مسائل معکوس طیفی عملگرهای اشتورم-لیوویل با شرایط ناپیوسته

محمد شهریاری
دانشگاه مراغه، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۸/۱۷ پذیرش ۹۷/۰۸/۰۷

چکیده

این مقاله به مسئلهٔ مقدار مرزی مربوط به معادله دیفرانسیل

$$\ell y := -y'' + qy = \lambda y,$$

با شرایط مرزی استاندارد همراه با شرایط ناپیوستگی در نقطه $a \in (0, \pi)$ به صورت

$$y(a+0) = a_1 y(a-0), \quad y'(a+0) = a_2 y'(a-0) + a_3 y(a-0),$$

می‌پردازد. که در آن h, H, a, a_1, a_2, a_3 و تابع $q(x) \in L^2[0,\pi]$ حقیقی و $a \in (0,\pi)$ و $a_1 a_2 \neq 0$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ پارامتر طیفی مستقل از x هستند. ما نتیجه هاچستات-لیبرمن را برای حالتی که یک شرط ناپیوستگی در درون بازه متناهی است، توسیع می‌دهیم، و نشان می‌دهیم که تابع پتانسیل و بعضی ضرایب شرایط مرزی می‌تواند به‌طور منحصر به فرد با دانستن تابع پتانسیل در بعضی بازه‌ها و قسمتی از دو طیف تعیین شود.

واژه‌های کلیدی: مسئلهٔ معکوس اشتورم-لیوویل، تابع تحلیلی، شرایط ناپیوسته.

مقدمه

فرض کنید مسئلهٔ مقدار مرزی

$$\ell y := -y'' + qy = \lambda y, \tag{۱}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0,$$

$$V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{۲}$$

و شرایط ناپیوسته (۳) را داشته باشیم:

$$y(a+0) = a_1 y(a-0), \quad y'(a+0) = a_2 y'(a-0) + a_3 y(a-0), \tag{۳}$$

که در آن h, H, a, a_1, a_2, a_3 ، تابع $q \in L^2[0,\pi]$ حقیقی و $a \in (0,\pi)$ و $a_1 a_2 \neq 0$ هستند. در این‌جا $\lambda \in \mathbb{C}$ پارامتر طیفی نامیده می‌شود. ضرایب a_1 ، a_2 و a_3 معلوم و ثابت فرض می‌شوند. برای سادگی مسئلهٔ مقدار مرزی (۱)-(۳) را به‌صورت $L = L(q(x); h, H, a)$ می‌نامیم. بدون این‌که به کلیت مسئله خللی وارد شود، با به‌کارگیری لم ۲-۳ از [۱]، می‌توان $a_2 = \frac{1}{a_1}$ در نظر گرفت. در این صورت با به‌کارگیری شرایط مرزی و ناپیوسته عملگر $L(q(x); h, H, a)$ خودالحاق است.

مسئلهٔ معکوس اشتورم-لیوویل در سه جنبه مختلف قابل بررسی و بحث است، وجود، منحصربه فردی و بازسازی تابع پتانسیل با استفاده از ضرایب داده شده از خواص مقادیر ویژه و توابع ویژه است. در این مقاله، منحصر به‌فردی تابع پتانسیل و برخی شرایط مرزی نتیجه می‌شود. فرمول‌های مختلفی برای مسائل معکوس و قضیهٔ منحصر به‌فردی منحصر مربوط وجود دارد.

*نویسنده مسئول shahriari@maragheh.ac.ir

کاربردهای مسئلهٔ مقدار مرزی با شرایط انتقال(ناپیوسته) در درون یک بازه با خواص فیزیکی ناپیوسته مرتبط هستند. مسائل معکوس با شرایط مرزی ناپیوسته در درون یک بازه، اغلب در ریاضیات، مکانیک، ژئوفیزیک، رادیو الکترونیک و سایر زمینه‌های علوم و تکنولوژی ظاهر می‌شود. به‌عنوان یک قاعده، چنین مسائلی به خصوصیات ناپیوستگی و ناهمواری یک رسانه مربوط می‌شود [۲]-[۵]. این مسائل برای اولین بار در سال ۱۹۲۹ به‌وسیلهٔ آمبارزومیان [۶] شروع شد، به‌وسیلهٔ بورگ [۷] ادامه داده شد، و در هشتاد سال گذشته به‌تدریج اشکار شده است. برخی از نظرات تکمیلی این زمینه را می‌توان در [۱]، [۸]- [۱۷] و مراجع آنها دید. طرح کلی مطالب این مقاله بدین‌صورت است که در بخش ۲ فرم مجانبی جواب‌ها و مقادیر ویژه مسئلهٔ اشتورم-لیوویل با شرایط ناپیوسته را ارایه می‌دهیم و در بخش ۳ مسائل معکوس را بیان کرده و قضایای مربوط به آنها را ثابت می‌کنیم.

