

## مسائل معکوس طیفی عملگرهای اشتورم-لیوویل با شرایط ناپیوسته

محمد شهریاری

دانشگاه مراغه، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۸/۰۷

دریافت ۹۶/۰۸/۱۷

### چکیده

این مقاله به مسئله مقدار مرزی مربوط به معادله دیفرانسیل

$$\ell y := -y'' + qy = \lambda y,$$

با شرایط مرزی استاندارد همراه با شرایط ناپیوستگی در نقطه  $a \in (0, \pi)$  به صورت

$$y(a+0) = a_1 y(a-0), \quad y'(a+0) = a_2 y'(a-0) + a_3 y(a-0),$$

می‌پردازد. که در آن  $h, H, a, a_1, a_2, a_3$  و تابع  $q(x) \in L^2[0, \pi]$  حقیقی و  $a \in (0, \pi)$  و  $a_1 a_2 \neq 0$  و  $\lambda \in \mathbb{C}$  پارامتر طیفی مستقل از  $x$  هستند. ما نتیجه هاچستات-لیبرمن را برای حالتی که یک شرط ناپیوستگی در درون بازه متناهی است، توسعه می‌دهیم، و نشان می‌دهیم که تابع پتانسیل و بعضی ضرایب شرایط مرزی می‌تواند به‌طور منحصر به فرد با دانستن تابع پتانسیل در بعضی بازه‌ها و قسمتی از دو طیف تعیین شود.

**واژه‌های کلیدی:** مسئله معکوس اشتورم-لیوویل، تابع تحلیلی، شرایط ناپیوسته.

### مقدمه

فرض کنید مسئله مقدار مرزی

$$\ell y := -y'' + qy = \lambda y, \quad (1)$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0,$$

$$V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2)$$

و شرایط ناپیوسته (۳) را داشته باشیم:

$$y(a+0) = a_1 y(a-0), \quad y'(a+0) = a_2 y'(a-0) + a_3 y(a-0), \quad (3)$$

که در آن  $h, H, a, a_1, a_2, a_3$ ، تابع  $q \in L^2[0, \pi]$  حقیقی و  $a \in (0, \pi)$  و  $a_1 a_2 \neq 0$  هستند. در این جا  $\lambda \in \mathbb{C}$  پارامتر طیفی نامیده می‌شود. ضرایب  $a_1, a_2, a_3$  معلوم و ثابت فرض می‌شوند. برای سادگی مسئله مقدار مرزی (۱)-(۳) را به صورت  $L = L(q(x); h, H, a)$  می‌نامیم. بدون این‌که به کلیت مسئله خللی وارد شود، با به‌کارگیری لم ۳-۲ از [۱]، می‌توان  $a_2 = \frac{1}{a_1}$  در نظر گرفت. در این صورت با به‌کارگیری شرایط مرزی و ناپیوسته عملگر  $L(q(x); h, H, a)$  خودالحاق است.

مسئله معکوس اشتورم-لیوویل در سه جنبه مختلف قابل بررسی و بحث است، وجود، منحصر به فردی و بازسازی تابع پتانسیل با استفاده از ضرایب داده شده از خواص مقادیر ویژه و توابع ویژه است. در این مقاله، منحصر به فردی تابع پتانسیل و برخی شرایط مرزی نتیجه می‌شود. فرمول‌های مختلفی برای مسائل معکوس و قضیه منحصر به فردی مربوط وجود دارد.

کاربردهای مسئله مقدار مرزی با شرایط انتقال (ناپیوسته) در درون یک بازه با خواص فیزیکی ناپیوسته مرتبط هستند. مسائل معکوس با شرایط مرزی ناپیوسته در درون یک بازه، اغلب در ریاضیات، مکانیک، ژئوفیزیک، رادیو الکترونیک و سایر زمینه‌های علوم و تکنولوژی ظاهر می‌شود. به‌عنوان یک قاعده، چنین مسائلی به خصوصیات ناپیوستگی و ناهم‌واری یک رسانه مربوط می‌شود [۲]-[۵]. این مسائل برای اولین بار در سال ۱۹۲۹ به‌وسیله آمبارزومیان [۶] شروع شد، به‌وسیله بورگ [۷] ادامه داده شد، و در هشتاد سال گذشته به‌تدریج آشکار شده است. برخی از نظرات تکمیلی این زمینه را می‌توان در [۱]، [۸]-[۱۷] و مراجع آنها دید. طرح کلی مطالب این مقاله بدین‌صورت است که در بخش ۲ فرم مجانبی جواب‌ها و مقادیر ویژه مسئله اشتورم-لیوویل با شرایط ناپیوسته را ارائه می‌دهیم و در بخش ۳ مسائل معکوس را بیان کرده و قضایای مربوط به آنها را ثابت می‌کنیم.

