجموعهٔ ناتهی F از $BL-$ جبر A را فیلتر می‌نامیم اگر

۱. برای هر $a,b \in F$ داشته باشیم $a \odot b \in F$

۲. اگر $a \in F$، $a \le b$، آنگاه $b \in F$.

مجموعهٔ همه فیلترهای A را با $F(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴. [۹]، فرض کنید X زیر مجموعه‌ای از BL- جبر A باشد. فیلتر تولید شده به‌وسیلهٔ X را با نماد $< X >$ نمایش می‌دهیم. اگر $X = \emptyset$، آن‌گاه $< X >= \{1\}$ و اگر $X \neq \emptyset$ داریم:

$$< X > = \{y \in A: x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n \le y, n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \ldots x_n \in X\}$$

به‌وضوح اگر $a \in A$، آنگاه $< a > = \{b \in A: a^n \le b, n \in \mathbb{N}\}$.

قضیهٔ ۵. [۹]، برای هر خانواده $\{F_i\}_{i\in I}$ از فیلترهای BL- جبر A داریم

$$\wedge_{i\in I} F_i = \cap_{i\in I} F_i \text{ و } \vee_{i\in I} F_i =< \cup_{i\in I} F_i >$$

قضیهٔ ۶. [۹]، فرض کنید A یک BL- جبر و $a, b \in A$ در این صورت داریم:

۱. اگر $a \le b$ آن‌گاه $< b >\subseteq< a >$

۲. $< a >\vee< b >=< a\odot b >=< a \wedge b >$

۳. $< a >\cap< b >=< a \vee b >$.

تعریف ۷. [۹]، فیلتر F از BL- جبر A سره است اگر $F \neq A$ باشد.

- F یک فیلتر سره است اگر و تنها اگر $0 \notin F$ باشد.
- فیلتر سره P از A را اول گوییم، اگر برای هر $a, b \in A$، داشته باشیم $a \vee b \in P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$ یا به‌طور معادل، فیلتر P را اول گوییم اگر و تنها اگر برای هر دو فیلتر F, G که $F \cap G \subseteq P$ نتیجه شود $F \subseteq P$ یا $G \subseteq P$.
- فرض کنید A, B دو $BL-$ جبر باشند. تابع $f: A \to B$ را همریختی $BL-$ جبری از A به B گوییم، اگر در شرایط زیر برای هر $x, y \in A$ صدق کند:

۱. $f(0_A) = 0_B$

۲. $f(x\odot y) = f(x)\odot f(y)$

۳. $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$

- مجموعهٔ همه فیلترهای اول BL- جبر A را با $Spec(A)$ نمایش می‌دهیم.
- فیلتر اول F از BL- جبر A را مینیمال گوییم، اگر $Q \in Spec(A)$ موجود باشد به‌طوری‌که $Q \subseteq F$، آن‌گاه $F = Q$ نتیجه شود. مجموعهٔ همه فیلترهای اول مینیمال BL- جبر A را با $Min(A)$ نمایش می‌دهیم.
- زیر مجموعهٔ S از A را $\vee$- بسته گوییم، اگر $a, b \in S$ آن‌گاه $a \vee b \in S$. مجموعهٔ همه $\vee$- بسته‌ها روی A را با نماد $S(A)$ نمایش می‌دهیم [۷].

برای هر $s \in S(A)$ در $BL-$ جبر A رابطهٔ θ_S را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$(x, y) \in \theta_S$ اگر و تنها اگر $e \in S \cap B(A)$ وجود دارد به‌قسمی که $x \vee e = y \vee e$.

به‌سادگی مشخص می‌شود که θ_S رابطهٔ هم‌نهشتی است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.1.6]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.631]

اگر $x \in A$، $\frac{x}{S}$ را کلاس هم‌ارزی x نسبت به θ_S گویند و مجموعهٔ همه کلاس‌های هم‌ارزی نسبت به رابطهٔ θ_S را با نماد $A[S] = \frac{A}{\theta_S}$ نمایش می‌دهند و نگاشت $P_S: A \to A[S]$ را نگاشت کانونی گویند که با ضابطهٔ $P_S(x) = \frac{x}{S}$، برای هر $x \in A$ مشخص می‌شود. هم‌چنین واضح است که در $A[S]$ برای هر $x, y \in A$ این روابط برقرار است:

$$0 = \frac{0}{S}\ , 1 = \frac{1}{S}\ , \frac{x}{S} \vee \frac{y}{S} = \frac{(x \vee y)}{S}\ , \frac{x}{S} \odot \frac{y}{S} = \frac{(x \odot y)}{S}\ , \frac{x}{S} \to \frac{y}{S} = \frac{(x \to y)}{S}$$

هم‌چنین P_S همریختی پوشای BL – جبری است.

فیلتر اول P مفروض است. اگر $S = A - P$ باشد، به‌وضوح S، $\vee$ - بسته است و در این صورت $A[S]$ را با نماد A_P نمایش می‌دهیم که فیلتر اول آن به‌صورت $PA_P = \{\frac{x}{S} : x \in P\}$ است.

لم ۸. [۹]، فرض کنید A یک BL - جبر باشد. در این‌صورت داریم

$$\bigcap_{P \in Spec(A)} P = \bigcap_{Q \in Min(A)} Q = \{1\}$$

قضیهٔ ۹. [۲] اگر F یک فیلتر از BL– جبر A باشد و S زیر مجموعهٔ ناتهی $\vee$- بسته از A باشد، به‌طوری‌که $F \cap S = \emptyset$، آن‌گاه یک فیلتر اول P از A وجود دارد به‌طوری‌که $F \subseteq P$ و $P \cap S = \emptyset$.

قضیهٔ ۱۰. [۹] اگر $f: A \to B$ همریختی $BL-$ جبری باشد و P یک فیلتر اول از B باشد آن‌گاه $f^{-1}(P)$ فیلتر اول از A است.