فرم مجانبی جواب‌ها و مقادیر ویژه

فرض کنید $\varphi(x,\lambda)$ و $\psi(x,\lambda)$ جواب‌های مسئلهٔ (۱) با شرایط ناپیوسته (۳) و به‌ترتیب با شرایط اولیه

$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad \varphi'(0,\lambda)=h, \tag{۴}$$

$$\psi(0,\lambda)=1,\quad \psi'(0,\lambda)=-H, \tag{۵}$$

با توجه به بخش ۴-۴-۱ از [۱۸]، تابع

$$\Delta(\lambda)\coloneqq U(\psi)=-V(\varphi) \tag{۶}$$

تابع $\Delta(\lambda)$ تابعی تحلیلی از مرتبهٔ $\frac{1}{2}$ است و دارای یک مجموعه حقیقی شمارا صفر $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ است. که $\Delta(\lambda)$ تابع مشخصه عملگر L نامیده می‌شود. فرض کنید $\lambda=\rho^2$ و $\tau=\operatorname{Im}\rho$. برای معادلهٔ (۱) با شرایط مرزی (۲) و شرایط پرش (۳) فرمول‌های مجانبی زیر برای $|\lambda|\to\infty$ برقرار است.

$$\varphi(x;\lambda)=\begin{cases}\cos\rho x+\left(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right)\frac{\sin\rho x}{\rho}+O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right), & x<a,\\ b_1\cos\rho x+b_2\cos\rho(2a-x)+f_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}+f_2(x)\frac{\sin\rho(2a-x)}{\rho} & \\ \qquad +O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right), & x>a,\end{cases} \tag{۷}$$

$$\varphi'(x;\lambda)=\begin{cases}-\rho\sin\rho x+\left(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right)\cos\rho x+O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho}\right), & x<a,\\ \rho\left(-b_1\sin\rho x+b_2\sin\rho(2a-x)\right)+f_1(x)\cos\rho x & x>a,\\ \qquad -f_2(x)\cos\rho(2a-x)+O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho}\right), &\end{cases} \tag{۸}$$

به‌طوری‌که

$$b_1=\frac{\left(a_1+a_1^{-1}\right)}{2},\ b_2=\frac{\left(a_1-a_1^{-1}\right)}{2} \tag{۹}$$

و

$$f_1(x) = b_1\left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right) + \frac{a_2}{2},$$
$$f_2(x) = b_2\left(h + (-\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt + \int_0^a q(t)dt)\right) + \frac{a_2}{2}.$$

تابع مشخصه به‌صورت است.

$$\Delta(\lambda) = \rho(b_1 \sin\rho\pi - b_2 \sin\rho(2a-\pi)) + O(\exp(|\tau|\pi)). \qquad (۱۰)$$

قضیهٔ ۱. *مقادیر ویژه متناظر* $\{\lambda_n\}$ *مربوط به مسئلهٔ مقدار مرزی* $L = L(q(x), h, H, a)$*، برای* $n \to \infty$ به‌صورت *مجانبی* (۱۱) *است:*

$$\rho_n = n - \frac{1}{2} + \eta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (۱۱)$$

که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\eta_n \in (0,1)$ *[۱۶]* .

برهان: با توجه به رابطهٔ (۱۰)، تابع مشخصه را می‌توان به‌صورت (۱۲) نوشت:

$$\Delta(\rho) = \Delta_\circ(\rho) + O(\exp(|\tau|\pi)). \qquad (۱۲)$$

با توجه به قضیهٔ روشه برای ρ به‌اندازهٔ کافی بزرگ توابع $\Delta(\rho)$ و $\Delta_\circ(\rho)$ از نظر شمارش دارای تعداد مساوی صفر هستند. بنابراین اگر ρ_n و ρ_n° به‌ترتیب مقادیر ویژه $\Delta(\rho)$ و $\Delta_\circ(\rho)$ باشد آن‌گاه $\rho_n = \rho_n^\circ + \varepsilon_n$ به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. از آن‌جاکه ρ_n صفر تابع مشخصه $\Delta(\rho)$ است، با یک محاسبه ساده، $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ به‌دست می‌آید.

