

خمینه‌های تخت با ابعاد پایین با رده‌هایی از مترهای فینسلری

سیده صدیقه علوی اندراجمی، مهدی رفیعی‌راد*
دانشگاه مازندران، دانشکده، علوم ریاضی، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۹/۱۳ پذیرش ۹۷/۱۰/۲۴

چکیده

منیفلدهای ریمانی موضعاً مسطح، تا حد ایزومتري، خارج قسمت فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n بر یک گروه بیبرباخ Γ است و رده‌بندی دقیقی از آنها در ابعاد ۲ و ۳ وجود دارد. در این مقاله، دو رده از خمینه‌های فینسلری موضعاً مسطح دوبعدی و سه‌بعدی را بررسی کرده و رده‌بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: متر ریشه چهارم، خمینه تخت دوبعدی، ایزومتري، گروه بیبرباخ، متر راندرز

مقدمه

یک خمینه ریمانی n -بعدی M همراه با متر ریمانی $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ موضعاً تخت^۱ (یا موضعاً اقلیدسی^۲) نامیده می‌شود هرگاه حول هر نقطه از آن، دستگاه مختصاتی وجود داشته باشد که در آن ضرایب a_{ij} به x بستگی نداشته باشند. قضیه‌ای کلاسیک بیان می‌کند که یک خمینه ریمانی، تخت است اگر و تنها اگر انحنای برشی^۳ آن مساوی صفر باشد. پوشش جهانی^۴ یک خمینه ریمانی تخت و کامل^۵ عبارت است از فضای اقلیدسی^۶ \mathbb{R}^n . بیبرباخ^۷ ثابت کرد که خمینه‌های فشرده^۸ ریمانی تخت، به صورت خارج قسمت^۹ $\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ هستند که در آن Γ یک زیرگروه گسسته^{۱۰}، هم‌فشرده^{۱۱} و بدون تاب^{۱۲} گروه اقلیدسی^{۱۳}، یعنی گروه $E(n) = O(n) \times \mathbb{R}^n$ است. در بعد ۱، تنها خمینه‌های کامل موضعاً تخت و هم‌بند^{۱۴} عبارتند از صفحه^{۱۵}، استوانه^{۱۶}، نوار موبیوس^{۱۷}، چنبره^{۱۸} و بطری کلاین^۱. در بعد ۲، تنها خمینه‌های کامل تخت و هم‌بند^{۱۴} عبارتند از صفحه^{۱۵}، استوانه^{۱۶}، نوار موبیوس^{۱۷}، چنبره^{۱۸} و بطری کلاین^۱. در بعد ۳، تنها ۱۰ خمینه ریمانی کامل تخت و هم‌بند وجود دارند که ۶ تای آنها جهت‌پذیر و مابقی جهت‌ناپذیرند [۸].

*نویسنده مسئول rafie-rad@umz.ac.ir

1. Locally flat
2. Locally Euclidean
3. Sectional curvature
4. Universal covering
5. Complete
6. Euclidean space
7. Bieberbach
8. Compact manifolds
9. Quotient
10. Discrete subgroup
11. Cocompact
12. Torsion free
13. Euclidean group
14. Connected
15. Plane
16. Cylinder
17. Möbius band
18. Torus

یک خمینه فینسلری n -بعدی M همراه با متر فینسلری

$$\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} F(x, y) = \sqrt{g_{ij}(x, y)y^i y^j}$$

تخت^۲ (یا موضعاً مینکوفسکی^۳) نامیده می‌شود هرگاه حول هر نقطه از آن، دستگاه مختصاتی وجود داشته باشد که در آن ضرایب g_{ij} ، به x بستگی نداشته باشند. هرگاه یک خمینه فینسلری تخت باشد آن‌گاه انحنا پرچمی آن مساوی با صفر است؛ در حالی که عکس آن ممکن است برقرار نباشد. مثال (۱):

مثال ۱. [۶] اگر $a \in \mathbb{R}^n$ که $|a| < 1$ یک بردار ثابت دلخواه باشد. متر فینسلری زیر تصویری تخت (یعنی به‌طور موضعی ژئودزی‌هایش خط راستند)، با انحنا پرچمی صفر دارد $K = 0$.

$$F = \frac{[(1 + \langle a, x \rangle)(\langle x, y \rangle + \sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}) + (1 - |x|^2)\langle a, y \rangle]^2}{(1 - |x|^2)^2 \sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}$$

که متریکش یک تعمیم مستقیم از مثال مشهور بروالد است.