فرض کنید F یک فیلتر از BL– جبر A باشد. تعریف می‌کنیم:

$$u_A(F) = \{P \in Spec(A): F \nsubseteq P\}, U_A(F) = \{P \in Min(A): F \nsubseteq P\}$$

$$v_A(F) = \{P \in Spec(A): F \subseteq P\}, V_A(F) = \{P \in Min(A): F \subseteq P\}$$

اگر $F = \{a\}$، آن‌گاه $U_A(F), V_A(F), u_A(F), v_A(F)$ را به‌ترتیب با $U_A(a), V_A(a), u_A(a), v_A(a)$ نمایش می‌دهیم. به‌طوری‌که

$$u_A(a) = \{P \in Spec(A): a \notin P\}, U_A(a) = \{P \in Min(A): a \notin P\}$$

$$v_A(a) = \{P \in Spec(A): a \in P\}, V_A(a) = \{P \in Min(A): a \in P\}$$

قضیهٔ ۱۱. [۷]، فرض کنید A یک BL– جبر باشد. برای هر $Y, X \subseteq A$ و $a, b \in A$ داریم:

۱. $V_A(X) = V_A(< X >)$ و $U_A(<X>)=U_A(X)$
۲. $V_A(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} V_A(X_i)$ و $U_A(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} U_A(X_i)$
۳. $U_A(a) \cap U_A(b) = U_A(a \vee b)$
۴. $V_A(X) \cup V_A(Y) = V_A(< X > \cap < Y >)$
۵. $U_A(X) \cup U_A(Y) = U_A(< X > \cup < Y >)$
۶. اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $U_A(X) \subseteq U_A(Y)$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.1.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.631]

قضیهٔ ۱۲. [۳]، قرار دهید $X = Spec(A)$ و $\tau = \{u_A(F): F \in F(A)\}$ در این صورت (X, τ) یک فضای توپولوژیک است.

توپولوژی τ روی X در قضیه ۱،۱۲ را توپولوژی زاریسکی می‌نامیم.

لم ۱۳. [۷]، گردایهٔ $\beta = \{u_A(a)\}_{a\in A}$ یک پایه برای توپولوژی زاریسکی روی $Spec(A)$ است.

نتیجهٔ ۱۴. گردایهٔ $\{U_A(a)\}_{a\in A}$ یک پایه برای توپولوژی زیر فضایی روی $Min(A)$ است.

تعریف ۱۵. [۸]، فرض کنید X یک فضای توپولوژی و x_2, x_1 دو نقطه متمایز X باشند:

۱. X را T_0 گوییم هرگاه یک همسایگی شامل یکی از این دو نقطه موجود باشد به‌طوری‌که شامل دیگری نباشد.

۲. X را T_1 گوییم هرگاه همسایگی‌های u_1 و u_2 به‌ترتیب شامل x_1 و x_2 موجود باشند به‌طوری‌که $x_1 \notin u_2$ و $x_2 \notin u_1$.

۳. X را هاسدورف یا T_2 گوییم هرگاه همسایگی‌های u_1 و u_2 به‌ترتیب شامل x_1 و x_2 موجود باشند به‌طوری‌که $u_1 \cap u_2 = \emptyset$.

۴. فضای توپولوژی X را صفر بعدی گوییم هرگاه پایه‌ای برای X موجود باشد که هر عضو آن بسته باشد.

قضیهٔ ۱۶. [۶]، فرض کنید A, B زیر فضاهای فشرده مجزا از فضای هاسدورف X باشند، در این‌صورت مجموعهٔ‌های باز مجزا U, V موجودند که به‌ترتیب شامل A, B هستند.

قرارداد: در این مقاله A را یک BL- جبر درنظر بگیرید.

نتایجی از فیلترهای اول مینیمال در BL- جبرها

در این بخش، به مطالعه فیلترهای اول مینیمال می‌پردازیم. در ادامه، مفهوم توسیع و کم-توسیع در یک BL- جبر را معرفی می‌کنیم و به بررسی برخی از ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱۷. فرض کنید A یک BL- جبر و F یک فیلتر اول باشد. F فیلتر اول مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $x \in F$، $r \in A - F$ موجود باشد به‌قسمی‌که $x \vee r = 1$ باشد.

برهان: فرض کنید $F \in Min(A)$ باشد و $x \in F$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $r \in A - F$، $x \vee r \neq 1$ برقرار باشد. به‌وضوح $S = \{x \vee r : r \in A - F\}$ یک زیر مجموعهٔ $\vee$- بسته است و $\{1\} \in F(A)$.

هم‌چنین $S \cap \{1\} = \emptyset$ است. بنا به قضیهٔ ۹، $Q \in Spec(A)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{1\} \subseteq Q$ و $Q \cap S = \emptyset$. دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: فرض کنید $Q \subseteq F$ باشد. چون $F \in Min(A)$ است، از این‌رو، $F = Q$ و در نتیجه $x \in Q$. از طرفی $x \vee 0 = x$ و $0 \notin F$، لذا $x \in S$. بنابراین $Q \cap S \neq \emptyset$ که تناقض است.

حالت دوم: فرض کنید $Q \nsubseteq F$ باشد. بنابراین وجود دارد $u \in Q - F$. چون $u \leq u \vee x$ و $u \in Q$. در نتیجه $u \vee x \in Q$. از طرفی $u \vee x \in S$. لذا $Q \cap S \neq \emptyset$ که تناقض است.

برعکس، فرض کنید برای هر $x \in F$، $r \in A - F$ وجود دارد به‌قسمی‌که $r \vee x = 1$. نشان می‌دهیم $F \in Min(A)$. فرض کنید $K \in Spec(A)$ به‌طوری‌که $K \subsetneq F$. بنابراین $x \in F - K$ وجود دارد. حال بنا به

فرض $r \in A - F$ موجود است به قسمی که $r \vee x = 1$. در نتیجه $r \vee x = 1 \in K$ و چون $x \notin K$ و K اول است، $r \in K$ که تناقض است.