با به‌کارگیری نتایج [۵] داریم:

$$\rho_n = \rho_n^\circ + \frac{\theta_n}{\rho_n^\circ} + \frac{\kappa_n}{\rho_n^\circ} \qquad (۱۳)$$

که $\kappa_n = o(1)$، و

$$\theta_n = (\omega_1 \cos\rho_n^\circ\pi + \omega_2 \cos\rho_n^\circ(2a-\pi))(2\dot{\Delta}_\circ(\rho_n^\circ))^{-1}. \qquad (۱۴)$$

به‌طوری‌که

$$\omega_1 = b_1\left(H + h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right) + \frac{a_2}{2},$$
$$\omega_2 = b_2\left(H - h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt - \int_0^a q(t)dt\right) - \frac{a_2}{2}. \qquad (۱۵)$$

هم‌چنین می‌توان نشان داد $\{\kappa_n\} \in \ell_2$.

مثال ۱. فرض کنید $a = \frac{3\pi}{4}$ و $a_1 > 1$ آن‌گاه با به‌کارگیری رابطهٔ (۱۲) داریم:

$$\Delta(\rho) = \rho\left(-b_1 \sin\rho\pi + b_2 \sin\frac{\rho\pi}{2}\right) + O(\exp(|\tau|\pi)),$$

بنابراین برای $n \in \mathbb{N}$ مقادیر ویژه مسئلهٔ بدین‌صورت به دست می‌آید:

$$\rho_{4n-3}=4(n-1)+\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{b_2}{2b_1}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\rho_{2n}=2n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\rho_{4n-1}=4n-\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{b_2}{2b_1}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

مسایل معکوس

در این بخش هم‌زمان با عملگر L مسئلهٔ مقدار مرزی $\tilde{L}=L(\tilde{q}(x);\tilde{h};H;a)$ مشابه با عملگر L و متفاوت با تابع q و ضریب h را در نظر می‌گیریم.

قضیهٔ ۲. *فرض کنید $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ یک نقطه پرش و $b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ نقطه‌ی ثابتی باشد و هم‌چنین فرض کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ و $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه جا در $[b,\pi]$. آن‌گاه $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه جا در $[0,\pi]$ و $h=\tilde{h}$.*

یادآوری ۳-۲. رابطهٔ (۱۶) برای توابع $\varphi(x,\lambda)$و $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ در حالت $x\le a$ برقرار است [۱۹]-[۲۱]:

$$\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\frac{1}{2}(1+\cos(2\rho x))+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt. \qquad (۱۶)$$

و برای $a\le x\le b$ از [۲۱] داریم:

$$\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)=A_1+A_2\cos(2\rho x)+A_3\cos 2\rho(x-a)+A_4\cos 2\rho(x-2a)$$
$$+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt. \qquad (۱۷)$$

به‌طوری‌که $v(x,t)$ یک تابع پیوسته و مستقل از پارامتر λ است. در رابطهٔ (۱۷)،

$$A_1=\frac{1}{2a_1^2}+\frac{1}{2}\left(a_1^2-a_1^{-2}\right)\varphi(a-,\lambda)\tilde{\varphi}(a-,\lambda), \qquad A_2=\frac{\left(a_1+a_1^{-1}\right)^{-2}}{8},$$
$$A_3=\frac{a_1^2-a_1^{-2}}{4}, \qquad A_4=\frac{\left(a_1-a_1^{-1}\right)^2}{8}.$$

برای ثابت $k>0$، ناحیهٔ $G_k:=\{\rho:|\rho-\rho_n|\ge k\}$ را تعریف می‌کنیم. آن‌گاه ثابت $C>0$ وجود دارد به‌طوری‌که (۱۸) برقرار است [۵].