### فرم مجانبی جواب‌ها و مقادیر ویژه

فرض کنید  $\varphi(x, \lambda)$  و  $\psi(x, \lambda)$  جواب‌های مسئله (۱) با شرایط ناپیوسته (۳) و به‌ترتیب با شرایط اولیه

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad (۴)$$

$$\psi(0, \lambda) = 1, \quad \psi'(0, \lambda) = -H, \quad (۵)$$

با توجه به بخش ۴-۴-۱ از [۱۸]، تابع

$$\Delta(\lambda) := U(\psi) = -V(\varphi) \quad (۶)$$

تابع  $\Delta(\lambda)$  تابعی تحلیلی از مرتبه  $\frac{1}{2}$  است و دارای یک مجموعه حقیقی شمارا صفر  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  است. که  $\Delta(\lambda)$  تابع مشخصه عملگر  $L$  نامیده می‌شود. فرض کنید  $\lambda = \rho^2$  و  $\tau = \text{Im} \rho$  برای معادله (۱) با شرایط مرزی (۲) و شرایط پرش (۳) فرمول‌های مجانبی زیر برای  $|\lambda| \rightarrow \infty$  برقرار است.

$$\varphi(x; \lambda) = \begin{cases} \cos \rho x + \left( h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right) \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left( \frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2} \right), & x < a, \\ b_1 \cos \rho x + b_2 \cos \rho(2a-x) + f_1(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} + f_2(x) \frac{\sin \rho(2a-x)}{\rho} \\ \quad + O\left( \frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2} \right), & x > a, \end{cases} \quad (۷)$$

$$\varphi'(x; \lambda) = \begin{cases} -\rho \sin \rho x + \left( h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right) \cos \rho x + O\left( \frac{\exp(|\tau|x)}{\rho} \right), & x < a, \\ \rho(-b_1 \sin \rho x + b_2 \sin \rho(2a-x)) + f_1(x) \cos \rho x \\ \quad - f_2(x) \cos \rho(2a-x) + O\left( \frac{\exp(|\tau|x)}{\rho} \right), & x > a, \end{cases} \quad (۸)$$

به‌طوری‌که

$$b_1 = \frac{(a_1 + a_1^{-1})}{2}, \quad b_2 = \frac{(a_1 - a_1^{-1})}{2} \quad (۹)$$

$$f_1(x) = b_1 \left( h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right) + \frac{a_2}{2},$$

$$f_2(x) = b_2 \left( h + \left( -\frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt + \int_0^a q(t) dt \right) \right) + \frac{a_2}{2}.$$

تابع مشخصه به صورت است.

$$\Delta(\lambda) = \rho(b_1 \sin \rho\pi - b_2 \sin \rho(2a - \pi)) + O(\exp(|\tau| \pi)). \quad (10)$$

قضیه ۱. مقادیر ویژه متناظر  $\{\lambda_n\}$  مربوط به مسئله مقدار مرزی  $L = L(q(x), h, H, a)$ ، برای  $n \rightarrow \infty$  به صورت مجانبی (۱۱) است:

$$\rho_n = n - \frac{1}{2} + \eta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (11)$$

که برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\eta_n \in (0, 1)$  [۱۶].

برهان: با توجه به رابطه (۱۰)، تابع مشخصه را می توان به صورت (۱۲) نوشت:

$$\Delta(\rho) = \Delta_0(\rho) + O(\exp(|\tau| \pi)). \quad (12)$$

با توجه به قضیه روشه برای  $\rho$  به اندازه کافی بزرگ توابع  $\Delta(\rho)$  و  $\Delta_0(\rho)$  از نظر شمارش دارای تعداد مساوی صفر هستند. بنابراین اگر  $\rho_n$  و  $\rho_n^\circ$  به ترتیب مقادیر ویژه  $\Delta(\rho)$  و  $\Delta_0(\rho)$  باشد آن گاه  $\rho_n = \rho_n^\circ + \varepsilon_n$  به طوری که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ . از آن جاکه  $\rho_n$  صفر تابع مشخصه  $\Delta(\rho)$  است، با یک محاسبه ساده،  $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  به دست می آید.

