یک الگوریتم تصویری پیش‌رو – پس‌رو برای تقریب ریشهٔ مجموع دو عملگر

وحید داداشی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساری، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۹/۰۴ پذیرش ۹۷/۰۵/۱۴

چکیده

یک الگوریتم تصویری پیش‌رو-پس‌رو برای یافتن ریشهٔ مجموع دو عملگر غیرخطی در فضای هیلبرت را در نظر می‌گیریم. دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ الگوریتم به‌صورت قوی همگرا به ریشهٔ مجموع دو عملگر-α به‌طور قوی یکنوای معکوس و یکنوای ماکسیمال است. نتیجه به‌دست آمده را برای حل مسئلهٔ نامساوی تغییراتی، مسئلهٔ نقطه ثابت و مسئلهٔ تعادل به‌کار می‌بریم.

واژه‌های کلیدی: عملگر یکنوای ماکسیمال، عملگر حلال، الگوریتم تصویری پیش‌رو – پس‌رو.

مقدمه

به‌دلیل کاربردهای فراوان، رده عملگرهای یکنوا یکی از مهم‌ترین رده‌های نگاشت‌ها است. برای حل بسیاری از مسئله‌های مهم مانند مسئله‌های بهینه‌سازی محدب، مسئله‌های نامساوی تغییراتی و غیره، لازم است که مسئله‌های شمولیت یکنوا را حل کنیم. برای بررسی بیش‌تر به [۱]-[۵] و منابع در آنها مراجعه شود.

اولین الگوریتم برای تقریب ریشه عملگر یکنوا به‌وسیلهٔ مارتینت [۶] معرفی شد. در دهه‌های گذشته، محققان الگوریتم‌های مختلفی را برای همگرایی به ریشه عملگر یکنوای ماکسیمال در فضای هیلبرت ارائه و بررسی کردند [۷]، [۸]-[۱۴].

یک تعمیم برای یافتن ریشه‌های عملگرهای غیرخطی، یافتن ریشه‌های مجموع دو عملگر-α به‌طور قوی یکنوای معکوس و یکنوای ماکسیمال است. پستی [۱۵]، روشی تکراری به‌نام روش تکراری پیشرو-پس‌رو برای یافتن ریشه‌های مجموع دو عملگر معرفی کرد. کاربردهای گوناگونی از یافتن ریشه‌های مجموع دو عملگر وجود دارد که برای مثال به [۱۶]، [۱۷]، [۱۸] و منابع آنها مراجعه شود. اخیراً، برخی محققان الگوریتم‌هایی را برای یافتن ریشه‌های مجموع دو عملگر-α به‌طور قوی یکنوای معکوس و یکنوای ماکسیمال معرفی و تحت شرایط متفاوتی بررسی کردند [۱۹]، [۲۰]، [۲۱]، [۲۲].

با توجه به مطالب گفته شده در بالا، یک الگوریتم تصویری پیش‌رو-پس‌رو برای یافتن ریشه مجموع دو عملگر α–به‌طور قوی یکنوای معکوس و یکنوای ماکسیمال معرفی می‌کنیم. قضیهٔ همگرایی قوی را تحت شرایط کمی روی دنباله‌های کنترلی ثابت می‌کنیم.

این مقاله بدین‌شرح سازمان یافته است. بخش دوم به جمع‌آوری برخی از تعاریف هندسه فضاهای باناخ و عملگرهای یکنوا می‌پردازد که در باقی بخش‌ها مورد نیاز خواهد بود. در بخش سوم، الگوریتم تصویری پیش‌رو-پس‌رو را

*نویسنده مسئول vahid.dadashi@iausari.ac.ir

ارائه و همگرایی قوی دنباله تولید شده به‌وسیلهٔ الگوریتم را به ریشه مجموع دو عملگر$\alpha-$به‌طور قوی یکنوای معکوس و یکنوای ماکسیمال ثابت می‌کنیم. سرانجام، در بخش چهارم، ایده‌های بخش سوم را برای حل مسئله‌های نقطه ثابت، نامساوی تغییراتی و تعادل به‌کار می‌بریم.