یادآوری می‌کنیم، اگر F فیلتری از A باشد، آن‌گاه $Ann_A(F) = \{x \in A | \ x \vee y = 1, \forall y \in F\}$ یک فیلتر از A است[۵].

قضیهٔ ۱۸. فرض کنید A یک BL- جبر، $P \in Min(A)$ و F یک فیلتر با تولید متناهی باشد. در این صورت $F \subseteq P$ اگر و تنها اگر $Ann_A(F) \nsubseteq P$.

برهان: قرار دهید $F =< a_1, a_2, \dots, a_n >$. فرض کنید $F \subseteq P$. از آن‌جا که برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in F \subseteq P$، نتیجه می‌شود $a_i \in P$، برای هر $1 \leq i \leq n$. از این‌رو، بنا به قضیهٔ ۱۷، $u_i \in A - P$ وجود دارد به‌طوری‌که $u_i \vee a_i = 1$ برای هر $1 \leq i \leq n$. حال $u = u_1 \vee u_2 \vee \dots \vee u_n$ در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم $u \in Ann_A(F) - P$. به‌وضوح $u \in A - P$. همچنین بنا به تعریف ۴، برای هر $x \in F$ داریم $a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \dots \odot a_{i_n} \leq x$ و طبق قضیهٔ ۱۷ نتیجه می‌شود:

$$1 = (u \vee a_{i_1}) \odot (u \vee a_{i_2}) \odot \dots \odot (u \vee a_{i_n}) \leq u \vee (a_{i_1} \odot \dots \odot a_{i_n}) \leq u \vee x$$

در نتیجه، برای هر $x \in F$ داریم $u \vee x = 1$، بنابراین $u \in Ann_A(F)$. لذا $Ann_A(F) \nsubseteq P$.

برعکس، فرض کنید $Ann_A(F) \nsubseteq P$. از این‌رو، وجود دارد $x \in Ann_A(F) - P$. پس برای هر $a_i \in F$ داریم $x \vee a_i = 1$. زیرا $x \vee a_i = 1 \in P$ و $x \notin P$، نتیجه می‌شود برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in P$. بنابراین $F \subseteq P$.

لم ۱۹. فرض کنید A یک BL- جبر باشد. اگر $1 \neq x \in A$، آنگاه $P \in Min(A)$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \notin P$.

برهان: فرض کنید $1 \neq x \in A$ و برای هر $P \in Min(A)$ داشته باشیم $x \in P$. از این‌رو، $x \in \bigcap_{P \in Min(A)} P$ بنا به لم ۸ نتیجه می‌شود $\{1\} = \bigcap_{P \in Spec(A)} P = \bigcap_{P \in Min(A)} P$، بنابراین $x = 1$ که تناقض است.

نکتهٔ ۲۰. اگر F, G فیلترهایی از BL- جبر A باشند، در این صورت $U_A(F) \cap U_A(G) = U_A(F \wedge G)$.

برهان: بنا به قضیهٔ ۱۱ قسمت (۶)، چون $F \cap G \subseteq F, G$، نتیجه می‌شود

$$U_A(F \wedge G) \subseteq U_A(F), U_A(G).$$

بنابراین داریم:

$$U_A(F \wedge G) \subseteq U_A(F) \cap U_A(G).$$

حال فرض کنید $P \in U_A(F) \cap U_A(G)$ باشد. از این‌رو، $F \nsubseteq P$ و $G \nsubseteq P$ و بنا به تعریف ۷ نتیجه می‌شود $F \cap G \nsubseteq P$ و در نتیجه $P \in U_A(F \wedge G)$ از این‌رو، داریم:

$$U_A(F) \cap U_A(G) \subseteq U_A(F \wedge G).$$

بنابراین

$$U_A(F) \cap U_A(G) = U_A(F \wedge G)$$

نتیجه می‌شود.

تذکر ۲۱. فرض کنید F و G فیلترهای با تولید متناهی از $BL-$ جبر A باشند. در این صورت:

۱. $F \wedge G$ یک فیلتر با تولید متناهی است.

۲. $F \vee G$ یک فیلتر با تولید متناهی است.

تعریف۲۲. فرض کنید B زیر جبری از A باشد. A را توسیع B گویند و با نماد $B \hookrightarrow A$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۳. بازهٔ یکه $A = [0,1]$ را در نظر بگیرید. برای هر $x, y \in A$ ، عمل‌های $\odot, \rightarrow$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$x \odot y = \min\{x, y\} \;, x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آن‌گاه $(A, min, max, \odot, \rightarrow, 1)$ یک $BL-$ جبر است [۹].

حال برای هر عدد صحیح $n \geq 2$، مجموعهٔ $L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$، زیر جبری از A است. از این‌رو، $L_n \hookrightarrow A$ برای هر $n \geq 2$، یک توسیع است.

قضیهٔ ۲۴. فرض کنید $B \hookrightarrow A$ یک توسیع از $BL-$ جبرها باشد. برای هر $P \in Spec(B)$، $Q \in Min(A)$ وجود دارد به قسمی که $Q \cap B \subseteq P$. بعلاوه، اگر $P \in Min(B)$ باشد، $Q \in Min(A)$ وجود دارد به قسمی که $P = Q \cap B$.

