استنباط آماری تعمیم‌یافته برای مقایسهٔ بردارهای میانگین در جامعه‌های لگ‌نرمال چند متغیره

کامل عبداله نژاد*، نسرین طاطاری؛ دانشگاه گلستان، گروه آمار
علی اکبر جعفری؛ دانشگاه یزد، گروه آمار

دریافت ۹۶/۰۹/۰۵ پذیرش ۹۷/۰۳/۲۷

چکیده

در این مقاله به مسئلهٔ مقایسه میانگین‌های چندین جامعه لگ‌نرمال چندمتغیره پرداخته می‌شود و یک روش مفید به‌نام روش متغیر تعمیم‌یافته ارائه می‌گردد. بررسی‌های شبیه‌سازی نشان می‌دهد که آزمون فرض روش پیشنهادی صرف نظر از حجم نمونه، اندازه و توان آزمون مناسبی دارد. برای ارزیابی این روش، آن را با روش مرسوم آنالیز واریانس چندمتغیره مقایسه می‌کنیم که اندازهٔ واقعی هر دو آزمون به یک‌دیگر نزدیک هستند ولی توان آزمون و احتمال پوشش روش پیشنهادی در بسیاری از موارد به‌ویژه در اندازه نمونه‌های کوچک بهتر از روش آنالیز واریانس چندمتغیره است. بنابراین می‌توان این روش را برای حالتی که ماتریس‌های واریانس-کوواریانس برابر نیستند و روش دیگری برای مقایسهٔ میانگین‌ها وجود ندارد به کار برد.

واژه‌های کلیدی: متغیر تعمیم‌یافته، توزیع لگ‌نرمال چند متغیره، اندازه و توان آزمون، احتمال پوشش، تجزیه چولسکی.

مقدمه

یکی از توزیع‌های مهم آماری که در بسیاری از زمینه‌ها مانند اقتصاد، پزشکی و بررسی‌های محیطی کاربرد دارد، توزیع لگ‌نرمال است. این توزیع برای متغیرهای تصادفی مثبت و چوله به راست استفاده می‌شود. میانگین توزیع لگ-نرمال، ترکیبی خطی از دو پارامتر این توزیع است و به همین دلیل استنباط روی آن به آسانی میسر نیست. نویسندگان زیادی به استنباط روی میانگین توزیع لگ‌نرمال پرداخته‌اند و مسئله‌های آزمون درباره میانگین یک توزیع لگ-نرمال یک متغیره، مقایسهٔ میانگین‌ها در دو جامعه مستقل لگ‌نرمال یک متغیره و مقایسه میانگین‌ها در چند جامعه مستقل یک متغیره بررسی کرده‌اند که در این میان می‌توان به ژو و گائو (۱۹۹۷)، تیلور و همکاران (۲۰۰۲)، وو و همکاران (۲۰۰۲، ۲۰۰۳)، ژو و همکاران (۱۹۹۷)، چن و ژو (۲۰۰۶)، گوپتا و لی (۲۰۰۶)، کریشنامورثی و ماتئو (۲۰۰۳)، لی (۲۰۰۹)، لین و وانگ (۲۰۱۳)، جعفری و عبداله نژاد (۲۰۱۵ و ۲۰۱۷)، آقادوست و همکاران (۱۳۹۴) اشاره کرد.

توزیع لگ نرمال چندمتغیره یکی از توزیع های مهم در کاربردهای پزشکی است. این توزیع بدین‌گونه تعریف می‌شود که بردار $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\dots,Y_p)'$ دارای توزیع لگ‌نرمال چندمتغیره با پارامترهای $\boldsymbol{\mu}$ و Σ است هرگاه بردار $\boldsymbol{X}=(\log(Y_1),\dots,\log(Y_p))'$ دارای توزیع نرمال p-متغیره با میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ باشد. در دو دههٔ اخیر استنباط دربارهٔ میانگین‌های توزیع لگ‌نرمال دومتغیره مورد توجه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.12.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.187]

ببو و ماتیو (۲۰۰۸) مؤلفه‌های میانگین در توزیع لگ‌نرمال دومتغیره را با یک‌دیگر مقایسه کردند و ژو و همکاران (۲۰۰۱) تساوی میانگین‌ها در توزیع لگ‌نرمال دو متغیره را مورد آزمون قرار دادند. لین (۲۰۱۴) روش p-مقدار تعمیم‌یافته را برای مقایسهٔ میانگین‌های دو جامعهٔ مستقل لگ‌نرمال چندمتغیره استفاده کرد. در این مقاله روشی را توسعه می‌دهیم که برای ساختن آزمون فرض و نواحی اطمینان، برای استنباط و مقایسه بردارهای میانگین در جامعه‌های لگ‌نرمال چند متغیره، استفاده می‌شوند. این روش بر اساس مفاهیم متغیر تعمیم‌یافته و کمیت محوری تعمیم‌یافته که به‌وسیلهٔ تسو و ویراهاندی (۱۹۸۹) و ویراهاندی (۱۹۹۳) معرفی شده‌اند، ایجاد شده است. به‌طورکلی روشی برای مقایسهٔ بردارهای میانگین در چند جامعهٔ لگ‌نرمال p-متغیره تا کنون ارائه نشده است. هدف این مقاله این است که این خلأ را با توسعه روش متغیر تعمیم‌یافته از بین ببرد.