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این بخش، برخی مفاهیم، تعاریف و لم‌های اساسی را ارائه می‌کنیم که در ادامه به آنها نیازمندیم. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب از یک فضای هیلبرت H مجهز با نرم $\|\cdot\|$ و ضرب داخلی$\langle\cdot,\cdot\rangle$ است. همگرایی قوی دنباله $\{x_n\}$ به x را با $x_n \to x$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱. نگاشت $T: H \to H$ را غیرانبساطی می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in H$ داشته باشیم:

$$\| Tx - Ty \| \leq \| x - y \|.$$

نگاشت T را قطعاً غیرانبساطی می‌گوییم هرگاه برای هر $x. y \in H$ داشته باشیم

$$\| Tx - Ty \|^2 \leq \langle Tx - Ty, x - y\rangle.$$

مجموعه نقاط ثابت T را با $F(T)$ نشان می‌دهیم یعنی $F(T) = \{x \in H: Tx = x\}$. بدیهی است که اگر T غیرانبساطی باشد آن‌گاه $F(T)$ بسته و کراندار است.

تعریف ۲. نگاشت چند مقداری $B: H \to 2^H$ را یکنوا می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in H$ و هر $x^* \in B(x)$ و $y^* \in B(y)$داشته باشیم

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0.$$

یک عملگر یکنوا $B: H \to 2^H$ را یکنوای ماکسیمال می‌نامیم هرگاه نمودار آن به‌طور اکید مشمول در نمودار هر عملگر یکنوای دیگری در فضای یکسان نباشد. دامنهٔ مؤثر عملگر را به‌صورت $D(B) = \{x \in H | B(x) \neq \emptyset\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳. یک نگاشت تک مقداری $A: H \to H$ را α- به‌طور قوی یکنوای معکوس می‌نامیم اگر برای هر $x. y \in H$ داشته باشیم

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha \| Ax - Ay \|^2$$

که در آن α یک عدد مثبت است.

به‌راحتی می‌توان دید که هر نگاشت-α به‌طور قوی یکنوای معکوس، یکنوا و پیوسته است.

لم ۴. [۲۳] فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرتH، $A: H \to H$ نگاشتα-به‌طور قوی یکنوای معکوس و $r > 0$ یک مقدار ثابت است. آن‌گاه برای هر $x. y \in C$ داریم:

$$\| (I - rA)x - (I - rA)y \|^2 \leq \| x - y \|^2 + r(r - 2\alpha) \| Ax - Ay \|^2$$

به‌ویژه، اگر $0 < r \leq 2\alpha$، آنگاه $I - rA$ غیرانبساطی است.

تعریف ۵. فرض کنید $B: H \to 2^H$ عملگر یکنوای ماکسیمال و $\lambda > 0$ باشند. عملگر $J_\lambda: H \to D(B)$ تعریف شده به‌صورت $J_\lambda = (I + \lambda B)^{-1}$ را عملگر حلال می‌نامیم. واضح است که J_λ قطعا غیرانبساطی است و $F(J_\lambda) = B^{-1}(0)$.

لم۶. [۲۳] فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H و $A: H \to H$ یک عملگر است. اگر

$B: H \to 2^H$ یک عملگر یکنوای ماکسیمال باشد، آن‌گاه $(A+B)^{-1}(0) = F(J_\lambda(I-\lambda A))$.

فرض کنید C زیرمجموعه محدب و بسته از H است. عملگر P_C را عملگر تصویر متریک می‌نامیم اگر به هر $x \in H$ نزدیکترین نقطه‌ی $y \in C$ را نسبت دهد به‌طوری‌که

$$\| x - y \| = \min\{\| x - z \| : z \in C\}.$$

عضو y را تصویر از X به روی C نامیده و با $P_C x$ نشان می‌دهند.

لم۷. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و C زیرمجموعه محدب و بسته از H است. آن‌گاه برای هر $x \in H$، $z = P_C x$ است اگر و تنها اگر

$$\langle x - z, z - y \rangle \geq 0, \ \ \forall y \in C.$$

فرض کنید C زیرمجموعه محدب و بسته از H است، در این صورت تصویر در نامساوی (۱) صدق می‌کنند

$$\| P_C x - P_C y \|^2 \leq \langle P_C x - P_C y, x - y \rangle, \forall x, y \in H. \quad (۱)$$

بنابراین تصویر یک عملگر قطعاً غیرانبساطی در H است.