$$|\Delta(\lambda)|\ge C|\rho|\exp(|\tau|\pi), \quad \rho\in G_k, \qquad (۱۸)$$

برهان (قضیهٔ ۲): فرض کنید φ و $\tilde{\varphi}$ به‌ترتیب جواب‌های معادله

$$-\varphi''+q\varphi=\lambda\varphi, \qquad (۱۹)$$

و

$$-\tilde{\varphi}''+\tilde{q}\tilde{\varphi}=\lambda\tilde{\varphi}, \qquad (۲۰)$$

با شرایط اولیه $\varphi'(0)=h$، $\varphi(0)=1$ و $\tilde{\varphi}'(0)=\tilde{h}$، $\tilde{\varphi}(0)=1$ باشند. اگر $\tilde{\varphi}$ را در (۱۹) و φ را در (۲۰) ضرب کرده و از هم کم کنیم و با به‌کارگیری فرض‌های مسئلهٔ از رابطهٔ حاصل در بازهٔ $[0,\pi]$ انتگرال بگیریم، تابع (۲۱) را به‌دست می‌آوریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.5.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.225]

$$G(\lambda):=\int_0^b[\tilde{q}(x)-q(x)]\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)dx-(h-\tilde{h})$$
$$=[\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\tilde{\varphi}(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)]|_0^\pi.-(h-\tilde{h}) \qquad (۲۱)$$

از این‌رو با توجه به شرایط اولیه در صفر، برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$G(\lambda_n)=0. \qquad (۲۲)$$

فرض کنید

$$Q(x):=\tilde{q}(x)-q(x). \qquad (۲۳)$$

حال باید نشان دهیم در کل λ-صفحه، $G(\lambda)=0$، با توجه به (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$G(\lambda)=\begin{cases}\int_0^b Q(x)\left[\frac{1}{2}(1+\cos(2\rho x))+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt\right]dx-(h-\tilde{h}), & a\ge b,\\ \int_0^a Q(x)\left[\frac{1}{2}(1+\cos(2\rho x))+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt\right]dx & \\ \quad+\int_a^b Q(x)[A_1+A_2\cos(2\rho x)+A_3\cos 2\rho(x-a)+A_4\cos 2\rho(x-2a) & \\ \quad\quad+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt]dx-(h-\tilde{h}), & a<b\le\frac{\pi}{2}.\end{cases} \qquad (۲۴)$$

از آن‌جاکه

$$|\cos(\rho x)|\le\exp(x|\tau|) \text{ و } |\sin(\rho x)|\le\exp(x|\tau|), \qquad (۲۵)$$

با توجه به (۱۶)، (۱۷) و (۲۴) برای بعضی ثابت مثبت C_1 رابطهٔ

$$|\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)|\le C_1\exp(2x|\tau|), \qquad (۲۶)$$

را در $0\le x\le a<b$، به‌دست می‌آوریم. و به‌ازای بعضی از ثابت‌های مثبت C_2 و C_3 رابطهٔ

$$|\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)|\le\frac{1}{2a_1^2}+C_2\exp(2a|\tau|)+A_2\exp(2x|\tau|)+A_3\exp(2(x-a)|\tau|)$$
$$+A_4\exp(2(x-2a)|\tau|)+C_3\exp(2x|\tau|), \qquad (۲۷)$$

را در $0\le a\le x\le b$، به‌دست می‌آوریم. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که $b=\max\{a,b,b-a,|b-2a|\}$، از این‌رو، با توجه به معادله‌های (۲۴)، (۲۶) و (۲۷) ثابت M وجود دارد به‌طوری‌که تابع تحلیلی $G(\lambda)$ در شرط

$$|G(\lambda)|\le M\exp(2|\tau|b), \qquad (۲۸)$$

برای $|\lambda|$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ صدق می‌کند. تابع

$$\phi(\lambda):=\frac{G(\lambda)^\delta}{\Delta(\lambda)}, \qquad (۲۹)$$

را برای $\delta=\frac{\pi}{2b}$ تعریف می‌کنیم. با تعریف (۲۹)، $\phi(\lambda)$ یک تابع تحلیلی است. با توجه به روابط (۱۸) و (۲۹) $\phi(\lambda)$ یک تابع کراندار در کل λ-صفحه است، به‌طوری‌که برای $|\lambda|$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ داریم:

$$\phi(\lambda)=O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right),$$

بنابراین با به‌کارگیری قضیهٔ لیوویل، برای تمام λ، رابطهٔ

$$\phi(\lambda)=0, \qquad (۳۰)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.5.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.225]