با به کارگیری نتایج [۵] داریم:

$$\rho_n = \rho_n^\circ + \frac{\theta_n}{\rho_n^\circ} + \frac{\kappa_n}{\rho_n^\circ} \quad (13)$$

که  $\kappa_n = o(1)$ ، و

$$\theta_n = (\omega_1 \cos \rho_n^\circ \pi + \omega_2 \cos \rho_n^\circ (2a - \pi)) (2\Delta_0(\rho_n^\circ))^{-1}. \quad (14)$$

به طوری که

$$\omega_1 = b_1 \left( H + h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right) + \frac{a_2}{2},$$

$$\omega_2 = b_2 \left( H - h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt - \int_0^a q(t) dt \right) - \frac{a_2}{2}. \quad (15)$$

همچنین می توان نشان داد  $\{\kappa_n\} \in \ell_2$ .

مثال ۱. فرض کنید  $a = \frac{3\pi}{4}$  و  $a_1 > 1$  آن گاه با به کارگیری رابطه (۱۲) داریم:

$$\Delta(\rho) = \rho \left( -b_1 \sin \rho\pi + b_2 \sin \frac{\rho\pi}{2} \right) + O(\exp(|\tau| \pi)),$$

بنابراین برای  $n \in \mathbb{N}$  مقادیر ویژه مسئله بدین صورت به دست می آید:

$$\begin{aligned}\rho_{4n-3} &= 4(n-1) + \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{b_2}{2b_1}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \rho_{2n} &= 2n + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \rho_{4n-1} &= 4n - \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{b_2}{2b_1}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

### مسائل معکوس

در این بخش هم‌زمان با عملگر  $L$  مسئله مقدار مرزی  $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x); \tilde{h}; H; a)$  مشابه با عملگر  $L$  و متفاوت با تابع  $q$  و ضریب  $h$  را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۲. فرض کنید  $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  یک نقطه پرش و  $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  نقطه‌ی ثابتی باشد و همچنین فرض کنید برای هر  $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n, n \in \mathbb{N}$  و  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه جا در  $(b, \pi]$  آن‌گاه  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه جا در  $[0, \pi]$  و  $h = \tilde{h}$ .

یادآوری ۲-۳. رابطه (۱۶) برای توابع  $\varphi(x, \lambda)$  و  $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$  در حالت  $x \leq a$  برقرار است [۱۹]-[۲۱]:

$$\varphi(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\rho x)) + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt. \quad (16)$$

و برای  $a \leq x \leq b$  از [۲۱] داریم:

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda)\tilde{\varphi}(x, \lambda) &= A_1 + A_2 \cos(2\rho x) + A_3 \cos 2\rho(x-a) + A_4 \cos 2\rho(x-2a) \\ &+ \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt.\end{aligned} \quad (17)$$

به طوری که  $v(x, t)$  یک تابع پیوسته و مستقل از پارامتر  $\lambda$  است. در رابطه (۱۷)،

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2a_1^2} + \frac{1}{2}(a_1^2 - a_1^{-2})\varphi(a-, \lambda)\tilde{\varphi}(a-, \lambda), & A_2 &= \frac{(a_1 + a_1^{-1})^2}{8}, \\ A_3 &= \frac{a_1^2 - a_1^{-2}}{4}, & A_4 &= \frac{(a_1 - a_1^{-1})^2}{8}.\end{aligned}$$

برای ثابت  $k > 0$ ، ناحیه  $G_k := \{\rho : |\rho - \rho_n| \geq k\}$  را تعریف می‌کنیم. آن‌گاه ثابت  $C > 0$  وجود دارد به طوری که (۱۸) برقرار است [۵].

$$|\Delta(\lambda)| \geq C |\rho| \exp(|\tau| \pi), \quad \rho \in G_k, \quad (18)$$

