

## انرژی لاپلاسیان در گراف‌ها

حمیده آرام<sup>\*</sup>، رعنا خوئیلر<sup>۲</sup>، نسرين ده‌گردی<sup>۳</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوی، مرکز قره ضیاءالدین، خوی، ایران

۲. دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، دانشکده علوم، گروه ریاضی

۳. دانشگاه صنعتی سیرجان، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

پذیرش ۹۸/۰۴/۲۶

دریافت ۹۶/۱۰/۰۵

### چکیده

فرض کنید  $G$  گرافی از مرتبه  $n$  و اندازه  $m$  باشد. اگر  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$  مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان باشند، آن‌گاه انرژی لاپلاسیان گراف  $G$  به صورت

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right|,$$

معرفی می‌شود. در این مقاله بررسی انرژی لاپلاسیان در گراف‌ها را ادامه می‌دهیم و کران‌های جدیدی برای انرژی لاپلاسیان در گراف‌ها به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس لاپلاسیان، مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان، انرژی لاپلاسیان.

### مقدمه

در این مقاله  $G$  گرافی با مجموعه رئوس  $V = V(G)$  و مجموعه یال‌های  $E = E(G)$  است. مرتبه گراف  $G$  را با  $n = |V|$  و اندازه گراف  $G$  را با  $m = |E|$  نشان می‌دهیم. برای رأس  $v$ ، مجموعه رئوسی که با رأس  $v$  مجاورند همسایگی باز رأس  $v$  نامیده شده و با نماد  $N_G(v) = N(v)$  نشان می‌دهیم. هم‌چنین همسایگی بسته رأس  $v$  به صورت  $N_G[v] = N[v] = N(v) \cup \{v\}$  تعریف می‌کنیم. درجه رأس  $v$   $d_G(v) = |N(v)|$  برابر است. هم‌چنین کمینه درجه و بیشینه درجه را به ترتیب با نمادهای  $\delta$  و  $\Delta$  نشان می‌دهیم. منظور از  $K_n$  گراف کامل  $n$  رأسی است (برای اطلاع بیشتر به [۱] مراجعه شود).

ماتریس قطری  $D(G)$  ماتریس مربعی است که عناصر قطر اصلی آن درجه‌های رئوس گراف و بقیه عناصر صفر است. ماتریس  $L(G) = D(G) - A(G)$  ماتریس لاپلاسیان گراف  $G$  نامیده می‌شود که  $A(G)$  ماتریس مجاورت گراف  $G$  است. چون ماتریس متقارن و حقیقی است مقادیر ویژه آن نیز اعداد حقیقی است. فرض کنید  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$  مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان باشند. گوتمن و همکاران (۲۰۰۶)، انرژی لاپلاسیان در گراف  $G$  را بدین صورت معرفی کردند [۵]:

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|,$$

که  $\gamma_i = \mu_i - \frac{2m}{n}$  برای  $i = 1, \dots, n$  [۳]، [۴]، [۶]، [۸]، [۹].

**مشاهده ۱.** [6] فرض کنید  $G$  گرافی از مرتبه  $n$  و اندازه  $m$  باشد. اگر  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 2M \quad \text{آن‌گاه } M = m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( d(v_i) - \frac{2m}{n} \right)^2 \quad (\text{ب})$$

$$D = \prod_{i=1}^n \gamma_i = \det \left( L(G) - \frac{2m}{n} I_n \right) \quad (\text{ج})$$

$$\gamma_1 = \mu_1 - \frac{2m}{n} \geq 1 \quad \text{آن‌گاه } m \geq 1 \quad (\text{د})$$

با استفاده از مشاهده ۱، داریم:

**مشاهده ۲.** فرض کنید  $G$  گرافی از مرتبه  $n$  و اندازه  $m$  و  $\bar{G}$  مکمل گراف  $G$  باشد. اگر  $\bar{\mu}_1 \geq \bar{\mu}_2 \geq \dots \geq \bar{\mu}_n = 0$

مقادیر ویژه  $\bar{G}$  است به طوری که  $\bar{\gamma}_i = \bar{\mu}_i - \frac{2m}{n}$  و  $LE(\bar{G}) = \sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}_i|$ ، آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2 = 2\bar{M},$$

که

$$\bar{M} = M + \frac{n(n-1)}{2} - 2m.$$

در این مقاله از این نتایج مفید استفاده می‌کنیم:

**گزاره ۳.** [۷] فرض کنید اعداد حقیقی نامنفی باشند به طوری که  $\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  و

$$\gamma = \left( \prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}}$$

$$\alpha - \gamma \geq \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i < j} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2,$$

و

$$\alpha - \gamma \leq \frac{1}{N} \sum_{i < j} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2,$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $x_1 = \dots = x_N$

**گزاره ۴.** [۲] فرض کنید  $a_1, \dots, a_n$  و  $b_1, \dots, b_n$  اعداد حقیقی نامنفی باشند. اگر  $p > 1$ ، آن‌گاه

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

در این مقاله بررسی انرژی لاپلاسی در گراف‌ها را ادامه می‌دهیم و کران‌های جدیدی برای انرژی لاپلاسی در

گراف‌ها به دست می‌آوریم.

## نتایج اصلی

گزاره ۵. فرض کنید  $G$  گرافی از مرتبه  $n$  است،  $n_-$  تعداد مقادیر ویژه منفی و  $n_+$  تعداد مقادیر ویژه مثبت آن باشد. بنابراین به ازای  $1 \leq r \leq n$ .

$$-\sqrt{\frac{2M(r-1)}{n(n-r+1)}} \leq \gamma_r \leq \sqrt{\frac{2M(n-r)}{nr}},$$

$$M = 2m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( d(v_i) - \frac{2m}{n} \right)^2$$

که در آن

اثبات: ابتدا سمت راست نامساوی را اثبات می‌کنیم. واضح است که این نامساوی به ازای  $\gamma_r \leq 0$  برقرار است، پس فرض کنید  $\gamma_r > 0$  می‌دانیم

$$\gamma_r^2 = 2M - \sum_{i \neq r, \gamma_i > 0} \gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i < 0} \gamma_i^2.$$

زیرا  $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$  بنابراین عبارت

$$2M - \sum_{i \neq r, \gamma_i > 0} \gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i < 0} \gamma_i^2,$$

زمانی بیشینه مقدار را دارد که  $\gamma_1 = \dots = \gamma_{r-1} = \gamma_r$  و به ازای  $\gamma_t < 0$ ،  $\gamma_t = \frac{-r\gamma_r}{n_-}$  بنابراین

$$\gamma_r \leq \sqrt{\frac{2Mn_-}{r(n_-+r)}}.$$

زیرا  $n_- \leq n - r$  داریم

$$\gamma_r \leq \sqrt{\frac{2M(n-r)}{nr}}.$$

سمت چپ نامساوی به ازای  $\gamma_r \geq 0$  برقرار است، پس فرض کنید  $\gamma_r < 0$  داریم  $\gamma_r^2 = 2M - \sum_{i \neq r, \gamma_i > 0} \gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i < 0} \gamma_i^2$

به طریق مشابه داریم  $\gamma_r^2 \leq \frac{2Mn_+}{(n-r+1)(n-r+n_++1)}$  به دلیل این که  $\gamma_r < 0$  داریم  $\gamma_r \geq -\sqrt{\frac{2Mn_+}{(n-r+1)(n-r+n_++1)}}$  از طرف دیگر، زیرا  $n_+ \leq r - 1$  داریم:

$$\gamma_r \geq -\sqrt{\frac{2M(r-1)}{n(n-r+1)}}.$$

قضیه ۶. فرض کنید  $G$  گرافی از مرتبه  $n$  باشد. در این صورت

$$LE(G) > \sqrt{2M + n(n-1)(|D|)^{\frac{2}{n}} + \frac{8m}{n(n+1)(n-2)} \left(1 - \left(\frac{2M}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}.$$

اثبات: بنابر گزاره ۳، داریم  $\sum_{i < j} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 \geq \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 + \frac{1}{N} (\prod_{i=1}^N x_i)^{\frac{1}{N}}$  با جای گذاری  $(x_1, \dots, x_N) = (|\gamma_1|, |\gamma_2|, \dots, |\gamma_{n-1}|, |\gamma_n|)$  و  $N = \frac{n(n-1)}{2}$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\gamma_i| |\gamma_j| \geq \frac{n(n-1)}{2} \left( \prod_{i=1}^n |\gamma_i| \right)^{\frac{2}{n}} + \frac{2}{(n+1)(n-2)} \sum_{i < j \leq k < l} \left( \sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2.$$