در این مقاله ابتدا لم ۲ را ثابت می‌کنیم:

لم ۲. در فضای \mathbb{R}^2 حاصل از متر ریشه چهارم تنها دو زیرگروه ایزومتري، بیبرباخ هستند.

سپس در ابعاد ۲ و ۳ قضیه ۳ را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۳. الف) در بعد ۲، تنها خمینه راندرزی فشرده موضعاً تخت و هم‌بند عبارت است از چنبره \mathbb{T}^2 .

ب) در بعد ۳، تنها خمینه راندرزی فشرده موضعاً تخت و هم‌بند عبارت است از چنبره \mathbb{T}^3 .

با شناسایی ساختار گروه‌های ایزومتري در ابعاد ۲ و ۳ و نمایش آنها به کمک ماتریس‌های از مرتبه ۳ که با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل گروه می‌دهند، سعی می‌کنیم به زیرگروه‌های گسسته و بدون تاب توجه کنیم.

ماتریس‌ها و ساخت گروه‌های بیبرباخ با متر متقارن

تعریف ۴. یک زیرگروه گسسته و هم-فشرده از گروه ایزومتري‌های فضای اقلیدسی را یک گروه کریستالوگرافی می‌نامند.

تعریف ۵. یک زیر گروه کریستالوگرافی بدون تاب را گروه بیبرباخ می‌نامند.

یادآوری ۱. یک زیرگروه ایزومتري $\Gamma \subseteq E(n)$ هم-فشرده (یا یونیفرم^۴) است، هرگاه فضای خارج قسمتی $\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ (یا $\frac{E(n)}{\Gamma}$) فشرده باشد ([۴] و [۷] را ببینید).

بیبرباخ گروه‌های کریستالوگرافی از بعد دلخواه را بررسی کرد. به‌ویژه قضایای زیر را اثبات کرد:

۱. هر گروه کریستالوگرافی Γ ، شامل n انتقال موازی مستقل خطی است. یعنی گروه G حاصل از تبدیلات خطی Γ متناهی است.

۲. دو گروه کریستالوگرافی هم‌ارزند، اگر و تنها اگر به مفهوم جبر مجرد یکریخت باشند.

۳. در هر بعد n -به تقریب ایزومتري- تعدادی متناهی گروه کریستالوگرافی از آن بعد وجود دارند. (که پاسخی برای

۱۱۸مین مسئله هیلبرت است.)

تعریف ۶. اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک نگاشت و d متری دلخواه روی \mathbb{R}^2 باشد آن‌گاه در صورت برقراری شرط:

1. Klein bottle
2. Flat
3. Locally Minkowski
4. Uniform

$d(x, y) = d(f(x), f(y))$ را یک ایزومتري روی \mathbb{R}^2 می نامیم.

در ادامه، ابتدا \mathbb{R}^2 را با متر ریشه چهارم در نظر می گیریم. توپولوژی مورد نظر همان توپولوژی تولید شده به وسیله پایه حاصل از گوی های باز این متر است:

$$U(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, y) < \delta\} = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt[4]{(x_1 - y_1)^4 + (x_2 - y_2)^4} < \delta\right\}$$

البته توجه داریم که این متر در واقع می تواند حاصل این نرم روی \mathbb{R}^2 باشد:

$$\begin{cases} \|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \|x\| = \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4} \\ d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ d(x, y) = \|x - y\| \end{cases}$$

در گروه $GL(2, \mathbb{R})$ به سراغ زیرگروهی می رویم که درآیه های آن از مجموعه $M = \{-1, 0, 1\}$ انتخاب شوند. طبیعی است که ۸۱ ماتریس متفاوت با این درآیه ها می توان ساخت که در میان آنها یک ماتریس با درآیه های تمام صفر، ۸ ماتریس با داشتن ۳ درآیه صفر، ۱۶ ماتریس با داشتن یک سطر یا یک ستون صفر، ۴ ماتریس با داشتن ۴ درآیه غیرصفر اما داشتن دو سطر یا ستون یکسان، دترمینانی برابر صفر دارند که مانع عضویت زیرگروه مورد نظر هستند. ۵۲ ماتریس باقی مانده را در نظر می گیریم. از سوی دیگر برای آن که خاصیت ایزومتري گروه کنترل شود می توان شرط $\|AX\| = \|X\|$ ، که در آن A ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ است، را کنترل کرد؛ که حاصل این محاسبات هشت ماتریس است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