برهان: قرار دهید $D = \{Q \in Spec(A): Q \cap B \subseteq P\}$. بنا به لم زُرن، کافی است نشان دهیم $D \neq \emptyset$. فرض کنید $\psi: B \longrightarrow B_P$ با ضابطهٔ $\psi(b) = b/S$، $\varphi: A \rightarrow A_P$ با ضابطهٔ $\varphi(a) = a/S$ و $\phi: B_P \rightarrow A_P$ با ضابطهٔ $\phi(b/S) = b/S$ باشد. فرض کنید T یک فیلتر ماکسیمال از A_P باشد. قرار دهید $Q = \varphi^{-1}(T)$. بنا به قضیهٔ ۱۰، Q یک فیلتر از A است. اما $\phi^{-1}(T)$ یک فیلتر اول از B_P است. بنابراین $\phi^{-1}(T) \subseteq PB_P$. حال فرض کنید $b \in Q \cap B$. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b \in Q &\Rightarrow \varphi(b) = \frac{b}{S} \\ &\Rightarrow \frac{b}{S} \in \phi^{-1}(T) \subseteq PB_P \\ &\Rightarrow \exists t \in P; \frac{b}{S} = \frac{t}{S} \\ &\Rightarrow \exists e \in B(A) \cap S; b \vee e = t \vee e \leq t \in P \\ &\Rightarrow b \vee e \in P, e \notin P \\ &\Rightarrow b \in P. \end{aligned}$$

بنابراین $Q \cap B \subseteq P$ از این‌رو، نتیجه می‌گیریم $D \neq \emptyset$.

رابطهٔ $\leq$ روی D را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\forall\, Q_1, Q_2 \in D;\; Q_1 \leq Q_2 \Leftrightarrow Q_2 \subseteq Q_1.$$

به‌وضوح $\leq$ رابطهٔ ترتیبی روی D است. فرض کنید $\{Q_i\}_{i \in I}$ یک زنجیری از D باشد. از این‌رو نتیجه می‌گیریم:

$$\bigcap_{i \in I} Q_i \in Spec(A), (\bigcap_{i \in I} Q_i) \cap B \subseteq P\ .$$

$\bigcap_{i \in I} Q_i$ یک کران بالا از زنجیر D است. از این‌رو، بنا به لم زُرن، D عضو ماکسیمال F است. حال نشان می‌دهیم $F \in Min(A)$. فرض کنید $E \in Spec(A)$ به‌قسمی‌که $E \subseteq F$ و لذا $F \leq E$ نتیجه می‌شود. بنابراین $E \cap A \subseteq F \cap B \subseteq P$ و در نتیجه $F = E$ است. بنابراین $F \in Min(A)$ و اثبات کامل است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.1.6]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.631]

تعریف ۲۵. توسیع $B \hookrightarrow A$ از BL – جبرها را کم- توسیع گویند اگر برای هر $P \in Min(A)$ داشته باشیم $P \cap B \in Min(B)$.

در صورتی که $B \hookrightarrow A$ کم- توسیع باشد، نگاشت $\psi: Min(A) \longrightarrow Min(B)$ را با ضابطهٔ $\psi(P) = P \cap B$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۲۶. با توجه به مثال ۲۳، به‌وضوح $F(A) = \{F_a, F'_a : a \in A\}$ به‌طوری‌که $F_a = (a, 1], F'_a = [a, 1]$ است. از این‌رو فیلتر اول مینیمال آن $P = \{1\}$ است، لذا $Min(A) = \{P\}$. حال فرض کنید $B = L_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. مشاهده می‌شود که فیلتر اول مینیمال آن $P' = \{1\}$ است، از این‌رو، $Min(B) = \{P'\}$. در نتیجه داریم، $P \cap B = \{1\} \in Min(B)$ و بنابراین $B \hookrightarrow A$ یک کم- توسیع است.

قضیهٔ ۲۷. توسیع $B \hookrightarrow A$ کم- توسیع است اگر و تنها اگر درصورتی‌که $P \in Min(A)$ و $b \in P \cap B$ باشد، $a \in B - P$ وجود داشته باشد به قسمی که $a \vee b = 1$.

برهان. فرض کنید $B \hookrightarrow A$ کم- توسیع باشد، $P \in Min(A)$ ، $b \in P \cap B$ و $P \cap B \in Min(B)$. بنا به قضیهٔ ۱۸، $Ann_B(b) \nsubseteq P \cap B$. بنابراین $a \in Ann_A(b)$ وجود دارد به‌قسمی‌که $a \notin P \cap B$. از این‌رو $a \in B - P$ وجود دارد به قسمی که $a \vee b = 1$. برعکس، فرض کنید $P \in Min(A)$ و $P \cap B \notin Min(B)$. بنا به قضیهٔ ۱۷، $b \in P \cap B$ وجود دارد به‌قسمی‌که $a \in B - P$ و $a \vee b \neq 1$، که تناقض است.

نتایجی از توپولوژی زاریسکی و توپولوژی معکوس در BL- جبرها

در این بخش، توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ را تعریف می‌کنیم و ارتباط آن‌را با توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ بررسی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم تحت شرایطی این دو توپولوژی معادل می‌شوند و به بررسی برخی خواص و ویژگی‌های توپولوژی معکوس می‌پردازیم. در پایان، ثابت می‌کنیم نگاشت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیرفضایی زاریسکی، پیوسته است.

قضیهٔ ۲۸. توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ صفر بعدی و هاسدورف است.

برهان: بنا به نتیجهٔ ۱۴ داریم $\{U_A(a)\}_{a \in A}$ یک پایه برای توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ است. ثابت می‌کنیم $U_A(a) = V_A(Ann_A(a))$. فرض کنید $P \in U_A(a)$. در این صورت $P \in Min(A)$ و $a \notin P$، حال بنا به قضیهٔ ۱۸ نتیجه می‌شود $Ann_A(a) \subseteq P$. از این‌رو، $P \in V_A(Ann_A(a))$ و در نتیجه