برهان (قضیه ۲): فرض کنید  $\varphi$  و  $\tilde{\varphi}$  به ترتیب جواب‌های معادله

$$-\varphi'' + q\varphi = \lambda\varphi, \quad (19)$$

و

$$-\tilde{\varphi}'' + \tilde{q}\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}, \quad (20)$$

با شرایط اولیه  $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = h$  و  $\tilde{\varphi}(0) = 1, \tilde{\varphi}'(0) = \tilde{h}$  باشند. اگر  $\tilde{\varphi}$  را در (۱۹) و  $\varphi$  را در (۲۰) ضرب کرده و از هم کم کنیم و با به کارگیری فرض‌های مسئله از رابطه حاصل در بازه  $[0, \pi]$  انتگرال بگیریم، تابع (۲۱) را به دست می‌آوریم:

(۲۱)

$$G(\lambda) := \int_0^b [\tilde{q}(x) - q(x)] \varphi(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \lambda) dx - (h - \tilde{h})$$

$$= [\tilde{\varphi}'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - \tilde{\varphi}(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda)] \Big|_0^x - (h - \tilde{h}) \quad (21)$$

از این رو با توجه به شرایط اولیه در صفر، برای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$G(\lambda_n) = 0. \quad (22)$$

فرض کنید

$$Q(x) := \tilde{q}(x) - q(x). \quad (23)$$

حال باید نشان دهیم در کل  $\lambda$ -صفحه،  $G(\lambda) = 0$ ، با توجه به (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$G(\lambda) = \begin{cases} \int_0^b Q(x) \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos(2\rho x)) + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt \right] dx - (h - \tilde{h}), & a \geq b, \\ \int_0^a Q(x) \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos(2\rho x)) + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt \right] dx \\ + \int_a^b Q(x) [A_1 + A_2 \cos(2\rho x) + A_3 \cos 2\rho(x - a) + A_4 \cos 2\rho(x - 2a) \\ + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt] dx - (h - \tilde{h}), & a < b \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (24)$$

از آن جاکه

$$|\cos(\rho x)| \leq \exp(x|\tau|) \quad \text{و} \quad |\sin(\rho x)| \leq \exp(x|\tau|), \quad (25)$$

با توجه به (۱۶)، (۱۷) و (۲۴) برای بعضی ثابت مثبت  $C_1$  رابطه

$$|\varphi(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \lambda)| \leq C_1 \exp(2x|\tau|), \quad (26)$$

را در  $0 \leq x \leq a < b$ ، به دست می آوریم. و به ازای بعضی از ثابت های مثبت  $C_2$  و  $C_3$  رابطه

$$|\varphi(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \lambda)| \leq \frac{1}{2a_1^2} + C_2 \exp(2a|\tau|) + A_2 \exp(2x|\tau|) + A_3 \exp(2(x-a)|\tau|) \\ + A_4 \exp(2(x-2a)|\tau|) + C_3 \exp(2x|\tau|), \quad (27)$$

را در  $0 \leq a \leq x \leq b$ ، به دست می آوریم. به راحتی می توان بررسی کرد که  $b = \max\{a, b, b-a, |b-2a|\}$  از

این رو، با توجه به معادله های (۲۴)، (۲۶) و (۲۷) ثابت  $M$  وجود دارد به طوری که تابع تحلیلی  $G(\lambda)$  در شرط

$$|G(\lambda)| \leq M \exp(2|\tau|b), \quad (28)$$

برای  $|\lambda|$  به اندازه کافی بزرگ صدق می کند. تابع

$$\phi(\lambda) := \frac{G(\lambda)^\delta}{\Delta(\lambda)}, \quad (29)$$

را برای  $\delta = \frac{\pi}{2b}$  تعریف می کنیم. با تعریف (۲۹)،  $\phi(\lambda)$  یک تابع تحلیلی است. با توجه به روابط (۱۸) و (۲۹)

$\phi(\lambda)$  یک تابع کراندار در کل  $\lambda$ -صفحه است، به طوری که برای  $|\lambda|$  به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\phi(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right),$$