گروه های ایزومتري حاصل از این ماتریس ها در ترکیب با بردار انتقال دوبعدی که برای راحتی محاسبات در قالب ماتریس مربعی مرتبه ۳ نمایش داده شده اند [۴] در جدول ۱ بررسی شده اند:

اکنون به ساخت فضاهای خارج قسمتی $\frac{E(2)}{\Gamma_i}$ ($i = 1, \dots, 7$) می پردازیم. البته تقریب یکریختی را هم در نظر گرفته از محاسبات اضافی پرهیز می کنیم.

۱. در حالت اول $GP(2) \cong \frac{GP(2) \times \mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^2} \cong \frac{O(2) \times \mathbb{R}^2}{\Gamma_1} \cong \frac{E(2)}{\Gamma_1}$ که چون $GP(2)$ (گروه ماتریس های جای گشت تعمیم یافته) فشرده است، زیر گروه Γ_1 هم فشرده^۱ نامیده می شود [۴]. از سوی دیگر توپولوژی $GP(2)$ با توپولوژی القایی حاصل از همومورف بودن $M(2, \mathbb{R})$ با \mathbb{R}^4 گسسته است. در نتیجه Γ_1 کریستالوگرافی است، حال بنا به جدول ۱ که Γ_1 بدون تاب شناسایی شده است بیبرخ است. که فضای خارج قسمتی حاصل از آن همان چنبره است.

۲. Γ_2 و Γ_7 دو گروه تابدار هستند پس طبیعتاً بیبرخ نخواهند بود.

۳. $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ که همگی گروه هایی یکریخت هستند فضای خارج قسمتی حاصل از آنها همومورف است که یکی برای تعیین ساختار کافی است. فضای خارج قسمتی حاصل آنها بطری کلاین است.

۴. آن چه مطرح شد در واقع لم ۲ را به اثبات رساند.

خمینه های فینسلری

تعریف ۷. [۵]، تابع نامنفی F ، یک نرم مینکوفسکی روی فضای V نامیده می شود اگر این شرایط را داشته باشد:

۱. F روی فضای $V - \{0\}$ از رده C^∞ باشد.

جدول ۱.

ردیف نام زیرگروه	نمایش زیر گروه	زیرگروه ایزومتری $E(2)$ به پیمانه یکرختی تابدار یا بدون تاب
1	$\{I\}$	$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ بدون تاب ($a, b \in \mathbb{R}$)
2	$\{I_{(2)}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$	$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_{(3)} \right\}$ تابدار ($a, b \in \mathbb{R}$)
3	$\{I_{(2)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$	$\Gamma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n \text{ فرد}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ بدون تاب ($a, b \in \mathbb{R}$)
4	$\{I_{(2)}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$	پس بدون تاب Γ_3 یکرخت با Γ_4
5	$\{I_{(2)}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$	$\Gamma_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{n+1}{2}a + \frac{n-1}{2}b \\ 1 & 0 & \frac{n-1}{2}a + \frac{n+1}{2}b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n \text{ فرد}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{n}{2}a + \frac{n}{2}b \\ 0 & 1 & \frac{n}{2}a + \frac{n}{2}b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n \text{ زوج} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ Γ_3 و یکرخت با ($a, b \in \mathbb{R}$) بدون تاب
6	$\{I_{(2)}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$	$\Gamma_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{n+1}{2}a - \frac{n-1}{2}b \\ -1 & 0 & -\frac{n-1}{2}a + \frac{n+1}{2}b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n \text{ فرد}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{n}{2}a - \frac{n}{2}b \\ 0 & 1 & -\frac{n}{2}a + \frac{n}{2}b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n \text{ زوج} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ Γ_3 و یکرخت با ($a, b \in \mathbb{R}$) بدون تاب
7 \leq	$\{I_{(2)}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$	$\Gamma_7 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & a+b \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_{(3)} \right\}$ تابدار ($a, b \in \mathbb{R}$)