$$U_A(a) \subseteq V_A(Ann_A(a)).$$

اکنون فرض کنید $K \in V_A(Ann_A(a))$. در این صورت $K \in Min(A)$ و $Ann_A(a) \subseteq K$. بنا به قضیهٔ ۱۸ داریم $a \notin K$. از این‌رو، $K \in U_A(a)$ و در نتیجه $V_A(Ann_A(a)) \subseteq U_A(a)$. بنابراین $V_A\big(Ann_A(a)\big) = U_A(a)$.
چون $V_A\big(Ann_A(a)\big)$ در توپولوژی زاریسکی بسته است، پس $U_A(a)$ نیز بسته است و در نتیجه اعضای پایه $\{U_A(a)\}_{a \in A}$ هم باز و هم بسته هستند، به‌عبارت دیگر $Min(A)$ صفر بعدی است. حال ثابت می‌کنیم $Min(A)$ هاسدورف است. فرض کنید $P_1, P_2 \in Min(A)$ متمایز باشند از آن‌جاکه $P_1 \neq P_2$ داریم $P_1 \nsubseteq P_2$ و $P_2 \nsubseteq P_1$. فرض کنیم $P_1 \nsubseteq P_2$. در این‌صورت وجود دارد $a \in P_1$ به‌طوری‌که $a \notin P_2$. قرار می‌دهیم $U = U_A(a)$ و

$V = U_A^c(a) = V_A(a) = U_A(Ann_A(a))$. داریم $P_2 \in U$ و $P_1 \in V$، اما $U \cap V = U_A(a) \cap U_A^c(a) = \emptyset$ بنابراین $U_A\big(Ann_A(a)\big) = U_A(a) \cap U_A^c(a) = \emptyset$ بنابراین $Min(A)$ هاسدورف است.

لم ۲۹. فرض کنید A یک BL- جبر باشد. گردایهٔ $\beta = \{V_A(F): F \in F(A)\}$ یک پایه توپولوژی برای $Min(A)$ است.

برهان: برای هر $P \in Min(A)$، $F_0 = \{1\}$ فیلتری از BL- جبر A است به‌طوری‌که $F_0 = \{1\} \subseteq P$. بنابراین $P \in V_A(F_0)$. فرض کنید $V_A(F), V_A(G) \in \beta$ ، طبق قضیهٔ ۱۱ قسمت (۲) نتیجه می‌شود

$$V_A(F) \cap V_A(G) = V_A(F \cup G) = V_A(F \vee G).$$

بنابراین β یک پایه توپولوژی برای $Min(A)$ است.

تعریف ۳۰. توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ پایه $\beta = \{V_A(F): A$ فیلتر با تولید متناهی از $F\}$ توپولوژی معکوس برای $Min(A)$ می‌نامیم و با نماد $Min^{-1}(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۱. $BL-$ جبر $A = \overline{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{0, a, b, 1\}$ را در نظر بگیرید، که $\overline{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح منفی است به‌قسمی‌که $-\infty \leq \cdots \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq a, b \leq 1$ و a, b غیر قابل مقایسه‌اند.[۶] عمل‌های $\odot$, $\rightarrow$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$\rightarrow$	$-\infty$	…	-3	-2	-1	0	a	b	1
$-\infty$	1	…	1	1	1	1	1	1	1
⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-3	$-\infty$	…	1	1	1	1	1	1	1
-2	$-\infty$	…	-1	1	1	1	1	1	1
-1	$-\infty$	…	-1	1	1	1	1	1	1
0	$-\infty$	…	-3	-2	-1	1	1	1	1
a	$-\infty$	…	-3	-2	-1	b	1	b	1
b	$-\infty$	…	-3	-2	-1	a	a	1	1
1	$-\infty$	…	-3	-2	-1	0	a	b	1

$\odot$	$-\infty$	…	-3	-2	-1	0	a	b	1
$-\infty$	$-\infty$	…	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-3	$-\infty$	…	-6	-5	-4	-3	-3	-3	-3
-2	$-\infty$	…	-5	-4	-3	-2	-2	-2	-2
-1	$-\infty$	…	-4	-3	-2	-1	-1	-1	-1
0	$-\infty$	…	-3	-2	-1	0	0	0	0
a	$-\infty$	…	-3	-2	-1	0	a	0	a
b	$-\infty$	…	-3	-2	-1	0	0	b	b
1	$-\infty$	…	-3	-2	-1	0	a	b	1

به‌سادگی می‌توان نشان داد تنها فیلترهای A عبارتند از:

$$\mathrm{F}_1 = \{1\}, F_2 = \{b, 1\}, F_3 = \{a, 1\}, F_4 = \{0, a, b, 1\}, F_5 = A - \{-\infty\},$$
$$F_n = \{x \in A: x \geq n, n \in \mathbb{Z}\}$$

داریم $X = Min(A) = \{F_2, F_3\}$. در نتیجه داریم:

$$V_A(F_1) = X, V_A(F_2) = \{F_2\}, V_A(F_3) = \{F_3\}, V_A(F_4) = \emptyset, V_A(F_5) = V_A(F_n) = V_A(A) = \emptyset$$

بنابراین $\tau = \{\emptyset, \{F_2\}, \{F_3\}, X\}$ روی فضای $X = Min(A)$ توپولوژی معکوس است.

تذکر ۳۲. مجموعهٔ $\beta = \{V_A(a): a \in A\}$ یک زیر پایه برای توپولوژی $Min^{-1}(A)$ است.

برهان: واضح است $Min(A) = \bigcup_{a \in A} V_A(a)$. طبق قضیه‌های ۵ و ۱۱ قسمت (۲) و (۱) داریم

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.1.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.631]

$$\begin{aligned} V_A(F) &= V_A(< a_1, a_2, \dots, a_n >) = V_A(< a_1 > \vee < a_2 > \vee \dots \vee < a_n >) \\ &= V_A(< \cup_{i=1}^{n} < a_i \gg) = V_A(\cup_{i=1}^{n} < a_i >) \\ &= V_A(< a_1 >) \cap V_A(< a_2 >) \dots \cap V_A(< a_n >) = \cap_{i=1}^{n} V_A(a_i) \end{aligned}$$

لم ۳۳. توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ ظریف‌تر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است.