بنابراین با به کارگیری قضیه لیوویل، برای تمام  $\lambda$ ، رابطه

$$\phi(\lambda) = 0, \quad (30)$$

را به دست می‌آوریم. به طوری که برای هر  $\lambda$  معادل

$$G(\lambda) = 0 \quad (31)$$

حال می‌خواهیم  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه جا در  $[0, b]$  را ثابت کنیم. برای رسیدن به این نتیجه دو حالت داریم:  
حالت ۱: اگر  $b \leq a$ ، با توجه به (۱۶)، (۱۷)، (۲۴) و (۳۱) رابطه

$$\int_0^b Q(x)[1 + \cos(2\rho x)]dx + \int_0^b Q(x) \left[ \int_0^x v(x, s) \cos(2\rho s) ds \right] dx - (h - \tilde{h}) = 0,$$

را در کل  $\lambda$  -صفحه به دست می‌آوریم، که آن را می‌توان به صورت (۳۲) بازنویسی کرد:

$$\int_0^b Q(x)dx - (h - \tilde{h}) + \int_0^b \cos(2\rho s) \left[ Q(s) + \int_s^{a-0} Q(x)v(x, s)dx \right] ds = 0. \quad (32)$$

برای  $\lambda$  حقیقی در (۳۲)، و در حالت  $\lambda \rightarrow \infty$ ، با به کارگیری لم ریمن-لبگ داریم:

$$\int_0^b Q(x)dx - (h - \tilde{h}) = 0,$$

و

$$\int_0^b \cos(2\rho s) \left[ Q(s) + \int_s^b Q(x)v(x, s)dx \right] ds = 0,$$

با توجه به کامل بودن تابع  $\cos(2\rho s)$  در بازه  $[0, b]$ ، داریم:

$$Q(s) + \int_s^b Q(x)v(x, s)dx = 0, \quad 0 < s < b.$$

اما این معادله انتگرال ولترای همگن است و فقط دارای جواب صفر است. بنابراین  $Q(x) = 0$  در  $0 \leq x \leq b$  و در نتیجه  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه جا در  $[0, b]$  و  $h = \tilde{h}$ .

حالت ۲: اگر  $a < b \leq \frac{\pi}{2}$ ، با توجه به روابط (۱۷)، (۲۱)، (۲۴) و (۳۱)

$$\int_0^a Q(x) \left[ 1 + \cos(2\rho x) + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt \right] dx + \int_a^b Q(x) [2A_1 + 2A_2 \cos(2\rho x) + 2A_3 \cos 2\rho(x-a) + 2A_4 \cos 2\rho(x-2a) + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt] dx - (h - \tilde{h}) = 0 \quad (33)$$

در کل  $\lambda$  -صفحه برقرار است. با فرض  $\rho \rightarrow \infty$  در (۳۳)، با به کارگیری لم ریمن-لبگ روابط

$$\int_0^a Q(x)dx + \int_a^b 2A_4 Q(x)dx - (h - \tilde{h}) = 0, \quad (34)$$

و

$$\int_0^a Q(x) \left[ \cos(2\rho x) + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt \right] dx + \int_a^b Q(x) (2A_2 \cos(2\rho x) + 2A_3 \cos 2\rho(x-a) + 2A_4 \cos 2\rho(x-2a) + \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt) dx = 0, \quad (35)$$

برقرار است. با تعویض متغیرهای انتگرال، به‌ازای هر مقدار  $\rho$  رابطه (۳۶) را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^b \left( F(t) + \int_t^b v(x, t) Q(x) dx \right) \cos(2\rho t) dt = 0 \quad (36)$$

از آن‌جاکه توابع  $\cos(2\rho t)$  در  $L_2[0, b]$  کامل است، داریم:

$$F(t) + \int_t^b v(x, t) Q(x) dx = 0, \quad (37)$$

شکل تابع  $F$  کمک می‌کند که مقدار  $Q(x) = 0$  را در  $[0, b]$  به دست آوریم. ابتدا، در (۳۷) جمله همراه  $v(x, t)$  را در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که  $v(x, t)$  در  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  کراندار و  $Q$  در  $[0, \pi]$  انتگرال‌پذیر است، با به‌کارگیری قضیه فوبینی داریم:

$$\begin{aligned} & \int_0^a Q(x) \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt dx + \int_a^b Q(x) \int_0^x v(x, t) \cos(2\rho t) dt dx \\ &= \int_0^b \int_t^b v(x, t) Q(x) dx \cos(2\rho t) dt. \end{aligned} \quad (38)$$