۱. F همگن مثبت درجه ۱ باشد.

۲. به ازای هر $y, y \in V - \{0\}$ با تعریف زیر یک نگاشت دو خطی^۲، متقارن^۳ و معین مثبت^۴ روی V باشد:

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(y + su + tv)]|_{s=t=0}$$

دوتایی (V, F) را یک فضای مینکوفسکی^۵ می‌نامیم هرگاه F یک نرم مینکوفسکی روی فضای V باشد. متر القایی از این نرم روی فضای V را متر مینکوفسکی^۶ می‌نامیم و به صورت $d(u, v) = F(v - u)$ ($u, v \in V$) تعریف می‌کنیم.

1. Positively homogenous of order 1
2. Bilinear
3. Symmetric
4. Positive definite
5. Minkowski space
6. Minkowski metric

مثال ۸. [۵]، (نرم راندرز^۱) اگر α یک نرم اقلیدسی و β یک فرمی (ص ۱۸۴، [۱] را ببینید) خطی روی فضای n -بعدی V باشد. نگاشت $F(y) = \alpha(y) + \beta(y)$ در صورتی که $\|\beta\| < 1$ یک نرم مینکوفسکی است؛ که نرم راندرز نامیده می شود.

تعریف ۹. [۵]، یک تابع $F: TM \rightarrow [0, +\infty[$ در صورت داشتن شرایط زیر یک متر فینسلری است:

۱. F روی فضای مماس بدون صفر ($TM - \{0\}$) از هر مرتبه ای مشتق پذیر باشد.
۲. برای هر عضو منیفلد M تحدید تابع F به فضای مماس در آن نقطه ($F|_{T_x M}$) یک نرم مینکوفسکی باشد. گاهی تابع F شرط $F(x, -y) = F(x, y)$ را دارد. در این حالت در واقع حالتی خاص از $F(x, \lambda y) = |\lambda|F(x, y)$ روی داده است، که همگنی مطلق^۲ نامیده می شود. توجه می کنیم که برای مثال نرم راندرز چنین خاصیتی را ندارد [۲].
- مثال ۱۰. فضای راندرزی [۱]**، فرض کنیم (M, a_{ij}) یک منیفلد ریمانی و $w = w_i dx^i$ یک میدان یک فرمی روی M باشد. اگر $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ ، $\beta(x, y) = w_i(x)y^i$ را در نظر بگیریم آن گاه می توانیم متر فینسلری را $F = \alpha + \beta$ معرفی کنیم.

چنین متری را متر راندرزی می نامیم. فضای حاصل از چنین متری در ارائه مدل هندسی نظریه نسبیت کاربرد دارد.

مثال ۱۱. فضای ماتسوموتو^۳ [۱]، فرض کنیم $\alpha\beta$ همانند مثال ۱۰ معرفی شوند. زیر فضایی از TM_0 را، که در آن متر فینسلری به شکل $F(x, y) = \frac{\alpha^2}{\alpha\alpha - \beta\beta}$ معرفی شود، در نظر می گیریم. فضای (M, F) را فضای ماتسوموتو می نامیم.

مثال ۱۲. [۲]، یک دستورالعمل ویژه ساخت خانواده ای از نرم های مینکوفسکی بدین ترتیب است:

$$F(x_1, x_2) = \sqrt{\sqrt{(x_1)^4 + (x_2)^4} + \lambda[(x_1)^2 + (x_2)^2]}$$

که در آن λ هر مقدار ثابت نامنفی می تواند باشد. این نرم از تغییرشکل یا اختلال در متر ریشه چهارم^۴ حاصل می شود. می شود. اگر $\lambda = 0$ تابع F ، که تانسور اصلی^۵ (تانسور متریک) متر درجه چهارم نامیده می شود. به دلیل آن که تحدب تحدب قوی اش در برخی مقادیر غیر صفر نقض می شود نمی تواند نرم مینکوفسکی شود. اما اگر $\lambda > 0$ شرط معین مثبت بودن تامین، و ساختار فینسلری F نرم مینکوفسکی می شود.