برهان: مشابه تذکر ۳۲ نتیجه می‌گیریم $V_A(F) = \cap_{i=1}^{n} V_A(a_i)$. حال بنا به قضیهٔ ۲۸ و نکتهٔ ۲۰ داریم:

$$\cap_{i=1}^{n} V_A(a_i) = \cap_{i=1}^{n} U_A(Ann_A(a_i)) = U_A(\vee_{i=1}^{n} Ann_A(a_i)) \ .$$

چون $V_A(F)$ برای هر فیلتر متناهی F از A یک مجموعهٔ باز از توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ است، بنابراین توپولوژی زاریسکی ظریف‌تر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است.

در این قضیه، نشان می‌دهیم تحت شرایط خاص، توپولوژی معکوس با توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ معادل می‌شوند.

قضیهٔ ۳۴. فرض کنید A یک BL - جبر باشد. اگر برای هر $a \in A$، فیلتر با تولید متناهی F از A موجود باشد به‌طوری‌که $F \subseteq Ann_A(a)$ و $Ann_A(< a > \vee F) = \{1\}$، آن‌گاه توپولوژی زاریسکی و معکوس روی $Min(A)$ معادلند.

برهان: بنا به لم ۳۳ می‌دانیم توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ از توپولوژی معکوس ظریف‌تر است. برای اثبات کافی است نشان دهیم برای هر $a \in A$، فیلتر با تولید متناهی F از A موجود است به‌طوری‌که $U_A(a) = V_A(F)$. فرض کنید $P \in U_A(a)$. در این صورت داریم $a \in A - P$. حال بنا به فرض، فیلتر با تولید متناهیF از A وجود دارد به‌طوری‌که $F \subseteq Ann_A(a)$ و $Ann_A(< a > \vee F) = \{1\}$. اگر $x \in F$، در این صورت $x \in Ann_A(a)$ و $x \vee a = 1$. از طرفی چون $a \notin P$، از این‌رو، $x \in P$. بنابراین $F \subseteq P$. لذا $P \in V_A(F)$ و در نتیجه $U_A(a) \subseteq V_A(F)$. فرض کنید $V_A(F) \nsubseteq U_A(a)$. بنابراین $P \in Min(A)$ وجود دارد به‌طوری‌که $F \subseteq P$ و $a \in P$. ثابت می‌کنیم $< a > \vee F \subseteq P$. فرض کنید $t \in < a > \vee F$. در این صورت طبق تعریف ۴، داریم $a^n \odot b \le t$ به‌طوری‌که $b \in F \subseteq P$. پس $t \in P$ از این‌رو، $< a > \vee F \subseteq P$. اما $Ann_A(< a > \vee F) = \{1\}$، در نتیجه $Ann_A(< a > \vee F) \subseteq P$ که با قضیهٔ ۱۸ در تناقض است. بنابراین $V_A(F) \subseteq U_A(a)$. در نتیجه $U_A(a) = V_A(F)$.

مسئلهٔ باز: آیا دو توپولوژی معکوس و زاریسکی روی $Min(A)$ بدون دو شرط قضیهٔ ۳۴ معادل می‌شوند؟

مثال ۳۵. [۹]، BL - جبر $A = \{0, a, b, c, 1\}$ به‌قسمی‌که $0 \le c \le a, b \le 1$ در نظر بگیرید. عمل‌های $\odot$, $\to$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$\to$	0	c	a	b	1
0	1	1	1	1	1
c	0	1	1	1	1
a	0	b	1	b	1
b	0	a	a	1	1
1	0	c	a	b	1

$\odot$	0	c	a	b	1
0	0	0	0	0	0
c	0	c	c	c	c
a	0	c	a	c	a
b	0	c	c	b	b
1	0	c	a	b	1

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.1.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.631]

به‌سادگی می‌توان نشان داد $F_1=\{1,a\}, F_2=\{1,b\}, F_3=\{1,a,b,c\}$ فیلترهای اول A هستند. در این صورت داریم، $X=Spec(A)=\{F_1,F_2,F_3\}$. هم‌چنین

$$V_A(\{1\})=Spec(A), V_A(F_1)=\{F_1,F_3\}, V_A(F_2)=\{F_2,F_3\}, V_A(F_3)=\{F_3\}, V_A(A)=\emptyset$$

در نتیجه $\tau=\{V_A^c(F): F\in F(A)\}=\{\emptyset,\{F_2\},\{F_1\},\{F_2,F_1\},X\}$ با فضای $X=Spec(A)$ تشکیل توپولوژی زاریسکی می‌دهد.

به‌وضوح $Min(A)=\{F_2,F_1\}$. هم‌چنین داریم:

$$V_A(\{1\})=Min(A), V_A(F_1)=\{F_1\}, V_A(F_2)=\{F_2\}, V_A(F_3)=\emptyset, V_A(A)=\emptyset$$

بنابراین $\tau=\{V_A^c(F): F\in F(A)\}=\{\emptyset,\{F_2\},\{F_1\},\{F_2,F_1\}\}$ همراه با $Min(A)$ یک توپولوژی زیر فضایی زاریسکی روی $Min(A)$ است.

به‌علاوه، توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\beta=\{\emptyset,\{F_1\},\{F_2\},\{F_1,F_2\}\}$ یک پایهٔ توپولوژی معکوس برای $Min(A)$ است.

هم‌چنین این مثال در شرایط قضیهٔ ۳۴ نیز صدق می‌کند.

یادآوری می‌کنیم برای هر $a\in A$ ، $u_A(a)$ در $Spec(A)$ فشرده است[۷]. از قضیهٔ ۱۱ قسمت (۵) برای هر فیلتر با تولید متناهی $\mathrm{F}=<a_1,a_2,\dots,a_n>$ داریم:

$$U_A(F)=U_A(\vee_{i=1}^n<a_i>)=\cup_{i=1}^n U_A(<a_i>)=\cup_{i=1}^n U_A(a_i)$$

از این‌رو، $U_A(F)$ فشرده است.