را به‌دست می‌آوریم. به‌طوری‌که برای هر λ معادل

$$G(\lambda)=0 \qquad (۳۱)$$

حال می‌خواهیم $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه‌جا در $[0,b]$ را ثابت کنیم. برای رسیدن به این نتیجه دو حالت داریم:

حالت ۱: اگر $b\le a$، با توجه به (۱۶)، (۱۷)، (۲۴) و (۳۱) رابطهٔ

$$\int_0^b Q(x)[1+\cos(2\rho x)]dx+\int_0^b Q(x)\left[\int_0^x v(x,s)\cos(2\rho s)ds\right]dx-(h-\tilde{h})=0,$$

را در کل λ-صفحه به‌دست می‌آوریم، که آن را می‌توان به‌صورت (۳۲) بازنویسی کرد:

$$\int_0^b Q(x)dx-(h-\tilde{h})+\int_0^b \cos(2\rho s)\left[Q(s)+\int_s^{a-0}Q(x)v(x,s)dx\right]ds=0. \qquad (۳۲)$$

برای λ حقیقی در (۳۲)، و در حالت $\lambda\to\infty$، با به‌کارگیری لم ریمن-لبگ داریم:

$$\int_0^b Q(x)dx-(h-\tilde{h})=0,$$

و

$$\int_0^b \cos(2\rho s)\left[Q(s)+\int_s^b Q(x)v(x,s)dx\right]ds=0،$$

با توجه به کامل بودن تابع $\cos(2\rho s)$ در بازهٔ $[0,b]$، داریم:

$$Q(s)+\int_s^b Q(x)v(x,s)dx=0,\qquad 0<s<b.$$

اما این معادله انتگرال ولترای همگن است و فقط دارای جواب صفر است. بنابراین $Q(x)=0$ در $0\le x\le b$ و در نتیجه $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه جا در $[0,b]$ و $h=\tilde{h}$.

حالت ۲: اگر $a<b\le\dfrac{\pi}{2}$، با توجه به روابط (۱۷)، (۲۱)، (۲۴) و (۳۱)

$$\int_0^a Q(x)\left[1+\cos(2\rho x)+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt\right]dx+\int_a^b Q(x)[2A_1+2A_2\cos(2\rho x)+$$
$$2A_3\cos 2\rho(x-a)+2A_4\cos 2\rho(x-2a)+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt]dx-(h-\tilde{h})=0 \qquad (۳۳)$$

در کل λ-صفحه برقرار است. با فرض $\rho\to\infty$ در (۳۳)، با به‌کارگیری لم ریمن-لبگ روابط

$$\int_0^a Q(x)dx+\int_a^b 2A_1Q(x)dx-(h-\tilde{h})=0\ , \qquad (۳۴)$$

و

$$\int_0^a Q(x)\left[\cos(2\rho x)+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt\right]dx+\int_a^b Q(x)(2A_2\cos(2\rho x)+$$
$$2A_3\cos 2\rho(x-a)+2A_4\cos 2\rho(x-2a)+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt)dx=0\ ، \qquad (۳۵)$$

برقرار است. با تعویض متغیرهای انتگرال، به‌ازای هر مقدار ρ رابطهٔ (۳۶) را به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^b\left(F(t)+\int_t^b v(x,t)Q(x)dx\right)\cos(2\rho t)dt=0 \qquad (۳۶)$$

از آن‌جاکه توابع $\cos(2\rho t)$ در $L_2[0,b]$ کامل است، داریم:

$$F(t)+\int_t^b v(x,t)Q(x)dx=0\ , \qquad (۳۷)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.5.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.225]

شکل تابع F کمک می‌کند که مقدار $Q(x)=0$ را در $[0,b]$ به‌دست آوریم. ابتدا، در (۳۷) جمله همراه $v(x,t)$ را در نظر می‌گیریم. از آن‌جاکه $v(x,t)$ در $(x,t)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$ کراندار و Q در $[0,\pi]$ انتگرال‌پذیر است، با به‌کارگیری قضیهٔ فوبینی داریم:

$$\int_0^a Q(x)\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dtdx+\int_a^b Q(x)\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dtdx$$
$$=\int_0^b\int_t^b v(x,t)Q(x)dx\cos(2\rho t)dt. \qquad (۳۸)$$