برای یک دنبالهٔ $\{C_n\}$ از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای باناخ X، $\mathrm{s-Li_n C_n}$ و $\mathrm{w-Ls_n C_n}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

گوییم $x \in \mathrm{s-Li_n C_n}$ اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{x_n\} \subset X$ موجود باشد به‌طوری‌که $\{x_n\}$ همگرای قوی به x و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \in C_n$.

به‌طور مشابه می‌گوییم $y \in \mathrm{w-Ls_n C_n}$ اگر و تنها اگر زیردنبالهٔ $\{C_{n_i}\}$ از $\{C_n\}$ و یک دنبالهٔ $\{y_i\} \subset X$ موجود باشد به‌طوری‌که $\{y_i\}$ همگرای ضعیف به y و برای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $y_i \in C_{n_i}$.

اگر C_0 در تساوی

$$C_0 = \mathrm{s-Li_n C_n} = \mathrm{w-Ls_n C_n}$$

صدق کند، می‌گوییم دنبالهٔ $\{C_n\}$ در مفهوم مسکو همگرا به C_0 است و به‌صورت $C_0 = \mathrm{M} - \lim_{n\to\infty} C_n$ می‌نویسیم [۲۵]. به‌راحتی می‌توان نشان داد اگر $\{C_n\}$ تحت رابطهٔ شمولیت نزولی باشد آن‌گاه $\{C_n\}$ در مفهوم مسکو همگرا به $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ است. برای جزئیات بیش‌تر [۲۵] را ببینید. لم زیرین به‌وسیلهٔ تسوکادا [۲۶] ثابت شده است.

لم ۸. فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی اکیدا محدب و $\{C_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از X است. اگر $C_0 = \mathrm{M} - \lim_{n\to\infty} C_n$ موجود و ناتهی باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$، $P_{C_n} x$ همگرای ضعیف به $P_{C_0} x$ است که در آن P_{C_n} و P_{C_0} به‌ترتیب تصویر از X به C_n و C_0 هستند. علاوه بر این، اگر X دارای ویژگی کادک-کلی باشد، همگرایی قوی خواهد بود.

الگوریتم تصویری پیش‌رو-پس‌رو

در این بخش قضیهٔ همگرایی قوی را با استفاده از الگوریتم تصویری پیش‌رو-پس‌رو برای یافتن ریشه مجموع دو عملگر α-به‌طور قوی یکنوای معکوس و یکنوای ماکسیمال ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۹. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از یک فضای هیلبرت H، $A: C \to H$ یک نگاشت α-به‌طور قوی یکنوای معکوس و B عملگر یکنوای ماکسیمال از H به توی 2^H باشند به‌طوری‌که دامنه B مشمول در C باشد و $(A+B)^{-1}(0) \neq \emptyset$. عملگر J_λ را عملگر حلال B به‌ازای $\lambda > 0$ در نظر بگیرید. فرض کنید دنباله $\{x_n\}$

تولید شده به‌وسیلهٔ الگوریتم (۲) باشد:

$$\begin{cases} z_n = J_{\lambda_n}(x_n - \lambda_n A x_n) \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) z_n. \\ C_n = \{z \in C_{n-1} : \langle y_n - z . x_n - y_n \rangle \geq 0\}. \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x_1). \end{cases} \tag{۲}$$

که در آن $C_1 = H$ و $x_1 \in H$. اگر $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq a < 1$ و $0 < c \leq \lambda_n < \alpha$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای قوی به $z_0 \in (A+B)^{-1}(0)$ است که در آن $z_0 = P_{(A+B)^{-1}(0)} x_1$.

اثبات. در ابتدا ثابت می‌کنیم دنباله $\{x_n\}$ تولید شده به‌وسیلهٔ الگوریتم (۲) خوش تعریف است. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، C_n یک مجموعه بسته و محدب است. برای هر $n \in \mathbb{N}$، نشان می‌دهیم که $(A+B)^{-1}(0) \subset C_n$.