در بخش بعدی این مقاله مفاهیم p- مقدار تعمیم‌یافته و فاصله اطمینان تعمیم‌یافته توضیح داده می‌شود و یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای میانگین جامعه‌های لگ‌نرمال چندمتغیره ارائه می‌شود. در بخش ۳، روش p-مقدار تعمیم‌یافته برای آزمون برابری میانگین‌ها در چندین جامعهٔ لگ‌نرمال شرح داده می‌شود. در بخش ۴، اندازهٔ واقعی، توان آزمون و احتمال پوشش روش پیشنهاد شده و روش آنالیز واریانس چندمتغیره با استفاده از شبیه‌سازی مقایسه می‌شوند. در بخش ۵، با یک مثال واقعی روش پیشنهادی را تشریح می‌کنیم.

مفاهیم p- مقدار تعمیم‌یافته و فاصلهٔ اطمینان تعمیم‌یافته

تسو و ویراهاندی (۱۹۸۹) مفاهیم متغیر آزمون تعمیم‌یافته و p-مقدار تعمیم‌یافته را برای انجام آزمون فرض هنگامی که پارامتر مزاحم وجود دارد، تعریف کردند. هم‌چنین، مفاهیم کمیت محوری تعمیم‌یافته و فاصلهٔ اطمینان تعمیم‌یافته به‌وسیلهٔ ویراهاندی (۱۹۹۳) معرفی شدند. در ادامه این مفاهیم به اختصار آورده شده‌اند و خوانندگان برای جزئیات بیش‌تر می‌توانند به ویراهاندی (۱۹۹۵) مراجعه کنند.

فرض کنید $\boldsymbol{X}$ یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x;\boldsymbol{\zeta})$ است که $\boldsymbol{\zeta}=(\tau,\boldsymbol{\eta})$ یک بردار از پارامترهای مجهول در فضای پارامتری است که در آن τ پارامتر مورد علاقه و $\boldsymbol{\eta}$ برداری از پارامترهای مزاحم است. $\boldsymbol{x}$ را مقدار مشاهده شده $\boldsymbol{X}$ در نظر بگیرید. متغیر $T(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x};\tau_0,\boldsymbol{\eta})$ را یک متغیر آزمون تعمیم‌یافته برای τ می‌نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) مقدار $t^*=T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x};\tau_0,\boldsymbol{\eta})$ به پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد.

ب) توزیع $T(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x};\tau_0,\boldsymbol{\eta})$ به پارامترهای مزاحم بستگی نداشته باشد.

ج) برای مقادیر ثابت $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{\zeta}$، $T(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta})$ به ازای مقادیر t به‌طور تصادفی یکنوا در τ باشد.

تحت شرایط بالا، اگر توزیع $T(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta})$ به‌طور تصادفی صعودی در τ باشد، p-مقدار تعمیم‌یافته برای آزمون فرض

$$H_0:\tau\le\tau_0 \qquad vs. \qquad H_1:\tau>\tau_0,$$

بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$p=\sup_{H_0}P(T(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta})\ge t^*)=P(T(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x};\tau_0,\boldsymbol{\eta})\ge t^*),$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.12.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.187]

به‌طور مشابه، $T_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta})$ یک کمیت محوری تعمیم‌یافته نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) توزیع $T_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta})$ به پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد.

ب) مقدار مشاهده شده $T_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta})$ به پارامترهای مزاحم بستگی نداشته باشد.

حال اگر c_1 و c_2 دو مقدار باشند که $P(c_1 \le T_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}) \le c_2) = 1 - \alpha$ آن‌گاه مجموعه

$$\{\tau: c_1 \le T_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}; \boldsymbol{\zeta}) \le c_2\}$$

یک فاصلهٔ اطمینان تعمیم‌یافته برای τ است.

در ادامه، یک کمیت محوری تعمیم‌یافته ارائه می‌شود که در بخش بعد و مسئلهٔ تساوی میانگین جامعه‌های لگ‌نرمال چندمتغیره مفید است.