در نهایت، شرایط باقی‌مانده در (۳۳) را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\int_0^a Q(x)\cos(2\rho x)dx+\int_a^b A_2Q(x)\cos(2\rho x)dx=\int_0^b \hat{Q}(x)\cos(2\rho x)dx, \qquad (۳۹)$$

به‌طوری‌که

$$\hat{Q}(x)=\begin{cases}Q(t), & t\in[0,a],\\ 2A_2Q(t), & t\in[a,b],\end{cases}$$

$$\int_a^b A_3Q(x)\cos 2\rho(x-a)dx=\int_0^{b-a}A_3Q(x+a)\cos(2\rho x)dx\ , \qquad (۴۰)$$

و

$$\int_a^b A_4Q(x)\cos 2\rho(x-2a)dx=\begin{cases}\int_a^{2a-b}A_4Q(2a-x)\cos(2\rho x)dx, & b\le 2a,\\ \\ \int_{-a}^{b-2a}A_4Q(x+2a)\cos(2\rho x)dx, & 2a<b.\end{cases} \qquad (۴۱)$$

معادله‌های (۳۹)-(۴۱) بیان‌گر آن است که $F(t)$ در (۳۸) بدین‌صورت است. چهار حالت برای $F(t)$ داریم:

حالت اول. اگر $b\le\frac{3}{2}a$،

$$F(t)=\begin{cases}Q(t)+2A_3Q(t+a), & t\in[0,b-a],\\ Q(t), & t\in[b-a,2a-b],\\ Q(t)+2A_4Q(2a-t), & t\in[2a-b,a],\\ 2A_2Q(t), & t\in[a,b].\end{cases} \qquad (۴۲)$$

حالت دوم. اگر $\frac{3}{2}a<b\le 2a$

$$F(t)=\begin{cases}Q(t)+2A_3Q(t+a), & t\in[0,2a-b],\\ Q(t)+2A_3Q(t+a)+2A_4Q(2a-t), & t\in[2a-b,b-a],\\ Q(t)+2A_4Q(2a-t), & t\in[b-a,a],\\ 2A_2Q(t), & t\in[a,b].\end{cases} \qquad (۴۳)$$

حالت سوم. اگر $2a<b\le 3a$

$$F(t)=\begin{cases}2A_4Q(t+2a), & t\in[-a,0],\\ Q(t)+2A_3Q(t+a)+2A_4Q(2a+t), & t\in[0,b-2a],\\ Q(t)+2A_3Q(t+a), & t\in[b-2a,a],\\ 2A_2Q(t)+2A_3Q(t+a), & t\in[a,b-a],\\ 2A_2Q(t), & t\in[b-a,b].\end{cases} \qquad (۴۴)$$

حالت چهارم. اگر $b>3a$

$$F(t)=\begin{cases}2A_4Q(t+2a), & t\in[-a,0],\\ Q(t)+2A_3Q(t+a)+2A_4Q(2a+t), & t\in[0,a],\\ 2A_2Q(t)+2A_3Q(t+a)+2A_4Q(2a+t), & t\in[a,b-2a],\\ 2A_2Q(t)+2A_3Q(t+a), & t\in[b-2a,b-a],\\ 2A_2Q(t), & t\in[b-a,b].\end{cases} \qquad (۴۵)$$

برای اثبات این‌که $Q(x)=0$ در $[0,b]$ است. حالت اول را در نظر می‌گیریم. با توجه به (۳۷) و (۴۲)، می‌بینیم که

$$2A_2Q(t)+\int_t^b Q(x)v(x,t)dx=0, \quad t\in[a,b], \qquad (۴۶)$$

توجه کنید که $A_2\neq 0$. از آن‌جاکه (۴۶) معادله انتگرال ولترای همگن است، از این‌رو، $Q(t)=0$ تقریباً همه جا در $[a,b]$.از (۳-۱۸) و (۳-۲۰) داریم:

$$\int_0^a Q(x)\left[1+\cos(2\rho x)+\int_0^x v(x,t)\cos(2\rho t)dt\right]dx-(h-\tilde{h})=0 \quad ,$$

با به‌کارگیری برهان مشابه حالت اول، $Q(x)=0$ را در $[0,a]$ به‌دست می‌آوریم. بنابراین $q(x)=\tilde{q}(x)$ در $[0,b]$ و $h=\tilde{h}$ را به‌دست می‌وریم.