در نهایت، شرایط باقی‌مانده در (۳۳) را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\int_0^a Q(x) \cos(2\rho x) dx + \int_a^b A_2 Q(x) \cos(2\rho x) dx = \int_0^b \hat{Q}(x) \cos(2\rho x) dx, \quad (39)$$

به طوری که

$$\hat{Q}(x) = \begin{cases} Q(t), & t \in [0, a], \\ 2A_2 Q(t), & t \in [a, b], \end{cases}$$

$$\int_a^b A_3 Q(x) \cos 2\rho(x-a) dx = \int_0^{b-a} A_3 Q(x+a) \cos(2\rho x) dx, \quad (40)$$

و

$$\int_a^b A_4 Q(x) \cos 2\rho(x-2a) dx = \begin{cases} \int_a^{2a-b} A_4 Q(2a-x) \cos(2\rho x) dx, & b \leq 2a, \\ \int_{-a}^{b-2a} A_4 Q(x+2a) \cos(2\rho x) dx, & 2a < b. \end{cases} \quad (41)$$

معادله‌های (۳۹)-(۴۱) بیان‌گر آن است که  $F(t)$  در (۳۸) بدین صورت است. چهار حالت برای  $F(t)$  داریم:

حالت اول. اگر  $b \leq \frac{3}{2}a$

$$F(t) = \begin{cases} Q(t) + 2A_3 Q(t+a), & t \in [0, b-a], \\ Q(t), & t \in [b-a, 2a-b], \\ Q(t) + 2A_4 Q(2a-t), & t \in [2a-b, a], \\ 2A_2 Q(t), & t \in [a, b]. \end{cases} \quad (42)$$

حالت دوم. اگر  $\frac{3}{2}a < b \leq 2a$

$$F(t) = \begin{cases} Q(t) + 2A_3 Q(t+a), & t \in [0, 2a-b], \\ Q(t) + 2A_3 Q(t+a) + 2A_4 Q(2a-t), & t \in [2a-b, b-a], \\ Q(t) + 2A_4 Q(2a-t), & t \in [b-a, a], \\ 2A_2 Q(t), & t \in [a, b]. \end{cases} \quad (43)$$

حالت سوم. اگر  $2a < b \leq 3a$

$$F(t) = \begin{cases} 2A_4 Q(t+2a), & t \in [-a, 0], \\ Q(t) + 2A_3 Q(t+a) + 2A_4 Q(2a+t), & t \in [0, b-2a], \\ Q(t) + 2A_3 Q(t+a), & t \in [b-2a, a], \\ 2A_2 Q(t) + 2A_3 Q(t+a), & t \in [a, b-a], \\ 2A_2 Q(t), & t \in [b-a, b]. \end{cases} \quad (44)$$

حالت چهارم. اگر  $b > 3a$ 

$$F(t) = \begin{cases} 2A_4Q(t+2a), & t \in [-a, 0], \\ Q(t) + 2A_3Q(t+a) + 2A_4Q(2a+t), & t \in [0, a], \\ 2A_2Q(t) + 2A_3Q(t+a) + 2A_4Q(2a+t), & t \in [a, b-2a], \\ 2A_2Q(t) + 2A_3Q(t+a), & t \in [b-2a, b-a], \\ 2A_2Q(t), & t \in [b-a, b]. \end{cases} \quad (45)$$

برای اثبات این که  $Q(x) = 0$  در  $[0, b]$  است. حالت اول را در نظر می‌گیریم. با توجه به (۳۷) و (۴۲)، می‌بینیم که

$$2A_2Q(t) + \int_t^b Q(x)v(x,t)dx = 0, \quad t \in [a, b], \quad (46)$$

توجه کنید که  $A_2 \neq 0$ . از آن‌جا که (۴۶) معادله انتگرال ولترای همگن است، از این‌رو،  $Q(t) = 0$  تقریباً همه جا در  $[a, b]$  از (۳-۱۸) و (۳-۲۰) داریم:

$$\int_0^a Q(x) \left[ 1 + \cos(2\rho x) + \int_0^x v(x,t) \cos(2\rho t) dt \right] dx - (h - \tilde{h}) = 0,$$