فرض کنید $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ یک نمونه تصادفی به‌اندازه n از یک جامعه نرمال p-متغیره با میانگین $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ و ماتریس واریانس-کوواریانس $\Sigma = (\sigma_{lj}), l = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p$ است که $n > p$. فرض کنید $\overline{\boldsymbol{X}}$ و S به‌ترتیب میانگین نمونه‌ای و ماتریس مجموع مربعات نمونه‌ای هستند یعنی

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{X}_h, \qquad S = (S_{lj}) = \sum_{h=1}^{n} (\boldsymbol{X}_h - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_h - \overline{\boldsymbol{X}})'.$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که $\overline{\boldsymbol{X}}$ و S از یک‌دیگر مستقل هستند و

$$\overline{\boldsymbol{X}} \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma\right), \qquad S \sim W_p\left(n-1, \frac{1}{n-1}\Sigma\right),$$

که $W_p(r, \Sigma)$ نشان‌دهندهٔ توزیع ویشارت p-متغیره با r درجهٔ آزادی و پارامتر مقیاس Σ است.

ابتدا، یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای Σ ارائه می‌کنیم. با استفاده از تجزیه چولسکی، می‌توان یک ماتریس پایین مثلثی یافت که $\Sigma = \Lambda\Lambda'$. فرض کنید A تجزیه چولسکی ماتریس S است به‌گونه‌ای که $S = AA'$. هم‌چنین، فرض کنید $B = (B_{lj}) = \Lambda^{-1}A$ آن‌گاه

$$BB' = \Lambda^{-1}A(\Lambda^{-1}A)' = \Lambda^{-1}S\Lambda'^{-1} \sim W_p(n-1, I_p).$$

بنابراین، B یک ماتریس پایین مثلثی است و B_{lj} ها از یک‌دیگر مستقل هستند [۱۳] و

$$B_{ll}^2 \sim \chi^2_{(n-l)}, \qquad B_{lj} \sim N(0,1), \quad l > j.$$

فرض کنید s و a به‌ترتیب مقدار مشاهده شده S و A هستند. در این‌صورت،

$$V = (V_{lj}) = aB^{-1}B'^{-1}a' = aA^{-1}\Sigma A'^{-1}a',$$

یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای Σ است چون توزیع V به پارامتر مجهول بستگی ندارد و مقدار مشاهده شده آن برابر با Σ است. در نتیجه، V_{lj} نیز یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای σ_{ij} خواهند بود. هم‌چنین، به‌ازای $l \ge j$، کمیت $U = (u_{lj}) = aB^{-1} = aA^{-1}\Lambda$ یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای $\Lambda = (\lambda_{lj})$ است. لازم به ذکر است U یک ماتریس پایین مثلثی است.

حال یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای $\boldsymbol{\mu}$ ارائه می‌کنیم. فرض کنید $\overline{\boldsymbol{x}}$ مقدار مشاهده‌شده $\overline{\boldsymbol{X}}$ است. از آن‌جاکه

$$\boldsymbol{Z} = \sqrt{n}\Lambda^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu})$$

دارای توزیع نرمال p-متغیره با میانگین $\boldsymbol{0}$ و ماتریس واریانس- کوواریانس I_p است پس

$$\boldsymbol{T_\mu} = \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{aB^{-1}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{Z} = \overline{\boldsymbol{x}} - aA^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}),$$

یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای $\boldsymbol{\mu}$ است. فرض کنید $\boldsymbol{T_\sigma} = (\sqrt{V_{11}}, \dots, \sqrt{V_{PP}})'$. در این صورت

$$\boldsymbol{T_\theta} = \boldsymbol{T_\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_\sigma, \tag{۱}$$

یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای $\boldsymbol{\theta} = \left(\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1, \dots, \mu_p + \frac{1}{2}\sigma_p\right)$ است.

روش پیشنهادی

فرض کنید $\boldsymbol{Y}_{i1}$، ...، $\boldsymbol{Y}_{in_i}$ یک نمونه تصادفی از توزیع لگ‌نرمال چندمتغیره با پارامترهای $\boldsymbol{\mu_i}$ و Σ_i است که

$$\boldsymbol{\mu_i} = \left(\mu_{i1}, \dots, \mu_{ip}\right)', \qquad \Sigma_i = \left[\sigma_{i,st}\right], \quad i = 1, \dots, k.$$

مسئلهٔ مورد نظر ما آزمون تساوی میانگین‌های این k جامعه لگ‌نرمال است یعنی آزمون فرض

$$H_0: \boldsymbol{\eta}_1 = \dots = \boldsymbol{\eta}_k, \tag{۲}$$

که $\boldsymbol{\eta}_i = \log(\boldsymbol{\theta_i})$، $\boldsymbol{\theta_i} = \boldsymbol{\mu_i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_i}$، $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i,11}, \dots, \sigma_{i,pp})'$ و

$$\log(\boldsymbol{\theta_i}) = (\log(\theta_{i1}), \dots, \log(\theta_i p)).$$

آزمون فرض در (۲) معادل با آزمون فرض زیر است:

$$H_0: H\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}, \quad vs. \quad H_1: H\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{0},$$

که $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1', \dots, \boldsymbol{\theta}_k')'$ بردار میانگین‌ها است و با در کنار هم قراردادن بردارهای میانگین‌های k جامعه در یک بردار ستونی حاصل می‌شود و H یک ماتریس $(k-1)p \times kp$ است با رتبهٔ $(k-1)p$ که بدین‌صورت است:

$$H = Q \otimes I_p,$$

با $Q = [I_{k-1} : -\boldsymbol{1}_{k-1}]$ که I_{k-1} نشان‌دهندهٔ ماتریس همانی از اندازهٔ $k-1$، و $\boldsymbol{1}_{k-1}$ نشان‌دهندهٔ بردار واحد با بعد $k-1$ است و $\otimes$ نشان‌دهندهٔ عملگر ضرب کرونکر است.

یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای $\boldsymbol{\theta}_i$ بدین‌صورت است:

$$\boldsymbol{T}_i = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\mu}_i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}_i}, \tag{۳}$$

که بر اساس (۱) برای i امین جامعه به‌دست می‌آید. بنابراین به سادگی می‌توان یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای $H\boldsymbol{\theta}$ به‌صورت (۴) به‌دست آورد:

$$\boldsymbol{T}^* = H(\boldsymbol{T}_1', \dots, \boldsymbol{T}_k')', \tag{۴}$$

فرض کنید مقادیر $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}^*}$ و $\Sigma_{\boldsymbol{T}^*}$ به‌ترتیب میانگین و ماتریس واریانس-کوواریانس T^* هستند، و هم‌چنین استاندارد شدهٔ $\boldsymbol{T}^*$ به‌صورت $\widetilde{\boldsymbol{T}}^* = \Sigma_{\boldsymbol{T}^*}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{T}^* - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}^*})$ تعریف می‌شود. مقدار مشاهده شده $\widetilde{\boldsymbol{T}}^*$ برابر است با:

$$\tilde{\boldsymbol{t}}^* = \Sigma_{\boldsymbol{T}^*}^{-\frac{1}{2}}(H\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}^*}).$$

بنابراین p-مقدار تعمیم‌یافته برای آزمون (۲) بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$p = P\left(\left\|\widetilde{\boldsymbol{T}}^*\right\|^2 > \|\tilde{\boldsymbol{t}}^*\|^2 \middle| H_0\right) = P\left((\boldsymbol{T}^* - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}^*})'\Sigma_{\boldsymbol{T}^*}^{-1}(\boldsymbol{T}^* - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}^*}) > \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{T}^*}'\Sigma_{\boldsymbol{T}^*}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{T^*}\right).$$

فرض صفر رد می‌شود اگر p کم‌تر از α باشد. برای محاسبه این p-مقدار می‌توان از الگوریتم زیر استفاده کرد.

الگوریتم: برای n_i، $\overline{\boldsymbol{x}}_i$ و S_i ($i = 1, \dots, k$) داده شده،

۱. $\boldsymbol{T}_i$ را بر اساس (۳) با شبیه‌سازی کردن بەدست می‌آوریم و $\boldsymbol{T}^*$ در (۴) را محاسبه می‌کنیم.

۲. گام اول را M بار تکرار کرده و مقدار محاسبه شده $\boldsymbol{T}^*$ را $\boldsymbol{T}_1^*, \dots, \boldsymbol{T}_M^*$ می‌نامیم.

۳. $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{T^*} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{T}_m^*$ و $\widehat{\Sigma}_{T^*} = \frac{1}{M-1}\sum_{m=1}^{M}(\boldsymbol{T}_m^* - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{T^*})(\boldsymbol{T}_m^* - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{T^*})'$ را بەدست می‌آوریم.

۴. $\left\|\widehat{\widetilde{\boldsymbol{T}}}^*\right\|_m^2 = (\boldsymbol{T}_m^* - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{T^*})'\,\widehat{\Sigma}_{T^*}^{-1}(\boldsymbol{T}_m^* - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{T^*})$ و $\left\|\widehat{\widetilde{\boldsymbol{t}}}^*\right\|^2 = (\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{T^*})'\,\widehat{\Sigma}_{T^*}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{T^*})$ را محاسبه می‌کنیم.

۵. اگر $\left\|\widehat{\widetilde{\boldsymbol{t}}}^*\right\|^2 \geq \left\|\widehat{\widetilde{\boldsymbol{T}}}^*\right\|_m^2$، فرض کنید که $\tau_l = 1$ در غیر این‌صورت $\tau_l = 0$.

۶. در نهایت p-مقدار تعمیم‌یافته برای آزمون (۲) برابر است با $\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\tau_l$.

تذکر: اگر $q_{\left\{\left\|\widehat{\widetilde{\boldsymbol{T}}}^*\right\|_m^2;1-\alpha\right\}}$ را صدک $(1\text{-}\alpha)$۱۰۰ از $\left\|\widehat{\widetilde{\boldsymbol{T}}}^*\right\|_m^2$ در نظر بگیریم، یک ناحیهٔ اطمینان تعمیم‌یافته برای پارامتر $H\boldsymbol{\theta}$ بەدست می‌آید.