قضیهٔ ۳۶. فرض کنید A یک BL - جبر باشد. برای هر $V_A(a), a\in A$ در $Min^{-1}(\mathrm{A})$ فشرده است.

برهان: برای اثبات کافی است نشان دهیم هر پوشش باز از عناصر پایه برای $V_A(a)$ دارای یک زیر پوشش متناهی است. از برهان قضیهٔ ۲۸ نتیجه می‌گیریم

$$U_A\big(Ann_A(a)\big)=V_A(a)\subseteq\cup_{i\in I}V_A(a_i)=\cup_{i\in I}U_A\big(Ann_A(a_i)\big)$$

چون $U_A(Ann_A(a))$ در توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ فشرده است، بنابراین زیر مجموعهٔ متناهی J از I موجود است به‌طوری‌که $V_A(a)\subseteq\cup_{i\in J}U_A\big(Ann_A(a_i)\big)=\cup_{i=1}^n V_A(a_i)$. در نتیجه $V_A(a)$ یک مجموعهٔ فشرده از $Min^{-1}(A)$ است.

قضیهٔ ۳۷. توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ فشرده، فضای T_0 و T_1 است.

برهان: به‌وضوح $Min(A)=V_A(1)=\{P\in Min(A): 1\in P\}$. پس بنا به قضیهٔ ۳۶ فشردگی $Min^{-1}(A)$ نتیجه می‌شود. فرض کنید $P_1,P_2\in Min(A)$ به‌طوری‌که $P_1\neq P_2$. در این صورت $P_1\nsubseteq P_2$ و $P_2\nsubseteq P_1$. فرض کنید $P_1\nsubseteq P_2$. بنابراین $a\in P_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $a\notin P_2$. قرار دهید $U=V_A(a)$، پس $P_1\in U$ و $P_2\notin U$ بنابراین $Min^{-1}(A)$ فضای T_0 است. فرض کنید P و Q دو فیلتر اول مینیمال متمایز باشد و $a\in P-Q$. حال از قضیهٔ ۱۷ نتیجه می‌گیریم $x\in A-P$ وجود دارد به‌طوری‌که $a\vee x=1$. پس $a\vee x\in Q$ و در نتیجه $x\in Q-P$. بنابراین $P\in V_A(a)-V_A(x)$ و $Q\in V_A(x)$. بنابراین $P\in V_A(a)$ و $P\notin V_A(x)$ به‌طور مشابه $Q\in V_A(x)$ و $Q\notin V_A(a)$. از این‌رو $Min^{-1}(A)$ فضای T_1 است.

قضیهٔ ۳۸. $Min^{-1}(A)$ یک فضای توپولوژی هاسدورف است.

برهان: فرض کنید P و Q دو فیلتر اول مینیمال متمایز از BL - جبر A باشند به‌طوری‌که $P \neq Q$ از این‌رو، $a \in P - Q$، $b \in Q - P$ موجود هستند. بدیهی است که $< a >\subseteq P$,$< b >\subseteq Q$ و چون $Q, P \in Min(A)$، بنا به قضیهٔ ۱۸، داریم $Ann_A(< a >) \nsubseteq P$, $Ann_A(< b >) \nsubseteq Q$. از این‌رو، داریم:

$$Q \in V_A(b) \text{ و } Q \in U_A\big(Ann_A(< a >)\big), P \in U_A(Ann_A(< b >), P \in V_A(a).$$

بنا به قضیهٔ ۲۸ چون توپولوژی زاریسکی روی $Min(A)$ یک فضای هاسدورف است، پس

$$V_A(a) \cap V_A(b) = U_A(Ann_A(< a >) \cap U_A(Ann_A(< b >) = \emptyset.$$

قضیهٔ ۳۹. فرض کنید $H \subseteq Min^{-1}(A)$. H هم باز و هم بسته است اگر و تنها اگر فیلترهای با تولید متناهی F و G موجودند به‌طوری‌که $V_A(F) = H$، $F \wedge G = 1$ و $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$.

برهان: فرض کنید H زیر مجموعهٔ هم باز و هم بسته از $Min^{-1}(A)$ باشد. طبق قضیهٔ ۳۷ نتیجه می‌شود زیر مجموعهٔ H فشرده است. از این‌رو، دارای پوشش باز متناهی مانند $H = \bigcup_{i=1}^{n} V_A(F_i)$ است. بنا به قضیه‌های ۵ و ۱۱قسمت (۴) داریم

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} V_A(F_i) = V_A(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) = V_A(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i)$$

بنا به تذکر ۱۸، فیلتر با تولید متناهی F از A موجود است به‌طوری‌که $H = V_A(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i) = V_A(F)$. از طرفی می‌دانیم متمم H نیز هم باز و هم بسته است، بنابراین فیلتر با تولید متناهی G از A موجود است به قسمی‌که

$$Min(A) - H = V_A(G).$$

بنا به قضیه‌های ۵ و ۱۱ قسمت (۲) خواهیم داشت:

$$\emptyset = V_A(F) \cap V_A(G) = V_A(F \cup G) = V_A(F \vee G)$$

در نتیجه برای هر $P \in Min(A)$ داریم $F \vee G \nsubseteq P$. از طرفی بنا به تذکر ۲۱ نتیجه می‌شود $F \vee G$ یک فیلتر با تولید متناهی است. حال بنا به قضیهٔ ۱۸ نتیجه می‌شود برای هر $P \in Min(A)$، $Ann_A(F \vee G) \subseteq P$. همچنین بنا به لم ۸ داریم:

$Ann_A(F \vee G) \subseteq \bigcap_{P \in Min(A)} P = \{1\}$. پس $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$. بنابراین بنا به قضیه‌های ۵ و ۱۱ قسمت (۵) داریم:

$$Min(A) = V_A(F) \cup V_A(G) = V_A(F \cap G) = V_A(F \wedge G)$$

و چون برای هر $P \in Min(A)$ داریم $F \wedge G \subseteq P$ ازاین‌رو، $F \wedge G = \{1\}$.