فرض کنید $l(n)$ زیر دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد به‌طوری‌که

$$l(n)=\frac{n}{\sigma}(1+\varepsilon_n),\ \ 0<\sigma\le 1,\ \ \varepsilon_n\to 0 \qquad (۴۷)$$

و فرض کنید μ_n مقادیر ویژه مسئلهٔ (۱۹) و (۴۸) و $\tilde{\mu}_n$ مقادیر ویژه مسئلهٔ (۲۰) و (۴۸) با شرایط مرزی (۳) باشد به‌طوری‌که

$$y'(\pi)+H_1y(\pi)=0 \qquad (۴۸)$$

که $H\neq H_1$.

قضیهٔ ۳. *فرض کنید* $a\in(0,\pi)$*، نقطه پرش،* $b\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ *و* $\sigma>\frac{2b}{\pi}-1$ *باشد. هم‌چنین فرض کنید* $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$*،* $\mu_{l(n)}=\tilde{\mu}_{l(n)}$ *برای هر* $n\in\mathbb{N}$ *و* $q(x)=\tilde{q}(x)$ *تقریباً همه جا در* $[b,\pi]$ *باشد. آن‌گاه* $q(x)=\tilde{q}(x)$ *تقریباً همه جا در* $[0,\pi]$ *و* $h=\tilde{h}$.

برهان: با توجه به (۲۱) و (۲۲) و مفروضات مسئلهٔ $h=\tilde{h}$ و روابط

$$G(\lambda_n)=0, \qquad G(\mu_{l(n)})=0 \quad , \qquad (۴۹)$$

را به‌دست می‌آوریم. حال باید برای هر $\lambda\in\mathbb{C}$، $G(\lambda)=0$ را نشان دهیم. با به‌کارگیری روابط (۲۱) و (۲۴) می بینیم که تابع تحلیلی $G(\lambda)$ تابعی از نوع نمایی است و

$$|G(\lambda)|\le Me^{2br|\sin\theta|}, \qquad (۵۰)$$

که M یک عدد ثابت و $\lambda=re^{i\theta}$. تابع مشخصه $G(\lambda)$ را با

$$h(\theta)=\lim\sup_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln|G(re^{i\theta})|}{r}. \qquad (۵۱)$$

تعریف می‌کنیم. از آن‌جاکه $|\operatorname{Im}\lambda|=r|\sin\theta|$ و $\theta=\arg\lambda$، از (۵۰) و (۵۱) داریم:

$$h(\theta)=2b|\sin\theta|. \qquad (۵۲)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.5.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.225]

فرض کنید $n(r)$ تعداد صفرهای $G(\lambda)$ در داخل دیسک $|\lambda|\leq r$ باشد. با توجه به قضیهٔ ۱ می‌بینیم که به تعداد $1+2r[1+o(1)]$ از λ_n و $1+2r\sigma[1+o(1)]$ از $\mu_{l(n)}$ در داخل دیسک به شعاع r قرار دارد. بنابراین

$$n(r)=2+2r[1+\sigma+o(1)].$$

از این رو

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(r)}{r}=2(\sigma+1).$$

با به‌کارگیری شرط $\sigma>\frac{2b}{\pi}-1$ و با توجه به (۵۲)، رابطهٔ (۵۳) را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(r)}{r}\geq 2(\sigma+1)>\frac{4b}{\pi}\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)d\theta. \qquad (۵۳)$$

مطابق [۲۲] ، برای هر تابع تحلیلی $G(\lambda)$ از نوع نمایی، متحد با صفر نباشد، این نامساوی برقرار است:

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n(r)}{r}\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)d\theta. \qquad (۵۴)$$

با توجه به نامساوی‌های (۵۳) و (۵۴)، رابطهٔ (۳۱) برقرار است. با به‌کار بردن روش مشابه اثبات قضیهٔ ۳-۱، $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه‌جا در $[0,\pi]$، و $h=\tilde{h}$ را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید $m(n)$ زیر دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد به‌طوری‌که

$$m(n)=\frac{n}{\sigma_1}(1+\varepsilon_{1n}),\quad 0<\sigma_1\leq 1,\qquad \varepsilon_{1n}\to 0.$$

نتیجهٔ ۱. *اگر $\lambda_{m(n)}=\tilde{\lambda}_{m(n)}$ و $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه‌جا در $[b,\pi)$ برای $n\in\mathbb{N}$، $b\leq\frac{\pi}{2}$ و $\sigma_1>\frac{2b}{\pi}$ آن‌گاه $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه‌جا در $[0,b]$ و $h=\tilde{h}$.*

برهان: با به‌کارگیری قضیهٔ ۳-۱ و ۳-۳ به سادگی می‌توان این نتیجه را ثابت کرد.