شبیه‌سازی

در این بخش به بررسی عملکرد p-مقدار تعمیم‌یافتهٔ ارائه شده (GPV) در بخش ۳ برای آزمون برابری میانگین‌ها در k جامعه لگ‌نرمال چند متغیره با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو می‌پردازیم. هم‌چنین، این روش را با روش آنالیز واریانس چند متغیره (MANOVA) که یک روش کلاسیک برای مقایسه میانگین‌های جوامع چندمتغیره است، مقایسه می‌کنیم. این مقایسه بر اساس اندازهٔ واقعی و توان این دو آزمون در سطح $\alpha = 0.05$ است. بدین‌منظور نمونه‌های تصادفی به حجم n از k جامعه لگ‌نرمال p-متغیره تولید شد. لازم به ذکر است که این نتایج بر اساس ۵۰۰۰ بار شبیه‌سازی حاصل شده است. هم‌چنین برای محاسبه p-مقدار تعمیم‌یافته از الگوریتم ارائه شده با $M = 5000$ استفاده شده است.

برای مقایسهٔ اندازهٔ واقعی آزمون‌ها، ابتدا دو جمعیت لگ‌نرمال سه متغیره با $(1,1,1)'$ = $\boldsymbol{\mu}_i$ ، $\Sigma_i = aI_3$ ($i = 1,2$) و سپس سه جمعیت لگ‌نرمال دو متغیره با $\boldsymbol{\mu}_i = (0,0)'$، $\Sigma_i = aI_2$ ($i = 1,2,3$) در نظر گرفته شد که a یک مقدار ثابت است و با تغییر آن به‌صورت $a = 1,1.5,5$ واریانس‌ها تغییر می‌کنند. نتایج در جدول ۱ آورده شده‌اند و مشاهده می‌شود که اندازهٔ واقعی آزمون هر دو روش MANOVA و GPV بسیار کوچک‌تر از سطح معناداری هستند و اختلاف چندانی با یک‌دیگر ندارند. هم‌چنین مقدار واقعی آزمون‌ها به اندازهٔ نمونه بستگی ندارند.

برای مقایسهٔ توان آزمون‌ها، ابتدا دو جمعیت لگ‌نرمال دو متغیره با $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = (0,0)'$، $\Sigma_1 = I_2$ و $\Sigma_2 = \mathrm{diag}(u_1, u_2)$، دو جمعیت لگ‌نرمال سه متغیره با $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = (0.5,0.5,0.5)'$، $\Sigma_1 = I_3$، $\Sigma_2 = \mathrm{diag}(u_1, u_2, u_3)$، دو جمعیت لگ‌نرمال شش متغیره با $(1,1,1و1و1و1)'$ = $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$، $\Sigma_1 = I_6$، $\Sigma_2 = \mathrm{diag}(u_1, \dots, u_6)$ و سرانجام سه جمعیت لگ‌نرمال دو متغیره با $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_3 = (0,0)'$، $\Sigma_1 = I_2$، $\Sigma_2 = \mathrm{diag}(1,1.5)$ و $\Sigma_3 = \mathrm{diag}(u_1, u_2)$ در نظر گرفته شدند. نتایج در جدول‌های ۲ و ۳ آورده شده‌اند. چنان‌که مشاهده می‌شود در نمونه‌های کوچک توان روش GPV بیش‌تر از توان روش MANOVA است ولی برای نمونه‌های بزرگ چنان‌که انتظار می‌رود هر دو روش یک‌سان عمل می‌کنند.

هم‌چنین احتمال پوشش با استفاده از روش‌های GPV و MANOVA با ضریب اطمینان ۰/۹۵ و با ۵۰۰۰ تکرار

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.12.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.187]

مقایسه شدند. به این منظور احتمال پوشش برای مقایسهٔ میانگین دو جامعه لگ‌نرمال دو متغیره با $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = (0,0)'$، $\Sigma_1 = I_2$، $\Sigma_2 = \mathrm{diag}(1,5)$ با اندازهٔ نمونه‌های مختلف به‌دست آورده و نتایج در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱ می‌توان نتیجه گرفت که به‌طورکلی روش GPV بهتر از روش MANOVA است، به‌ویژه زمانی که اندازهٔ نمونه کوچک است.