برعکس، چون $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$ برای هر $P \in Min(A)$ داریم $Ann_A(F \vee G) \subseteq P$. حال بنا به تذکر ۲۱ و قضیهٔ ۱۸ نتیجه می‌شود $F \vee G \nsubseteq P$. پس برای هر $P \in Min(A)$ داریم $P \in U_A(F \vee G)$. همچنین بنا به قضیه‌های ۵ و ۱۱ قسمت (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$P \in U_A(F \vee G) = U_A(< F \cup G >) = U_A(F \cup G) = U_A(F) \cup U_A(G) = V_A^c(F) \cup V_A^c(G).$$

بنابراین $Min(A) = V_A^c(F) \cup V_A^c(G)$. در نتیجه $\emptyset = V_A(F) \cap V_A(G)$. از این‌رو داریم:

$$Min(A) = V_A(1) = V_A(F \wedge G) = V_A(F \cap G) = V_A(F) \cup V_A(G).$$

در نتیجه $V_A(F)$ متممی از $V_A(G)$ است، از این‌رو، $H = V_A(F)$.

قضیهٔ ۴۰. فرض کنید توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ فضایی هاسدورف، صفربعدی و فشرده باشد، و برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $a \wedge b = 1$. آن‌گاه فیلترهای با تولید متناهی F, G از A موجود هستند به‌طوری‌که $b \in G, a \in F$ و $Ann_A(F \vee G) = \{1\}$.

برهان: فرض کنید $Min^{-1}(A)$ فضایی هاسدورف، صفربعدی، فشرده باشد و فرض کنید $a, b \in A$ به‌طوری‌که $a \wedge b = 1$. بنا به قضیهٔ ۱۱ قسمت (۳) داریم:

اکنون، از فشردگی $Min^{-1}(A)$ و بسته بودن $U_A(a)$ و $U_A(b)$، فشردگی آنها نیز نتیجه می‌شود. بنا به قضیهٔ ۱۶ و چون $Min^{-1}(A)$ صفر بعدی است، یک مجموعهٔ هم باز و هم بسته مانند H از $Min(A)$ موجود است به‌طوری‌که $H \cap U_A(b) = \emptyset, U_A \subseteq H$. بنا به قضیهٔ ۳۹ فیلترهای با تولید متناهی G, F که به‌ترتیب شامل a, b هستند به‌طوری‌که

$$H = V_A(F), V_A(G) = Min(A) - H, F \wedge G = \{1\}, Ann_A(F \vee G) = \{1\}.$$

قضیهٔ ۴۱. فرض کنید $A \hookrightarrow B$ کم – توسیع از $BL-$ جبرها باشد. نگاشت $\psi: Min(A) \longrightarrow Min(B)$ با ضابطهٔ $\psi(P) = P \cap B$ نسبت به هر دو توپولوژی زاریسکی و معکوس، پیوسته است.

برهان. فرض کنید F فیلتری از B باشد و $b \in B$. داریم:

$$\psi^{-1}\big(V_B(I)\big) = \{P \in Min(A): I \subseteq P\} = V_A(I)$$

و

$$\psi^{-1}\big(U_B(b)\big) = \{P \in Min(A): b \notin P\} = U_A(b)$$

بنابراین نگاشت ψ نسبت به هر دو توپولوژی زاریسکی و معکوس است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، توپولوژی معکوس در BL- جبرها را روی مجموعهٔ همه فیلترهای اول مینیمال تعریف کردیم و نشان دادیم فضای حاصل از توپولوژی معکوس، فشرده، هاسدورف، T_0 و T_1 است. همچنین ثابت کردیم توپولوژی زاریسکی روی همه فیلترهای اول مینیمال A که با $Min(A)$ نمایش می‌دهیم، ظریف‌تر از توپولوژی معکوس روی $Min(A)$ است. درادامه، نشان دادیم که تحت شرایطی این دو توپولوژی روی $Min(A)$ با هم معادل می‌شوند. در پایان، مفهوم کم- توسیع را تعریف کردیم و با استفاده از آن نشان دادیم نگاشت بین فیلترهای اول مینیمال آنها نسبت به دو توپولوژی معکوس و زیر فضایی زاریسکی، پیوسته است.

منابع

1. Di Nola A., Georgescu G., Iorgulescu A., "Pseudo BL-algebra: Part I", Mult. Val. Logic, 8 (2002) 673-714.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.1.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.631]

2. Di Nola A., Georgescu G., Iorgulescu A., "Pseudo BL-algebra: Part II", Mult. Val. Logic, 8 (2002) 717-750.
3. Eslami E., Haghani F., "Pure filters and stable topology on BL-algebras", Kybernetika, No.3, 45 (2009) 491-506.
4. Forouzesh F., Sajadian F., Bedrood M.,"Inverse topology in MV-algebras", Mathematica Bohemica, No. 3, 144 (2019) 273-285.
5. Hajek P., "Metamathematics of Fuzzy Logic", Kluwer Academic Publishers ,Dordrecht, 1988.
6. Iorgulescu, A., "Algebras of logic as BCK-algebras", Bucharest university of Economics, Romania(2008).
7. Leustean L., "The prime and maximal spectra and the reticulation of BL- algebras", Central European Journal of Mathematics 1 (2003) 382-397.
8. Munkres J. R., "Topology", Dorling Kindersely, India, Second Edition, (2006).
9. Piciu D., " Algebras of fuzzy logic", Ed. Universitaria, Cariova, (2007).
10. Turunen E., "BL-algebras of basic fuzzy logic", Mathware and soft computing, 6 (1999) 46-61.