فرض کنیم (E, π, N, F) یک کلاف تاری و $f: M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد باشد. کلاف برگردان E به وسیله f روی M را با نماد f^*E نمایش می دهند و بدین صورت تعریف می شود:

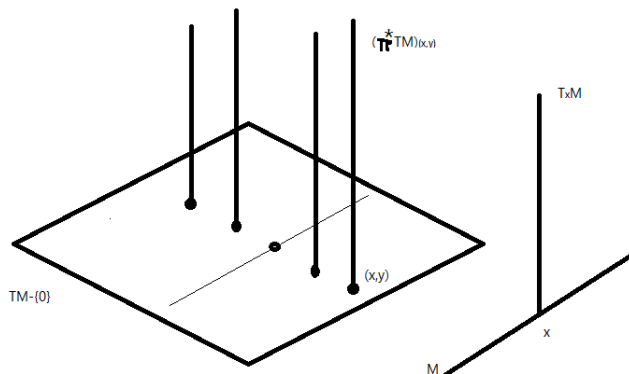
$$f^*E = \{(x, v) \in M \times E \mid f(x) = \pi(v)\}$$

تارهای کلاف برگردان f^*E در نقطه ای مثل b ، نسخه ای از تارهای E به شکل $F_f(b)$ هستند. اگر f^*E را روی مؤلفه اول تصویر کنیم، یک کلاف تاری روی M داریم. اگر این تصویر روی مؤلفه دوم انجام شود این دیاگرام جابه جایی حاصل می شود:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\text{تصویر روی مؤلفه دوم}} & E \\ \downarrow \text{تصویر روی مؤلفه اول} & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

1. Randers norm
2. Absolute homogeneity
3. Matsumoto space
4. Perturbation of the quartic metric
5. Fundamental tensor

آن چه ما از کلاف برگردان انتظار داریم، آنست که در تعریف مذکور، منیفلد M با بعد m باشد، TM همان منیفلد E و با کمک همسایگی باز U حول هر نقطه دلخواه منیفلد M ، منیفلد F را \mathbb{R}^m در نظر بگیریم و π نگاشت تصویر از TM به M باشد که هر $T_pM = \pi^{-1}(p)$ یک تار این کلاف تار باشد. در این صورت کلاف برگردان ما π^*TM خواهد بود که یک کلاف برداری کلاف مماسی سفته $TM - \{0\}$ است. تارهای آن در هر نقطه (x, y) از فضاهای مماس T_pM تشکیل می‌شود (شکل ۱).



تعریف ۱۳. [۵]، فرض کنیم $g_{ij}(y) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}(y)$ و $G^i(y) = \frac{1}{4}g^{ij}(y)\{[F^2]_{x^k y^l}(y)y^k - [F^2]_{x^l y^k}(y)y^k\}$ ، نگاشت موضعی G^i ضرایب ژئودزیک^۱ نامیده می‌شود. این ضرایب یک میدان برداری روی $TM - \{0\}$ بدین صورت تعریف می‌کند:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

که روی $TM - \{0\}$ ، C^∞ و روی بردارهای مماس در TM ، C^1 است. G اسپری القایی^۲ به وسیله F نامیده می‌شود. تعریف ۱۴. [۵]، اگر (M, F) یک فضای فینسلری از بعد n باشد. انحنا^۳ ریمانی^۴ در سوی $T_x M$ یک تبدیل خطی $R_y: T_x M \rightarrow T_x M$ است.

تعریف ۱۵. [۵]، اگر $\{b_i\}_{i=1}^n$ یک پایه دلخواه برای $T_x M$ و $u = u^k b_k \in T_x M$

$$(R^i_k(y) = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}) \left(\begin{array}{l} R_y: T_x M \rightarrow T_x M \\ R_y(u) = R^i_k(y) u^k b_i \end{array} \right)$$