بنابراین

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\gamma_i| |\gamma_j| \geq n(n-1) \left( \prod_{i=1}^n |\gamma_i| \right)^{\frac{2}{n}} + \frac{4}{(n+1)(n-2)} \sum_{i < j \leq k < l} \left( \sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2.$$

طبق گزاره ۵، به ترتیب به‌ازای  $n$  زوج و فرد داریم،  $\gamma_{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{\frac{2M}{n}}$  و  $\gamma_{\frac{n+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{2M(n-1)}{n(n+1)}} < \sqrt{\frac{2M}{n}}$  در نتیجه

$$\gamma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \sqrt{\frac{2M}{n}} \text{ می‌دانیم } \gamma_1 \geq 1 \text{ و } \gamma_n = \frac{-2m}{n} \text{ بنابراین}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j \leq k < l} \left( \sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2 \\ & \geq \sum_{i < j \leq k < l, (i,j) \neq (1,n), (k,l) \neq (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n)} \left( \sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2 \\ & \quad + \left( \sqrt{|\gamma_1| |\gamma_n|} - \sqrt{|\gamma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} | \gamma_n|} \right)^2 \\ & > |\gamma_n| \left( \sqrt{|\gamma_1|} - \sqrt{|\gamma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}|} \right)^2 \\ & \geq \frac{2m}{n} \left( 1 - \left( \frac{2M}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\gamma_i| |\gamma_j| \geq n(n-1) (|D|)^{\frac{2}{n}} + \frac{8m}{n(n+1)(n-2)} \left( 1 - \left( \frac{2M}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2.$$

با افزودن  $\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 2M$  به دو طرف نامساوی مذکور داریم:

$$LE(G)^2 > 2M + n(n-1) (|D|)^{\frac{2}{n}} + \frac{8m}{n(n+1)(n-2)} \left( 1 - \left( \frac{2M}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2.$$

قضیه ۷. فرض کنید  $G$  گراف همبند از اندازه  $n \geq 2$  و از سایز  $m$  باشد. در این صورت

$$LE(G) \leq 2M - \ln|D|. \tag{۱}$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $G = K_2$ .

اثبات: فرض کنید  $f(x) = x^2 - x - \ln x$  بهوضوح  $f(x)$  بهازای  $x \geq 1$  صعودی و بهازای  $0 < x \leq 1$  نزولی است. بنابراین  $x \leq x^2 - \ln x$  و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $x = 1$ .

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \leq \sum_{i=1}^n (\gamma_i^2 - \ln|\gamma_i^2|) = 2M - \ln \prod_{i=1}^n |\gamma_i| = 2M - \ln|D|$$

حال فرض کنید که حالت تساوی در نامساوی (۱) اتفاق بیفتد. در این صورت تمام نامساویهای محاسبات مذکور به صورت تساوی برقرار است. پس

$$|\gamma_1| = |\gamma_2| = \dots = |\gamma_n| = 1$$

در این صورت  $n = 2$  و  $\frac{2m}{n} = 1$  در نتیجه  $G = K_2$ .

قضیه ۸.

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq n(n-1) - 4m + 4M - \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

اثبات: بنابر قضیه ۷ داریم

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq 2M - \ln|D| + 2\bar{M} - \ln|\bar{D}| = n(n-1) - 4m + 4M - \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

قضیه ۹. فرض کنید  $G$  گراف همبند از اندازه  $n \geq 2$  و از سایز  $m$  باشد. در این صورت

$$LE(G) \leq 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln \frac{2m}{n}.$$

اثبات: بنابر اثبات قضیه ۷، داریم:

$$LE(G) = |\gamma_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \leq |\gamma_n| + \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i^2 - \ln|\gamma_i|) = |\gamma_n| + 2M - \ln \prod_{i=1}^n |\gamma_i| + \ln|\gamma_n| = 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln \frac{2m}{n}.$$

قضیه ۱۰.