نتیجهٔ ۲. *فرض کنید $a\in(0,\pi)$ نقطه پرش، عدد ثابت $b\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ، $\sigma_1>\frac{2b}{\pi}$ و $\sigma>\frac{2b}{\pi}-1$ باشد، فرض کنید $\lambda_{m(n)}=\tilde{\lambda}_{m(n)}$ و $\mu_{l(n)}=\tilde{\mu}_{l(n)}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$، و $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه‌جا در $(b,\pi]$. آن‌گاه $q(x)=\tilde{q}(x)$ تقریباً همه‌جا در $[0,\pi]$ و $h=\tilde{h}$.*

برهان: با به‌کارگیری قضیه ۲ و ۳ و نتیجهٔ ۱، به سادگی می‌توان نتیجه ۲ را ثابت کرد.

منابع

1. Shahriari M., Akbarfam A. J., Teschl G., "Uniqueness for inverse Sturm–Liouville problems with a finite number of transmission conditions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 395(1) (2012) 19-29.
2. Krueger R. J., "Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties", Journal of Mathematical Physics, 23 (3) (1982) 396-404.
3. Anderssen R., "The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth", Geophysical Journal International, 50 (2) (1977) 303-309.

4. Hald O. H., "Discontinuous inverse eigenvalue problems", Communications on Pure and Applied Mathematics, 37 (5) (1984) 539-577.
5. Yurko V., "Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems", Integral Transforms and Special Functions, 10 (2) (2000) 141-164.
6. Ambarzumian V., "Über eine frage der eigenwerttheorie", Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 53 (9) (1929) 690-695.
7. Borg G., "Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe", Acta Mathematica, 78 (1) (1946) 1-96.
8. McLaughlin J. R., "Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data", SIAM review, 28 (1) (1986) 53-72.
9. Hochstadt H., Lieberman B., "An inverse Sturm–Liouville problem with mixed given data", SIAM Journal on Applied Mathematics, 34 (4) (1978) 676-680.
10. Levitan B. M., "Inverse Sturm-Liouville Problems", (1987) VSP.
11. Hochstadt H., "The inverse sturm-liouville problem", Communications on Pure and Applied Mathematics, 26 (5-6) (1973) 715-729.
12. Hochstadt H., "On inverse problems associated with Sturm-Liouville operators", Journal of differential Equations, 17 (1) (1975) 220-235.
13. Binding P. A., Browne P. J., Watson B. A., "Inverse spectral problems for left-definite Sturm-Liouville equations with indefinite weight", Journal of Mathematical Analysis and applications, 271 (2) (2002) 383-408.
14. Amirov R. K., "On Sturm–Liouville operators with discontinuity conditions inside an interval", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 317 (1) (2006) 163-176.
15. Koyunbakan H., Panakhov E. S., "Inverse problem for a singular differential operator", Mathematical and Computer Modelling, 47 (1) (2008) 178-185.
16. Shahriari M., "Inverse Sturm-Liouville problems with a Spectral Parameter in the Boundary and transmission conditions", Sahand Communications in Mathematical Analysis, 3 (2) (2016) 75-89.
17. Xu X.-C., Yang C.-F., "Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator with discontinuity", Journal of Differential Equations, 262 (3) (2017) 3093-3106.
18. Freiling G., Yurko V. A., "Inverse Sturm-Liouville problems and their applications", NOVA Science Publishers New York (2001).
19. Willis C., "Inverse Sturm-Liouville problems with two discontinuities", Inverse Problems, 1(3) (1985) 263.
20. Kobayashi M., "A uniqueness proof for discontinuous inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials", Inverse Problems, 5 (5) (1989) 767.
21. Yang C.-F., "An interior inverse problem for discontinuous boundary-value problems", Integral Equations and Operator Theory, 65 (4) (2009) 593-604.
22. Levin B.I.A., "Distribution of zeros of entire functions", Vol. 5. American Mathematical Soc. (1964).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.5.6]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.225]