باشند آن گاه انحنا^۳ ریچی را $Ric(y) = \sum_{i=1}^n R^i_j(y)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۶. [۵]، اگر $P \subset T_x M$ یک صفحه مماس و $y \in P - \{0\}$ یک بردار باشد:

$$K(P, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)g_y(y, u)}$$

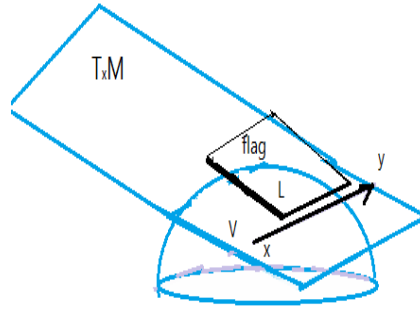
را انحنا^۳ پرچمی می‌نامیم (شکل ۲). اگر انحنا^۳ پرچمی $K(y, P)$ یک مقدار ثابت باشد، می‌گوییم F انحنا^۳ پرچمی ثابت دارد (ص ۳۱۱ [۲] را ببینید).

قضیه ۱۷. (قضیه اکبر-زاده) [۵]، فرض کنیم (M, F) یک منیفلد فینسلری فشرده، همبند و بدون مرز با انحنا^۳ پرچمی ثابت λ باشد.

الف) اگر $\lambda < 0$ آن گاه (M, F) ریمانی است.

1. Geodesic coefficients
2. Spray
3. Riemann curvature
4. direction

(ب) اگر $\lambda = 0$ آن گاه (M, F) تخت (موضعیاً مینکوفسکی) است.



شکل ۲.

تعریف ۱۸. (منیفلدهای فینسلری تخت) منیفلد فینسلری (M, F) موضعیاً تخت (یا موضعیاً مینکوفسکی)^۱ نامیده می شود اگر در هر نقطه $p \in M$ یک دستگاه مختصات موضعی $\mathbb{R}^n \rightarrow U = (x^1, \dots, x^n)$ در M موجود

باشد، به طوری که $\begin{cases} F: \pi^{-1}(U) \rightarrow [0, \infty) \\ (x, y) \mapsto F(x, y) \end{cases}$ مستقل از x باشد.

قضیه ۱۹. الف) منیفلد ریمانی (M, α) موضعیاً تخت است اگر و تنها اگر $K = 0$

ب) اگر منیفلد فینسلری (M, F) تخت باشد، آن گاه $K = 0$

برهان: الف) می دانیم یک خمینه ریمانی، موضعیاً تخت است اگر و تنها اگر موضعیاً اقلیدسی باشد و این یعنی اگر و تنها اگر انحنا ی برشی آن مساوی صفر باشد.

ب) اگر منیفلد فینسلری تخت (موضعیاً مینکوفسکی) باشد، بنا به تعریف ۱۸ مستقل از x است و بنا به تعریف ۱۶ وقتی انحنا ی پرچمی $K(y, P)$ یک مقدار ثابت باشد، می گوییم F انحنا ی پرچمی ثابت دارد که این جا صفر است، یعنی $g_y(\mathbf{R}_y(u), u) = 0$ پس $(\mathbf{R}_y(u), u) = 0$ و این ایجاب می کند که $\mathbf{R}_y(u) = 0$ یعنی انحنا ی ریچی صفر است.

ماتریس ها و ساخت گروه های بیبرباخ با متر راندرز

نرم اقلیدسی روی \mathbb{R}^n را با $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ در نظر می گیریم، دوتایی $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ فضای اقلیدسی n -بعدی نامیده می شود. ضرب داخلی روی \mathbb{R}^n را با نماد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نشان داده، و با کمک آن نرم راندرز را روی \mathbb{R}^n بدین صورت تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} F_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ F_v(x) = \|x\| + \langle x, v \rangle \end{cases}$$

شبه متر^۲ حاصل از این نرم روی \mathbb{R}^n عبارت است از:

$$\begin{cases} d_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ d_v(x, y) = F_v(x - y) = \|x - y\| + \langle x - y, v \rangle \end{cases}$$

ساختار توپولوژی استاندارد حاصل از این متر، یعنی توپولوژی تولیدی به وسیله گوی های باز

$$U(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_v(x, y) < \delta\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid F_v(x - y) < \delta\}$$

را روی \mathbb{R}^n اساس بررسی قرار می دهیم. برای یافتن گروه های بیبرباخ احتمالی در این فضا نیاز به زیرگروه های گسسته حاصل از ایزومتري های متر d_v داریم.