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq n-1 + 2n(n-1) - 8m + 4M + \ln(2mn(n-1) - 4m^2) - 2 \ln n - \frac{8m^2}{n^2} - (n-1)^2 + \frac{4m(n-1)}{n} \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

اثبات: طبق قضیه ۹، داریم

$$\begin{aligned} & LE(G) + LE(\bar{G}) \\ & \leq 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln \frac{2m}{n} + 2\bar{M} + \frac{2\bar{m}}{n} - \frac{4\bar{m}^2}{n^2} - \ln|\bar{D}| \\ & + \ln \frac{2\bar{m}}{n} \\ & = n - 1 + 2n(n - 1) - 8m + 4M + \ln(2mn(n - 1) - 4m^2) - 2 \ln n \\ & - \frac{8m^2}{n^2} - (n - 1)^2 + \frac{4m(n - 1)}{n} \ln|D| - \ln|\bar{D}|. \end{aligned}$$

قضیه ۱۱.

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq n(n - 1) - 4m + 4M + 2\sqrt{2n(n - 1)M - 8mM + 4M^2}.$$

اثبات: با استناد به گزاره ۴، داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2 & \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2} = 2M + 2\bar{M} + 2\sqrt{4M\bar{M}} \\ & = n(n - 1) - 4m + 4M + 2\sqrt{2n(n - 1)M - 8mM + 4M^2}. \end{aligned}$$

قضیه ۱۲.

$$\begin{aligned} LE(G) + LE(\bar{G}) & \leq n - 1 + \\ & \left[ n(n - 1) - 4m + 4M - 2 + \right. \\ & \left. 22nn - 1M - 8mM + 4M^2 - nn - 1 + 4m - 4M + 112. \right] \end{aligned}$$

اثبات: با استناد به گزاره ۴، داریم

$$\left(\sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=2}^n \gamma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=2}^n \bar{\gamma}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2 & \leq \sum_{i=2}^n \gamma_i^2 + \sum_{i=2}^n \bar{\gamma}_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=2}^n \gamma_i^2 \sum_{i=2}^n \bar{\gamma}_i^2} \\ & = \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 - \gamma_1^2 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2 - \bar{\gamma}_1^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma_i^2 - \gamma_1^2) \sum_{i=1}^n (\bar{\gamma}_i^2 - \bar{\gamma}_1^2)} \\ & \leq 2M - 1 + 2\bar{M} - 1 + 2\sqrt{(2M - 1)(2\bar{M} - 1)} \end{aligned}$$

$$= n(n-1) - 4m + 4M - 2 + 2\sqrt{2n(n-1)M - 8mM + 4M^2 - n(n-1) + 4m - 4M + 1}.$$

می‌دانیم  $\gamma_1 \leq \Delta + \delta - \frac{2m}{n}$  با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} LE(G) + LE(\bar{G}) &= |\gamma_1| + |\bar{\gamma}_1| + \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|) \\ &\leq |\gamma_1| + |\bar{\gamma}_1| + \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2} \\ &\leq \Delta + \delta - \frac{2m}{n} + n - 1 - \Delta + n - 1 - \delta - \frac{2\bar{m}}{n} \\ &\quad + \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2} \\ &= n - 1 + \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2} \end{aligned}$$

$$\leq n - 1 + \left[ n(n-1) - 4m + 4M - 2 + 2\sqrt{2n(n-1)M - 8mM + 4M^2 - n(n-1) + 4m - 4M + 1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

### منابع

1. West D. B., "Introduction to Graph Theory", Prentice-Hall, Inc (2000).
2. Dragomir S. S., "A survey on Cauchy-Bunyakoviski-Schwarz type discrete inequalities", J. Inequ. Pure Appl. Math. 4 (2003) 63.
3. Grone R., Merris R., "The Laplacian spectrum of a graph II", SIAM J. Discrete Math. 7 (1994) 221-229.
4. Grone R., Merris R., Sunder V. S., "The Laplacian spectrum of a graph", SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11 (1990) 218-238.
5. Guman I., Zhou B., "Laplacian energy of a graph", Linear Algebra Appl. 414 (2006) 29-37.

6. Guman I., Zhou B., "On laplacian energy of graphs, MATCH Commun", Math. Comput. Chem. 57 (2007) 211-220.
7. Kober H., "On the arithmetic and geometric means and the Holder inequality", Pro. Am. Math. Soc. 59 (1958) 452-459.
8. Zhang X. D., Li J. S., "The Laplacian spectrum of mixed graphs, Linear Algeb", Appl. 351 (2002) 11-20.
9. Zhang X. D., Li J. S., "A note on the Laplacian eigenvalues", J. Math. Research Exposition, 24 (2) (2004) 388-390.