با به‌کارگیری برهان مشابه حالت اول،  $Q(x) = 0$  را در  $[0, a]$  به‌دست می‌آوریم. بنابراین  $q(x) = \tilde{q}(x)$  در  $[0, b]$  و  $h = \tilde{h}$  را به‌دست می‌آوریم.فرض کنید  $l(n)$  زیر دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد به‌طوری‌که

$$l(n) = \frac{n}{\sigma} (1 + \varepsilon_n), \quad 0 < \sigma \leq 1, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (47)$$

و فرض کنید  $\mu_n$  مقادیر ویژه مسئله (۱۹) و (۴۸) و  $\tilde{\mu}_n$  مقادیر ویژه مسئله (۲۰) و (۴۸) با شرایط مرزی (۳) باشد به‌طوری‌که

$$y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0 \quad (48)$$

که  $H \neq H_1$ .

قضیه ۳. فرض کنید  $a \in (0, \pi)$ ، نقطه پرش،  $b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  و  $\sigma > \frac{2b}{\pi} - 1$  باشد. همچنین فرض کنید  $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ،  $\mu_{l(n)} = \tilde{\mu}_{l(n)}$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه جا در  $[b, \pi]$  باشد. آن‌گاه  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه جا در  $[0, \pi]$  و  $h = \tilde{h}$ .

برهان: با توجه به (۲۱) و (۲۲) و مفروضات مسئله  $h = \tilde{h}$  و روابط

$$G(\lambda_n) = 0, \quad G(\mu_{l(n)}) = 0, \quad (49)$$

را به‌دست می‌آوریم. حال باید برای هر  $\lambda \in \mathbb{C}$ ،  $G(\lambda) = 0$  را نشان دهیم. با به‌کارگیری روابط (۲۱) و (۲۴) می‌بینیم که تابع تحلیلی  $G(\lambda)$  تابعی از نوع نمایی است و

$$|G(\lambda)| \leq M e^{2br|\sin \theta|}, \quad (50)$$

که  $M$  یک عدد ثابت و  $\lambda = r e^{i\theta}$ . تابع مشخصه  $G(\lambda)$  را با

$$h(\theta) = \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln |G(r e^{i\theta})|}{r}. \quad (51)$$

تعریف می‌کنیم. از آن‌جا که  $|\operatorname{Im} \lambda| = r |\sin \theta|$  و  $\theta = \arg \lambda$ ، از (۵۰) و (۵۱) داریم:

$$h(\theta) = 2b |\sin \theta|. \quad (52)$$



فرض کنید  $n(r)$  تعداد صفرهای  $G(\lambda)$  در داخل دیسک  $|\lambda| \leq r$  باشد. با توجه به قضیه ۱ می‌بینیم که به تعداد  $1 + 2r[1 + o(1)]$  از  $\lambda_n$  و  $1 + 2r\sigma[1 + o(1)]$  از  $\mu_{l(n)}$  در داخل دیسک به شعاع  $r$  قرار دارد. بنابراین

$$n(r) = 2 + 2r[1 + \sigma + o(1)].$$

از این رو

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} = 2(\sigma + 1).$$

با به‌کارگیری شرط  $\sigma > \frac{2b}{\pi} - 1$  و با توجه به (۵۲)، رابطه (۵۳) را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} \geq 2(\sigma + 1) > \frac{4b}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta. \quad (53)$$

مطابق [۲۲]، برای هر تابع تحلیلی  $G(\lambda)$  از نوع نمایی، متحد با صفر نباشد، این نامساوی برقرار است:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta. \quad (54)$$

با توجه به نامساوی‌های (۵۳) و (۵۴)، رابطه (۳۱) برقرار است. با به‌کار بردن روش مشابه اثبات قضیه ۱-۳، فرض کنید  $m(n)$  زیر دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد به طوری که

$$m(n) = \frac{n}{\sigma_1} (1 + \varepsilon_{1n}), \quad 0 < \sigma_1 \leq 1, \quad \varepsilon_{1n} \rightarrow 0.$$

نتیجه ۱. اگر  $\lambda_{m(n)} = \tilde{\lambda}_{m(n)}$  و  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه‌جا در  $(b, \pi]$  برای  $n \in \mathbb{N}$ ،  $b \leq \frac{\pi}{2}$  و  $\sigma_1 > \frac{2b}{\pi}$

آن‌گاه  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه‌جا در  $[0, b]$  و  $h = \tilde{h}$ .