به‌وضوح داریم $(A+B)^{-1}(0) \subset C_1$. فرض کنید که برای یک $n \in \mathbb{N}$، $(A+B)^{-1}(0) \subset C_{n-1}$ را داشته باشیم. $p \in (A+B)^{-1}(0)$ را در نظر بگیرید، بنابراین $0 \in Ap + Bp$. از این‌رو، $-Ap \in Bp$. چون J_{λ_n} عملگر حلال B است، با استفاده از تعریف z_n نتیجه می‌شود که

$$\frac{x_n - z_n}{\lambda_n} - A x_n \in B z_n. \tag{۳}$$

با توجه به این‌که B یکنواست، داریم

$$0 \leq \langle \frac{x_n - z_n}{\lambda_n} - A x_n + Ap, z_n - p \rangle.$$

از این‌رو

$$\begin{aligned} \langle x_n - z_n, z_n - p \rangle &\geq \lambda_n \langle A x_n - Ap, z_n - p \rangle \\ &= \lambda_n \langle A x_n - Ap, z_n - x_n \rangle + \lambda_n \langle A x_n - Ap, x_n - p \rangle. \end{aligned} \tag{۴}$$

از تعریف y_n به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \langle y_n - p, x_n - y_n \rangle &= \langle \alpha_n (x_n - p) + (1-\alpha_n)(z_n - p), (1-\alpha_n)(x_n - z_n) \rangle \\ &= \alpha_n (1-\alpha_n) \langle x_n - z_n + z_n - p, x_n - z_n \rangle + (1-\alpha_n)^2 \langle z_n - p, x_n - z_n \rangle \\ &= \alpha_n (1-\alpha_n) \| x_n - z_n \|^2 + \alpha_n (1-\alpha_n) \langle z_n - p, x_n - z_n \rangle \\ &\quad + (1-\alpha_n)^2 \langle z_n - p, x_n - z_n \rangle \\ &= \alpha_n (1-\alpha_n) \| x_n - z_n \|^2 + (1-\alpha_n) \langle z_n - p, x_n - z_n \rangle \end{aligned} \tag{۵}$$

از (۴)، (۵) و فرضیات داریم

$$\begin{aligned} \langle y_n - p, x_n - y_n \rangle &\geq \alpha_n (1-\alpha_n) \| x_n - z_n \|^2 \\ &+ \lambda_n (1-\alpha_n) \langle A x_n - Ap, z_n - x_n \rangle + \lambda_n (1-\alpha_n) \langle A x_n - Ap, x_n - p \rangle \\ &\geq (1-\alpha_n) [\alpha_n^2 \| x_n - z_n \|^2 \\ &- \lambda_n \| A x_n - Ap \| \| x_n - z_n \| + \alpha \lambda_n \| A x_n - Ap \|^2] \\ &\geq (1-\alpha_n) [\alpha_n^2 \| x_n - z_n \|^2 \\ &- 2\alpha_n \lambda_n \| A x_n - Ap \| \| x_n - z_n \| + \lambda_n^2 \| A x_n - Ap \|^2] \\ &= (1-\alpha_n) (\alpha_n \| x_n - z_n \| - \lambda_n \| A x_n - Ap \|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $p \in C_n$. با استقرای ریاضی برای هر $n \in \mathbb{N}$، نتیجه می‌شود که $(A+B)^{-1}(0) \subset C_n$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.6.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.215]

بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ خوش تعریف است.

چون $(A+B)^{-1}(0)$ غیرتهی، بسته و محدب است، عضو یکتای $p \in (A+B)^{-1}(0) \subset \mathrm{C}_n$ موجود است به‌طوری‌که $p = P_{(A+B)^{-1}(0)}x_1$. از $x_{n+1} = P_{C_n}(x_1)$ نتیجه می‌شود که

$$\| x_{n+1} - x_1 \| \leq \| x_1 - p \|, \ \forall \in \mathbb{N}. \tag{۶}$$

از این‌رو، دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار است. از تعریف z_n، (۶) و این حقیقت که J_{λ_n} غیر انبساطی است، داریم

$$\begin{aligned} \| z_n - p \| &\leq \| J_{\lambda_n}(x_n - \lambda_n A x_n) - J_{\lambda_n}(p - \lambda_n A p) \| \\ &\leq \| (I - \lambda_n A)x_n - (I - \lambda_n A)p \| \\ &\leq \| x_n - p \|. \end{aligned} \tag{۷}$$

و لذا $\{z_n\}$ کراندار است. از تعریف y_n داریم

$$\| y_n - p \| \leq \| \alpha_n(x_n - p) + (1 - \alpha_n)(z_n - p) \|$$

بنابراین دنبالهٔ y_n نیز کراندار است.