جدول ۱. اندازه واقعی آزمون‌ها در سطح ۰/۰۵

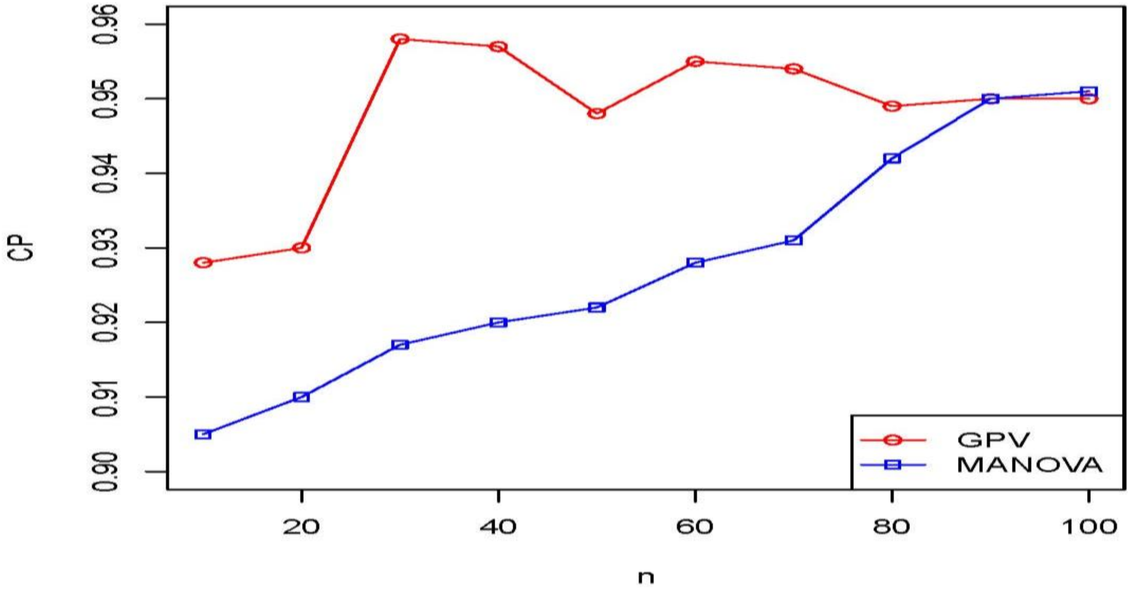
		$p=3$		$p=2$	
		GPV	MANOVA	GPV	MANOVA
۱۰	۱/۰	۰/۰۱۹	۰/۰۱۰	۰/۰۱۸	۰/۰۱۹
	۱/۵	۰/۰۱۹	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸	۰/۰۱۷
	۵/۰	۰/۰۲۰	۰/۰۱۹	۰/۰۲۰	۰/۰۱۵
۲۵	۱/۰	۰/۰۲۲	۰/۰۲۱	۰/۰۳۷	۰/۰۲۹
	۱/۵	۰/۰۲۳	۰/۰۲۵	۰/۰۳۳	۰/۰۳۰
	۵/۰	۰/۰۱۹	۰/۰۲۰	۰/۰۳۲	۰/۰۳۵
۵۰	۱/۰	۰/۰۲۱	۰/۰۲۰	۰/۰۲۰	۰/۰۲۹
	۱/۵	۰/۰۲۲	۰/۰۲۵	۰/۰۲۶	۰/۰۲۱
	۵/۰	۰/۰۲۰	۰/۰۲	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸
۱۰۰	۱/۰	۰/۰۱۹	۰/۰۲۹	۰/۰۲۲	۰/۰۱۹
	۱/۵	۰/۰۲۳	۰/۰۱۹	۰/۰۲۵	۰/۰۲۳
	۵/۰	۰/۰۲۳	۰/۰۱۶	۰/۰۲۱	۰/۰۲۲

جدول ۲. توان آزمون‌ها برای $k = 2$

	$p=2$			$p=3$			$p=6$		
	$u_1, \ldots, u_p$	GPV	MANOVA	$u_1, \ldots, u_p$	GPV	MANOVA	$u_1, \ldots, u_p$	GPV	MANOVA
۱۰	۰،۱/۵	۰/۵۸۰	۰/۴۵۸	۱،۱/۰،۵/۵	۰/۵۵۰	۰/۴۵۸	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۰،۵/۵	۰/۴۵۸	۰/۴۰۱
	۱،۱	۰/۶۰۷	۰/۴۶۲	۱،۱/۱،۵	۰/۵۴۹	۰/۴۷۷	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۱،۵	۰/۴۹۷	۰/۴۲۵
	۱،۵	۰/۶۵۶	۰/۴۹۱	۱،۱/۵،۵	۰/۵۴۳	۰/۴۷۹	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۵،۵	۰/۵۰۱	۰/۴۷۵
۲۵	۰،۱/۵	۰/۸۳۶	۰/۷۸۸	۱،۱/۰،۵/۵	۰/۷۸۰	۰/۵۸۵	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۰،۵/۵	۰/۶۷۹	۰/۵۰۱
	۱،۱	۰/۸۰۱	۰/۷۰۶	۱،۱/۱،۵	۰/۷۹۰	۰/۶۲۰	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۱،۵	۰/۶۷۶	۰/۵۵۶
	۱،۵	۰/۸۱۹	۰/۸۰۰	۱،۱/۵،۵	۰/۷۶۴	۰/۶۶۱	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۵،۵	۰/۸۰۳	۰/۵۸۹
۵۰	۰،۱/۵	۰/۸۷۹	۰/۸۰۱	۱،۱/۰،۵/۵	۰/۹۱۲	۰/۷۹۹	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۰،۵/۵	۰/۶۸۱	۰/۶۴۹
	۱،۱	۰/۹۱۷	۰/۸۹۰	۱،۱/۱،۵	۰/۹۳۰	۰/۸۳۲	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۱،۵	۰/۷۳۹	۰/۶۹۸
	۱،۵	۰/۸۹۴	۰/۸۷۷	۱،۱/۵،۵	۰/۹۲۸	۰/۸۹۹	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۵،۵	۰/۸۰۵	۰/۷۵۱
۱۰۰	۰،۱/۵	۰/۹۴۹	۰/۹۵۱	۱،۱/۰،۵/۵	۰/۹۳۵	۰/۹۳۷	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۰،۵/۵	۰/۹۰۱	۰/۸۸۹
	۱،۱	۰/۹۳۷	۰/۹۳۵	۱،۱/۱،۵	۰/۹۳۴	۰/۹۴۴	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۱،۵	۰/۸۹۹	۰/۸۹۱
	۱،۵	۰/۹۳۴	۰/۹۴۸	۱،۱/۵،۵	۰/۹۳۶	۰/۹۲۸	۱،۱،۱/۱،۵/۱،۵/۵،۵	۰/۹۱۸	۰/۹۲۰