1. Locally Minkowski
2. Quasi- metric

لم ۲۰. ایزومتري‌های متر d_v به صورت $\begin{cases} \phi(x) = Ax + b \\ Av = v \end{cases}$ ظاهر می‌شوند.

برهان: خاصیت ایزومتري در این فضا برای یک تبدیل دلخواه $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ معادل است با:

$$d_v(\phi(x), \phi(y)) = d_v(x, y)$$

این موضوع بنا به قضیهٔ مازور-اولام^۱ (ر.ک. [۹]) ایجاب می‌کند،

$$\begin{cases} \phi(x) = Ax + b \\ Av = v \end{cases} \text{ که در آن } b \in \mathbb{R}^2, A \in O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | AA^T = I\},$$

برهان قضیهٔ ۱. ساختار دقیق ماتریس‌های A : (حالت کلی \mathbb{R}^n که در این مرحله حالت $n = 2$ مدنظر است). برای

برقراری شرط ایزومتري که در بالا مطرح شد داریم:

$$\begin{cases} d(\phi(X), \phi(Y)) = d(X, Y) \rightarrow \|\phi(X) - \phi(Y)\| + \langle v, \phi(X) - \phi(Y) \rangle = \|X - Y\| + \langle v, X - Y \rangle \\ d(\phi(Y), \phi(X)) = d(Y, X) \rightarrow \|\phi(Y) - \phi(X)\| - \langle v, \phi(X) - \phi(Y) \rangle = \|X - Y\| - \langle v, X - Y \rangle \\ \leftrightarrow \begin{cases} \|\phi(X) - \phi(Y)\| = \|X - Y\| \rightarrow \phi \in \text{Isom}(\mathbb{E}^n) = O(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(x) = Ax + b, A \in O(n) \\ \langle v, \phi(X) - \phi(Y) \rangle = \langle v, X - Y \rangle \end{cases} \end{cases}$$

برقراری دومین شرط را با شرطی معادل که از محاسبات بالا به دست می‌آید، بررسی می‌کنیم و سپس $n = 2$ فرض می‌شود:

$\langle v, X - Y \rangle = \langle v, AX - AY \rangle \leftrightarrow \langle v, AX \rangle = \langle v, X \rangle \leftrightarrow \langle A^T v, X \rangle = \langle v, X \rangle \leftrightarrow A^T v = v \leftrightarrow Av = v$
 که آخرین شرط با توجه به ساختار گروه‌ها در ستون آخر جدول ۱ ایجاب می‌کند که تنها گروه بیبرباخ حاصل از این گروه‌ها در صورت آزاد بودن بردار v ، همان تبدیل همانی باشد که فضای خارج قسمتی‌اش چنبره است. اما اگر $v = 0$ آن‌گاه متر فینسلری ریمانی بوده و گروه بیبرباخ بعدی به تقریب ایزومتري، فضای خارج قسمتی‌اش بطری کلاین می‌شود.

$$A \in O(2), v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} A \in SO(2) \rightarrow A = I_2 \\ A \notin SO(2) \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \end{cases}$$

(این نتایج از تعریف ماتریس‌های متعامد به دست آمده است.)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} av_1 + bv_2 = v_1 \rightarrow (1-a)v_1 = bv_2 \\ bv_1 - av_2 = v_2 \end{cases}$$

که این شرایط زمانی برآورده می‌شود که بردار v در راستای محور افقی یعنی به صورت $\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ یا موازی محور عمودی یعنی $\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$ باشد تا به ترتیب از ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بتوان استفاده کرد. که البته با توجه به جدول ۱ گروه تولیدی این دو ماتریس تابدار است و نمی‌تواند بیبرباخ شود.