قرار دهید $D = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(A+B)^{-1}(0) \subset C_n$ است، پس $D \neq \emptyset$. با استفاده از لم ۸ نتیجه می‌شود که $x_{n+1} = P_{C_n}x_1 \to P_D x_1 = q$. نشان می‌دهیم $q \in (A+B)^{-1}(0)$. با توجه به این‌که $q \in C_n$، داریم:

$$0 \leq \langle y_n - q. x_n - y_n \rangle = -\| x_n - y_n \|^2 + \langle x_n - q. x_n - y_n \rangle.$$

بنابراین،

$$\| x_n - y_n \|^2 \leq \langle x_n - q. x_n - y_n \rangle \leq \| x_n - q \| \| x_n - y_n \|.$$

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\| x_n - y_n \| \to 0$. از این‌رو، $y_n \to q$ و

$$\| x_n - z_n \| = \frac{1}{1-\alpha_n} \| x_n - y_n \| \to 0. \tag{۸}$$

بنابراین، $z_n \to q$. از (۳)، یکنوایی B و اینکه $(u.w) \in B$ نتیجه می‌گیریم که:

$$0 \leq \langle \frac{x_n - z_n}{\lambda_n} - A\mathrm{x}_n - w, z_n - u \rangle. \tag{۹}$$

با گرفتن حد از رابطهٔ مذکور و $n \to \infty$ نتیجه می‌شود $\langle 0 - Aq - w, q - u \rangle \geq 0$. حال یکنوای ماکسیمال بودن B نتیجه می‌دهد که $-Aq \in Bq$، پس $q \in (A+B)^{-1}(0)$.

اکنون نشان می‌دهیم که $q = P_{(A+B)^{-1}(0)}(x_1)$. از (۶) داریم $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_1 \| \leq \| x_1 - p \|$. بنابراین، از این‌که $p = P_{(A+B)^{-1}(0)}(x_1)$ و $q \in (A+B)^{-1}(0)$ نتیجه می‌گیریم

$$\| x_1 - p \| \leq \| q - x_1 \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - x_1 \| \leq \| x_1 - p \|.$$

این به‌همراه یکتایی $P_{(A+B)^{-1}(0)}(x_1)$، $q = p = P_{(A+B)^{-1}(0)}(x_1)$ را نتیجه می‌دهد و از این‌رو دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای قوی به $P_{(A+B)^{-1}(0)}(x_1)$ است. این برهان را کامل می‌کند.

اگر در قضیهٔ ۹، $A = 0$ در نظر بگیریم، نتیجه ۱۰ را به‌دست می‌آوریم.

نتیجهٔ ۱۰. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از یک فضای هیلبرت H و B عملگر یکنوای ماکسیمال از H به توی 2^H باشد به‌طوری‌که دامنهٔ B مشمول در C است و $B^{-1}(0) \neq \emptyset$. فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به‌وسیلهٔ الگوریتم (۱۰) باشد:

$$\begin{cases} z_n = J_{\lambda_n}(x_n) \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) z_n. \\ C_n = \{z \in C_{n-1} : \langle y_n - z, x_n - y_n \rangle \geq 0\}. \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x_1). \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن $C_1 = H$ و $x_1 \in H$. اگر $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq a < 1$ و $0 < c \leq \lambda_n < \alpha$، آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $p \in B^{-1}(0)$ است که در آن $p = P_{B^{-1}(0)} x_1$.

کاربردها

هدف در این بخش این است تا به بحث در مورد کاربردهایی از قضیه اصلی در مسئله نامساوی تغییراتی، مسئله نقطه ثابت و مسئله تعادل بپردازیم.

نامساوی تغییراتی

فرض کنید که تابع f محدب و $domf = f^{-1}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ باشد. زیر دیفرانسیل $\partial f : H \to 2^H$ از f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial f(x) = \{z \in H : \langle y - x, z \rangle \leq f(y) - f(x),\ \forall y \in H\}.$$

قضیهٔ ۱۱. [۲۷] فرض کنید که تابع $f : \mathrm{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ سره، محدب و نیم پیوسته پایینی باشد. آن‌گاه ∂f یکنوای ماکسیمال است.