جدول ۳. توان آزمون‌ها برای $k = 3$

n	u_1, u_2	GPV	MANOVA
۱۰	(۰،۱/۵)	۰/۸۰۷	۰/۷۵۵
	(۵،۱)	۰/۸۱۰	۰/۷۸۰
۲۰	(۰،۱/۵)	۰/۹۵۹	۰/۸۹۱
	(۵،۱)	۰/۹۶۰	۰/۹۰۱
۵۰	(۰،۱/۵)	۰/۹۸۶	۰/۹۷۵
	(۵،۱)	۰/۹۹۳	۰/۹۸۹
۱۰۰	(۰،۱/۵)	۰/۹۹۴	۰/۹۹۰
	(۵،۱)	۰/۹۹۶	۰/۹۹۵



شکل ۱. احتمال‌های پوشش برای $k = 2$

مثال واقعی

داده‌های این مثال به‌وسیلهٔ مولر (۱۹۶۲) جمع‌آوری شده است و مربوط به مقایسهٔ سطح اسید چرب آزاد پلاسمای خون برای دو جامعه مستقل، قبل از تزریق انسولین و در زمان‌های ۱۵، ۳۰ و ۴۵ دقیقه بعد از تزریق انسولین است. آمار توصیفی برای نمونه‌های ۱۰تایی از این دو جامعه بدین‌صورت هستند:

$$\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{pmatrix} \text{۳/۴۵} \\ \text{۳/۳۰} \\ \text{۳/۲۳} \\ \text{۳/۱۰} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} \text{/۰۲۹} & \text{/۰۱۹} & \text{/۰۱۲} & \text{/۰۲۵} \\ & \text{/۰۵۹} & \text{/۰۰۴} & \text{/۰۲۹} \\ & & \text{/۰۶۲} & \text{/۰۴۶} \\ & & & \text{/۱۵۸} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{pmatrix} \text{۳/۵۲} \\ \text{۳/۳۶} \\ \text{۳/۳۵} \\ \text{۳/۴۹} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} \text{/۰۷۴} & \text{/۰۴۴} & -\text{۰/۰۰۱} & -\text{۰/۰۰۱} \\ & \text{/۱۱۰} & \text{/۰۵۹} & \text{/۰۶۱} \\ & & \text{/۰۸۱} & \text{/۰۶۶} \\ & & & \text{/۰۹۴} \end{pmatrix}.$$

مسئلهٔ مورد توجه در این‌جا این است که آیا میانگین سطح اسید چرب آزاد پلاسمای خون دو جامعه با یک‌دیگر برابر هستند یا خیر؟ بررسی‌ها نشان می‌دهد که این دو جامعه دارای توزیع لگ‌نرمال چندمتغیره هستند (لین، ۲۰۱۴). بنابراین مسئله در این‌جا مقایسهٔ میانگین‌های دو جامعه لگ‌نرمال چندمتغیره است. با در نظر گرفتن $M =$ ۵۰۰۰، p-مقدار برای روش تعمیم‌یافته و MANOVA به‌ترتیب برابر با ۰/۶۸۵ و ۰/۳۰۲ به‌دست آمد که نشان می‌دهد فرض

برابری میانگین‌ها به‌وسیلهٔ هر دو آزمون رد نمی‌شود.