اکنون فضای سه‌بعدی: شرط ایزومتري بودن، ساختار ماتریس A را که 3×3 است به یکی از صورت‌های جدول ۲ تبدیل می‌کند [۷]:

آن‌چه از جدول ۲ و محاسبات موجود در آن حاصل می‌شود آن است که: برای حفظ ده گروه بیبرباخ لازم است تا بردار $v = 0$ باشد یعنی متر فینسلری ریمانی شود. زیرا در تعریف متر راندرز سازندهٔ هندسهٔ فضا، اگر $v \neq 0$ تعداد گروه‌های بیبرباخ کم‌تر از ده خواهد بود. چون هر گروه بیبرباخ موجود در جدول ۲ بخواهد ظاهر شود شرطی بر

مؤلفه‌های v تحمیل می‌کند، برای نمونه در ردیف دوم ماتریس سازنده گروه بدون تاب مورد نظر بردار $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ را

1. Mazur – Ulam theorem

بدون تغییر حفظ می‌کند. در ردیف سوم بردار $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ با شرایط مورد نظر سازگار است. در ردیف چهارم بردار

$v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ قابل استفاده است؛ در حالی که در ردیف نهم باید $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشد که دو ماتریس سازنده گروه آن را حفظ

کنند. پس برآورده شدن همه آنها یعنی بردار $v = 0$.

پس هر خمینه فینسلری تخت، یک خمینه ریمانی تخت است. از سوی دیگر تنها ماتریس A که بتواند هر بردار دلخواه v را حفظ کند ماتریس همانی است. یعنی بند ب) قضیه ۱ به اثبات رسید که: اگر v دلخواه باشد تنها گروه بیبرباخ چنبره است.

جدول ۲

زیرگروه	نمایش زیرگروه	زیرگروه ایزومتری $E(3)$ به پیمانه یک‌ریختی؛ تابدار یا بدون تاب
1) G_1	$\{I\}$	$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 & nb \\ 0 & 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ؛ بدون تاب؛
2) G_2	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(2n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب ($a \in \mathbb{R}$)؛ $Av = v$ ایجاب می‌کند $v = 0$ برقراری شرط
3) G_3	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2n-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2n-1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب ($a, b \in \mathbb{R}$)؛ $Av = v$ ایجاب می‌کند $v = 0$ شرط
4) G_4	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2n-1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ بدون تاب ($a, c \in \mathbb{R}$)؛ $Av = v$ ایجاب می‌کند $v = 0$ شرط
5) $G_3, G_4 \leq G_5$	$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$ $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب ($a \in \mathbb{R}$)؛ $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ برقراری شرط
6) G_6	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(3n-2)}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(3n-1)}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \square \right\}$ $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و بدون تاب ($a \in \square$)؛ $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ برقراری شرط
7) $G_4 \leq G_7$	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_7 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(4n-3)}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(4n-2)}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \square \right\}$ $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب ($a \in \square$)؛ $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ برقراری شرط

$8)G_8$ $\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$		$\Gamma_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (6n-5) \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (6n-4) \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (6n-3) \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (6n-2) \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (6n-1) \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \square \right\}$ <p>$(a \in \square)$ بدون تاب $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ایجاب می کند $A_1 v = v$ برقراری شرط</p>
$9)G_9$ $\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$		$\Gamma_9 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ <p>؛ بدون تاب $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ایجاب می کند $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ برقراری شرط</p>
$10)G_{10}$ $\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$		$\Gamma_{10} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ <p>$(a \in \square)$ ؛ بدون تاب $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ایجاب می کند $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ برقراری شرط</p>

منابع

۱. بیدآباد بهروز، "هندسه منیفلد ۲"، انتشارات دانشگاه امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)، چاپ دوم (بهار ۱۳۹۴).
2. Bao D., Chern S. S., Shen Z., "An Introduction to Riemann-Finsler Geometry", Springer-Verlage, New York, Inc. (2000).
3. Bieberbach L., "Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume II: Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich", *Mathematische Annalen*, 72 (3) (1912) 400-412.
4. Charlap Leonard S., "Bieberbach Groups and Flat Manifolds", Springer-Verlag New York Inc. (1986).
5. Shen Z., "Lectures on Finsler Geometry", World Scientific Publishers (2001).
6. Shen Z., Mo X., Yang Ch., "Some constructions of projectively flat Finsler metrics Science" China in, 49 (5) (2006) 703-714.
7. Szczepański, "Geometry of crystallographic group". Singapore, World Scientific Publishing, (2012).
8. Wolf J., "Spaces of Constant Curvature", 6th ed, AMS Chelsea publishing (2010).
9. Mazur S., Ulam S., "Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriel normés", *C.R. Acad. Sci. Paris*, 194 (1932) 946-948.