بدیهی است که $0 \in \partial f(x)$ اگر و تنها اگر $f(x) = \min_{y \in H} f(y)$.

تابع مشخصه از مجموعه C را با ι_C نشان داده و بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از یک فضای هیلبرت H باشد. پس ι_C یک تابع سره، محدب و نیم پیوسته پایینی روی H است، زیردیفرانسیل $\partial \iota_C$ از ι_C یک عملگر یکنوای ماکسیمال است. هم‌چنین داریم

$$z = J_r x \Leftrightarrow z = P_C(x), \qquad x \in H.$$

که در آن $J_r = (I + r\,\partial \iota_C)^{-1}$ برای $r > 0$ است. هم‌چنین داریم

$$\begin{aligned} x \in (A + \partial \iota_C)^{-1}(0) &\Leftrightarrow 0 \in (Ax + \partial \iota_C(x)) \\ &\Leftrightarrow -A(x) \in \partial \iota_C(x), \\ &\Leftrightarrow \langle A(x), y - x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in VI(C, A). \end{aligned}$$

از این‌رو، نتیجهٔ ۱۲ را داریم:

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از یک فضای هیلبرت H و $A : C \to H$ یک نگاشت α-به‌طور قوی یکنوای معکوس باشد به‌طوری‌که $VI(C, A) \neq \emptyset$. فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به‌وسیلهٔ این الگوریتم باشد:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.6.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.215]

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) z_n, \\ C_n = \{z \in C_{n-1} : \langle y_n - z, x_n - y_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x_1), \end{cases}$$

که در آن $C_1 = H$ و $x_1 \in H$ اگر $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq a < 1$ و $0 < c \leq \lambda_n < \alpha$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای قوی به نقطه $z_0 \in VI(C.A)$ است که در آن $z_0 = P_{VI(C.A)} x_1$.

مسئلهٔ نقطه ثابت

الگوریتم (۲) را برای یافتن نقطه ثابت نگاشت شبه انقباضی اکید به‌کار می‌بریم. مجموعه نقاط ثابت S را با $F(S)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $S: C \to C$ را κ-شبه انقباضی اکید می‌نامیم هرگاه $\kappa \in [0,1)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\| Sx - Sy \| \leq \| x - y \| + \kappa \| (I-S)x - (I-S)y, \ \forall x, y \in C.$$

رده نگاشت‌های شبه انقباضی اکید به‌وسیلهٔ برادر و پتریشین [۲۸] معرفی شده بود. اگر $\kappa = 0$، رده نگاشت‌های شبه انقباضی اکید به رده نگاشت‌های غیرانبساطی تنزل می‌یابد.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از فضای هیلبرت H و $S: C \to C$ نگاشت κ-شبه انقباضی اکید با $F(S) \neq \emptyset$ باشد. فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به‌وسیلهٔ این الگوریتم باشد:

$$\begin{cases} z_n = P_C\big((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n S x_n\big), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) z_n, \\ C_n = \{z \in C_{n-1} : \langle y_n - z. x_n - y_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x_1). \end{cases}$$

که در آن $C_1 = H$ و $x_1 \in H$ اگر $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq a < 1$ و $0 < c \leq \lambda_n < \frac{1-\kappa}{2}$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرای قوی به نقطه $p \in F(S)$ است که در آن $p = P_{F(S)} x_1$.

اثبات. قرار دهید $A = I - S$، در این صورت بدیهی است که A یک نگاشت $\frac{1-\kappa}{2}$- به‌طور قوی یکنوای معکوس است. هم‌چنین داریم $F(S) = VI(C.A)$ و $x_n - \lambda_n A x_n = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n S x_n$. بنابراین از قضیهٔ ۱۲ نتیجهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

مسئلهٔ تعادل

در این قسمت از قضیهٔ ۹ برای حل مسئله تعادل استفاده می‌کنیم. در این رابطه، فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از فضای هیلبرت H باشد. یک تابع $F: C \times C \to \mathbb{R}$ دوتابع نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in C$ داشته باشیم $F(x,x) = 0$. مسئلهٔ تعادل (۱۲) را که پیدا کردن یک جواب $z \in H$ است که

$$F(z.y) \geq 0, \quad \forall y \in C. \qquad (۱۲)$$

را در نظر می‌گیریم. مجموعه جواب‌های مسئلهٔ تعادل (۱۲) را با $EP(F)$ نشان می‌دهیم. دوتابع $F: C \times C \to \mathbb{R}$ یکنوا نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in C$، داشته باشیم $F(x,y) + F(y,x) \leq 0$. برای پیدا کردن مجموعه جواب‌های مسئله تعادل (۱۲) فرض می‌کنیم F در این شرایط صدق کند:

الف) برای هر $x \in C$، $F(x,x) = 0$،

ب) F یکنواست،

ج) برای هر $x, y, z \in C$، $\limsup_{t\downarrow 0} F(tz + (1-t)x, y) \leq F(\mathrm{x}, y)$،

د) برای هر $x \in C$، $y \mapsto F(x, y)$ یک تابع محدب و نیم پیوسته پایینی است.

لم‌های ۱۴ و ۱۵ را در [۲۹]، [۳۰] می‌توان یافت.

لم ۱۴. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از فضای هیلبرت H و $F: C \times C \to \mathbb{R}$ یک دوتابع صادق در شرایط (الف-د) باشد. فرض کنید r یک عدد حقیقی مثبت و $x \in H$ باشد. در این صورت $z \in C$ موجود است به‌طوریکه

$$F(z.y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0,\ \ \forall y \in C.$$

علاوه بر این، تابع T_r را برای هر $x \in H$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$T_r x = \left\{z \in C: F(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0,\ \ \forall y \in C\right\}.$$

در این صورت، این روابط برقرارند:

۱. نگاشت T_r تک مقداری است،

۲. نگاشت T_r قطعا غیر انبساطی است؛ یعنی،

$$\| T_r x - T_r y \|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle, \forall x, y \in H,$$

۳. $F(T_r) = EP(F)$،

۴. $EP(F)$ بسته و محدب است.

لم ۱۵. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از فضای هیلبرت H و $F: C \times C \to \mathbb{R}$ یک دوتابع صادق در شرایط (الف-د) باشد. فرض کنید عملگر چند مقداری A^F بدین‌صورت تعریف شود:

$$A^F(x) = \begin{cases} \{z \in H: F(x, y) \geq \langle z, y - x\rangle, \quad \forall y \in C\}, & x \in C \\ \emptyset, & x \in X \backslash C. \end{cases}$$

در این صورت، A^F عملگر یکنوای ماکسیمال است و داریم $D(A^F) \subset C$، $EP(F) = (A^F)^{-1}(0)$ و برای هر $x \in H$ و $r > 0$، $T_r x = (I + rA^F)^{-1} x$.

فرض کنید F یک دوتابع صادق در شرایط (الف-د) باشد. با توجه به لم ۱۵ دنبالهٔ $\{z_n\}$ و $\{x_n\}$ موجود است که

$$\begin{cases} \lambda_n F(z_n . y) + \langle y - z_n, z_n - x_n\rangle \geq 0,\ \ \forall y \in C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) z_n, \\ C_n = \{z \in C_{n-1}: \langle y_\mathrm{n} - z, x_n - y_n\rangle \geq 0\}. \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x_1). \end{cases} \qquad (۱۳)$$

که در آن $C_1 = H$ و $x_1 \in H$، که معادل با الگوریتم (۱۰) است. بنابراین، هر نتیجه همگرایی برای دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ (۱۰) برای دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ (۱۳) نیز درست است. در حقیقت، قضیهٔ ۱۶ را داریم.

قضیهٔ ۱۶. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، محدب و بسته از فضای هیلبرت H و $F: C \times C \to \mathbb{R}$ یک دوتابع صادق در شرایط (الف-د) با $EP(F) \neq \emptyset$ باشد. اگر $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq a < 1$ و $0 < c \leq \lambda_n < \alpha$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به‌وسیلهٔ الگوریتم (۱۳) همگرای قوی به جواب مسئلهٔ تعادل (۱۲) است.

منابع

1. Kinderlehrer D., Stampacchia G., "An Introduction to Variational Inequalities and Their

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.6.7]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.215]

Applications",Academic Press, New York (1980).