نتیجه‌گیری

روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته (GPV) برای آزمون برابری میانگین‌ها در جوامع لگ‌نرمال چند متغیره به‌کار گرفته شد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان داد که این روش دارای اندازهٔ آزمون نزدیک به سطح معنی‌داری است و همانند روش MANOVA عمل می‌کند. توان آزمون روش GPV بهتر از روش MANOVA است زیرا مقدار بیش‌تری به خود اختصاص داده است. هم‌چنین احتمال پوشش روش GPV به‌دلیل نزدیک بودن مقادیر به سطح ۰/۹۵ بهتر از روش MANOVA است (شکل ۱). بنابراین زمانی که ماتریس‌های واریانس-کوواریانس برابر نیستند روش MANOVA ضعیف عمل کرده و می‌توان از روش GPV استفاده کرد.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم که با پیشنهادات ارزنده خود به غنای این مقاله افزودند سپاسگزاریم. هم‌چنین این پژوهش با استفاده از کمک‌های مالی معاونت پژوهشی دانشگاه گلستان در قالب طرح تحقیقاتی شماره ۱۱۳۶ انجام شده است که بدین‌وسیله از این معاونت تشکر و قدردانی می‌شود.

منابع

۱. آقادوست صبا، عبداله‌نژاد کامل، یغمایی فرهاد، جعفری علی‌اکبر، "مقایسهٔ چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگ نرمال"، مجلهٔ علوم آماری، ۹(۱) (۱۳۹۴) ۱-۱۴.

2. Abdollahnezhad K., Babanezhad M., Jafari A. A., "Inference on Difference of Means of two Log-Normal Distributions: A Generalized Approach", Journal of Statistical and Econometric Methods, 1(2) (2012) 125-131.

3. Bebu I., Mathew T., "Comparing the means and variances of a bivariate log-normal distribution", Statistics in Medicine, **27** (14) (2008) 2684-2696.

4. Chen Y. H., Zhou X. H., "Interval estimates for the ratio and difference of two lognormal means", Statistics in Medicine, 25 (23) (2006) 4099-4113.

5. Gupta R. C., Li X., "Statistical inference for the common mean of two lognormal distributions and some applications in reliability", Computational Statistics and Data Analysis, 50 (11) (2006) 3141-3164.

6. Jafari A. A., Abdollahnezhad K., "Inferences on the means of two lognormal distributions; a computational approach test", Communications in Statistics-Simulation and Computation, 44 (7) (2015) 1659-1672.

7. Jafari A. A., Abdollahnezhad K., "Testing the equality means of several log-normal distributions", Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46 (3) (2017) 2311-2320.
8. Krishnamoorthy K., Mathew T., "Inferences on the means of lognormal distributions using generalized p-values and generalized confidence intervals", Journal of Statistical Planning and Inference, 115 (1) (2003) 103-121.
9. Li X., "A generalized p-value approach for comparing the means of several log-normal populations", Statistics & Probability Letters, 79 (11) (2009)1404-1408.
10. Lin, S. H., "Comparing the mean vectors of two independent multivariate lognormal distributions", Journal of Applied Statistics, 41 (2) (2014) 259-274.
11. Lin S. H., Wang R. S., "Modified method on the means for several lognormal distributions", Journal of Applied Statistics, 40 (1) (2013) 194-208.
12. Muirhead R. J., "Aspects of Multivariate Statistical Theory", Wiley, New York (1982).
13. Mueller P. S., "Plasma free fatty acid response to insulin in schizophrenia", Archives of General Psychiatry, 7 (2) (1962) 140-146.
14. Soltani A. R., Abdollahnezhad K., "Testing the log-normal mean: comparison of four test methods", Journal of Applied Probability and Statistics, 8 (1) (2013) 1-10.
15. Taylor D. J., Kupper L. L., Muller K. E., "Improved approximate confidence intervals for the mean of a log-normal random variable", Statistics in Medicine, 21 (10) (2002) 1443-1459.
16. Tsui K. W., Weerahandi S., "Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters", Journal of the American Statistical Association, 84 (406) (1989) 602-607.
17. Weerahandi S., "Generalized confidence intervals", Journal of the American Statistical Association, 88 (423) (1993) 899-905.
18. Weerahandi S., "Exact Statistical Methods for Data Analysis", Springer Verlag, New York (1995).
19. Wu J., Jiang G., Wong A. C., Sun X., "Likelihood analysis for the ratio of means of two independent log-normal distributions", Biometrics, 58 (2) (2002) 463-469.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.12.6]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.187]

20. Wu J., Wong A., Jiang G., "Likelihood-based confidence intervals for a log-normal mean", Statistics in Medicine, 22 (11) (2003) 1849-1860.

21. Zhou X. H., Gao S., "Confidence intervals for the log-normal mean", Statistics in Medicine, 16 (7) (1997) 783-790.

22. Zhou X. H., Gao S., Hui S. L., "Methods for comparing the means of two independent log-normal samples", Biometrics, 53 (3) (1997) 1129-1135.

23. Zhou X. H., Li C., Gao S., "Tierney, W. M., "Methods for testing equality of means of health care costs in a paired design study", Statistics in Medicine, 20 (11) (2001) 1703-1720.