برهان: با به‌کارگیری قضیه ۱-۳ و ۳-۳ به سادگی می‌توان این نتیجه را ثابت کرد.

نتیجه ۲. فرض کنید  $a \in (0, \pi)$  نقطه پرش، عدد ثابت  $b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ،  $\sigma_1 > \frac{2b}{\pi}$  و  $\sigma > \frac{2b}{\pi} - 1$  باشد،

فرض کنید  $\lambda_{m(n)} = \tilde{\lambda}_{m(n)}$  و  $\mu_{l(n)} = \tilde{\mu}_{l(n)}$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، و  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه‌جا در  $(b, \pi]$ . آن‌گاه  $q(x) = \tilde{q}(x)$  تقریباً همه‌جا در  $[0, \pi]$  و  $h = \tilde{h}$ .

برهان: با به‌کارگیری قضیه ۲ و ۳ و نتیجه ۱، به سادگی می‌توان نتیجه ۲ را ثابت کرد.

## منابع

1. Shahriari M., Akbarfam A. J., Teschl G., "Uniqueness for inverse Sturm–Liouville problems with a finite number of transmission conditions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 395(1) (2012) 19-29.
2. Krueger R. J., "Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties", *Journal of Mathematical Physics*, 23 (3) (1982) 396-404.
3. Anderssen R., "The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth", *Geophysical Journal International*, 50 (2) (1977) 303-309.

4. Hald O. H., "Discontinuous inverse eigenvalue problems", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37 (5) (1984) 539-577.
5. Yurko V., "Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems", *Integral Transforms and Special Functions*, 10 (2) (2000) 141-164.
6. Ambarzumian V., "Über eine frage der eigenwerttheorie", *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 53 (9) (1929) 690-695.
7. Borg G., "Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe", *Acta Mathematica*, 78 (1) (1946) 1-96.
8. McLaughlin J. R., "Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data", *SIAM review*, 28 (1) (1986) 53-72.
9. Hochstadt H., Lieberman B., "An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34 (4) (1978) 676-680.
10. Levitan B. M., "Inverse Sturm-Liouville Problems", (1987) VSP.
11. Hochstadt H., "The inverse sturm-liouville problem", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 26 (5-6) (1973) 715-729.
12. Hochstadt H., "On inverse problems associated with Sturm-Liouville operators", *Journal of differential Equations*, 17 (1) (1975) 220-235.
13. Binding P. A., Browne P. J., Watson B. A., "Inverse spectral problems for left-definite Sturm-Liouville equations with indefinite weight", *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 271 (2) (2002) 383-408.
14. Amirov R. K., "On Sturm-Liouville operators with discontinuity conditions inside an interval", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 317 (1) (2006) 163-176.
15. Koyunbakan H., Panakhov E. S., "Inverse problem for a singular differential operator", *Mathematical and Computer Modelling*, 47 (1) (2008) 178-185.
16. Shahriari M., "Inverse Sturm-Liouville problems with a Spectral Parameter in the Boundary and transmission conditions", *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 3 (2) (2016) 75-89.
17. Xu X.-C., Yang C.-F., "Inverse spectral problems for the Sturm-Liouville operator with discontinuity", *Journal of Differential Equations*, 262 (3) (2017) 3093-3106.
18. Freiling G., Yurko V. A., "Inverse Sturm-Liouville problems and their applications", NOVA Science Publishers New York (2001).
19. Willis C., "Inverse Sturm-Liouville problems with two discontinuities", *Inverse Problems*, 1(3) (1985) 263.
20. Kobayashi M., "A uniqueness proof for discontinuous inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials", *Inverse Problems*, 5 (5) (1989) 767.
21. Yang C.-F., "An interior inverse problem for discontinuous boundary-value problems", *Integral Equations and Operator Theory*, 65 (4) (2009) 593-604.
22. Levin B.I.A., "Distribution of zeros of entire functions", Vol. 5. American Mathematical Soc. (1964).