2. Kamimura S., Takahashi W., "Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications", Set-Valued Anal., 8 (2000) 361-374.
3. Cho S. Y., Qin X., Kang S. M., "Iterative processes for common fixed points of two different families of mappings with applications", J. Glob. Optim., 57 (2013) 1429-1446.
4. Qin X., Su Y., "Approximation of a zero point of accretive operator in Banach spaces", J. Math., Anal. Appl., 329 (2007) 415-424.
5. Qin X., Cho Y. J., Kang S. M., "Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces", J. Comput. Appl. Math., 225 (2009) 20-30.
6. Martinet B., "Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives", Rev., Française Informat. Recherche Opérationnelle, 3 (1970) 154-158.
7. Rockafellar R. T., "Maximal monotone operators and proximal point algorithm", SIAM J. Control Optim., 14 (1976) 877-898.
8. Xu H. K., "Iterative algorithm for nonlinear operators", J. Lond. Math. Soc. 2 (2002) 1-17.
9. Djafari Rouhani B., Khatibzadeh H., "On the proximal point algorithm", J. Optim. Theory Appl., 137 (2008) 411-417.
10. Boikanyo O. A., Morosanu G., "A proximal point algorithm converging strongly for general errors", Optim, Lett., 4 (2010) 635-641.
11. Khatibzadeh H., "Some remarks on the proximal point algorithm", J. Optim. Theory Appl., 153 (2012) 769-778.
12. Dadashi V., "Shrinking projection algorithms for the split common null point problrm", Bull. Aust. Math. Soc., 96 (2017) 299-306.
13. Dadashi V., Khatibzadeh H., "On the weak and strong convergence of the proximal point algorithm in reflexive Banach spaces", Optimization, 66(9) (2017) 1487-1494.
14. Dadashi V., Postolache M., "Hybrid Proximal Point Algorithm and Applications to Equilibrium Problems and Convex Programming", J. Optim. Theory Appl., 174 (2017) 518-529.
15. Passty G. B., "Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space", J Math Anal Appl., 72 (2) (1979) 383-390.
16. Moudafi A., Thera M., "Finding a zero of the sum of two maximal monotone operators", J. Optim. Theory Appl., 94 (2) (1997) 425-448.
17. Qin X., Cho S.Y., Wang L., "A regularization method for treating zero points of the sum of two monotone operators", Fixed Point Theory and Applications. 2014, Article ID 75 (2014).
18. Tseng P., "A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings", SIAM J. Control Optim. 38 (2000) 431-446.
19. Boikanyo O. A., "The viscosity approximation forward-backward splitting method for zeros

of the sum of monotone operators", Abstract and Applied Analysis, 2016, Article ID 2371857 (2016).

20. Wu C., Liu A., "Strong convergence of a hybrid projection iterative algorithm for common solutions of operator equations and of inclusion problems", Fixed Point Theory and Applications. 2012, Article ID 90 (2012).
21. Cholamjiak P., Cholamjiak W., Suantai S., "A modified regularization method for finding zeros of monotone operators in Hilbert spaces", J Inequal Appl, 2015, Article ID 220 (2015).
22. Zhang M., "Iterative algorithms for common elements in fixed point sets and zero point sets with applications", Fixed Point Theory and Applications 2012, Article ID 21 (2015).
23. Nadezhkina N., Takahashi W., "Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings", J. Optim. Theory Appl. 128 (2006) 191-201.
24. Aoyama K., Kimura Y., Takahashi W., Toyoda M., "On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 8 (2007) 471-489.
25. Mosco U., "Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities", Adv. Math. 3 (1969) 510-585.
26. Tsukada M., "Convergence of best approximations in a smooth Banach space", J. Approx. Theory 40 (1984) 301-309.
27. Rockafellar R., "On the maximal monotonicity of subdifferential mappings', Pacific J. Math. 33(1) (1970) 209-216.
28. Browder F. E., Petryshyn W. V., "Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space", J Math Anal Appl. 20 (1967) 197-228.
29. Blum E., Oettli W., "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", Math Stud. 63 (1994) 123-145.
30. Combettes P. L., Hirstoaga S. A., "Equilibrium programming in Hilbert spaces", J Nonlinear Convex Anal. 6 (2005) 117-136.
31. Takahashi S., Takahashi W., Toyoda M., "Strong convergence theorems for maximal monotone operators with nonlinear mappings in Hilbert spaces", J. Optim. Theory Appl. 147 (2010) 27-41.