

## حل حالت خاصی از مسئله معکوس استورم-لیوویل با اثر ثانوی با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف

شهربانو اکبرپور کیاسری<sup>۱</sup>، عبدالهادی دباغیان<sup>۲\*</sup>، عبدالعلی نعمتی<sup>۳</sup>

۱. دانشگاه آزاد اسلامی واحد جویبار، گروه ریاضی، جویبار،

۲. دانشگاه آزاد اسلامی واحد نکا، گروه ریاضی، نکا،

۳. دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر

پذیرش ۹۸/۱۱/۱۶

دریافت ۹۶/۱۰/۰۹

### چکیده

در این پژوهش، معادلهٔ دیفرانسیل با اثر ثانوی تحت شرایط مرزی مجزا روی یک بازهٔ متناهی را در نظر می‌گیریم. سپس جواب تقریبی را برای حالت خاصی از مسئله اثر ثانوی عکس با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول محاسبه می‌کنیم. سرانجام نتایج عددی را به وسیلهٔ چند مثال ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مسئله معکوس، معادله استورم-لیوویل با اثر ثانوی، چندجمله‌ای‌های چبیشف.

### مقدمه

در این بررسی، معادلهٔ

$$-y''(x) + q(x)y(x) + \int_0^x M(x-t)y(t)dt = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

با شرایط مرزی

$$y(0, \lambda) = y(1, \lambda) = 0, \quad (2)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن  $\lambda = \rho^2$ ،  $\rho$  پارامتر طیفی است،  $M \in L_2(0, 1)$ ،  $q$  توابع با مقدار حقیقی هستند، یک تابع معلوم است و هدف محاسبه تابع  $M$  است. مسئله مقدار مرزی (۱) و (۲) را با نماد  $L(q, M)$  نشان می‌دهیم.

در مسائل استورم-لیوویل، اگر تابع پتانسیل معلوم و هدف محاسبه مقادیر ویژه باشد، آن مسئله را مستقیم و در صورتی که مقادیر ویژه معلوم و هدف محاسبه ضرایب معادله (تابع پتانسیل با اثر ثانوی) باشد، مسئله را معکوس می‌نامند. کاربرد مسائل طیفی عکس در ریاضیات، علوم طبیعی و مهندسی باعث شد که پژوهش‌گران علاقمند به پژوهش در این زمینه شوند. اخیراً بسیاری از مؤلفان به بررسی مسائل عکس معادلات استورم-لیوویل پرداختند ([۳]، [۱۷]، [۱۸] ملاحظه شود). اما تعداد کمی از آنها معادلات دیفرانسیل با اثر ثانوی را بررسی کرده‌اند ([۳]، [۱۶]، [۱۹] ملاحظه شود).

محاسبه مقادیر عددی جواب مسئله عکس برای معادلات استورم - لیوویل به کمک روش‌های عددی همانند روش نوع نیوتن، روش ریلی ریتس، روش نومروف<sup>۱</sup> روش تفاضل محدود و روش‌های دیگر در [۱]، [۲]، [۴]، [۵]، [۷]، [۸]،

\* نویسنده مسئول a.dabbaghian@iauneka.ac.ir

1. Numerov's

[۹]، [۱۲] و دیگر کارها بررسی شدند. اما تا به حال بحث عددی جواب برای معادلات دیفرانسیل با اثر ثانویه بررسی نشده. در این پژوهش ما حل عددی را برای حالت خاصی از مسئله با اثر ثانوی عکس به کمک روش درون‌یابی چبیشف به دست می‌آوریم که در [۱۳] برای محاسبه جواب معادلات انتگرال-دیفرانسیل استفاده شده بود.

در بخش ۲، فرم مجانبی جواب و مقادیر ویژه مسئله  $L(q, M)$  را نشان می‌دهیم و یک قضیه یکتایی برای جواب مسئله اثر ثانویه معکوس ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، با استفاده از روش درون‌یابی چبیشف تابع  $M$  را در حال خاص  $q=0$  تقریب می‌زنیم و الگوریتم عددی برای حل مسئله اثر ثانوی عکس ارائه می‌دهیم و در بخش ۴، با ارائه چند مثال نتایج عددی نشان داده می‌شود.

### فرم مجانبی جواب و مقادیر ویژه

در این بخش شکل مجانبی جواب و مقادیر ویژه مسئله  $L(q, M)$  را نشان می‌دهیم و قضیه یکتایی را برای مسئله اثر ثانوی عکس با شرایط مرزی داده شده ارائه می‌کنیم.

فرض کنید  $S(x, \lambda)$  جواب معادله (۱) تحت شرایط اولیه  $S(0, \lambda) = 0$  و  $S'(0, \lambda) = 1$  باشد. بدین ترتیب،  $S(x, \lambda)$  جواب معادله انتگرال زیر است ([۶] ملاحظه شود).

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} \left( q(t)S(t, \lambda) + \int_0^t M(t-s)S(s, \lambda)ds \right) dt. \quad (۳)$$

لم ۱. [۶]. به ازای  $\rho \rightarrow \infty$ ، فرم مجانبی زیر برای تابع  $S(x, \lambda)$  برقرار است:

$$S(x, \lambda) \cong \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (۴)$$

با جای‌گزینی شکل مجانبی (۴) در سمت راست (۳)، داریم

$$S(x, \lambda) \cong \frac{\sin \rho x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} q_1(x) \cos \rho x + \frac{1}{2\rho^2} \int_0^x q(t) \cos \rho(x-2t) dt + \frac{1}{\rho^2} \int_0^x \sin \rho(x-t) \int_0^t M(t-s) \sin \rho s ds dt + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right), \quad (۵)$$

که در آن  $q_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt$

فرض کنید  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  مجموعه مقادیر ویژه مسئله مقدار مرزی  $L(q, M)$  باشد. چون این مقادیر ویژه بر صفرهای تابع مشخصه

$$\Delta(\lambda) := S(1, \lambda), \quad \lambda = \rho^2, \quad (۶)$$

منطبق هستند. در این صورت با استفاده از (۵) قضیه ۲ برقرار است.

قضیه ۲. [۶]، مسئله مقدار مرزی  $L(q, M)$  دارای یک مجموعه شمارش‌پذیر از مقادیر ویژه  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  به صورت

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} \cong n\pi + \frac{\omega}{n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 q(t) \cos 2n\pi t dt + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi t \int_0^t M(t-s) \sin n\pi s ds dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (۶)$$

است که در آن  $\omega = \frac{1}{2} \int_0^1 q(t) dt$

فرض کنید دو مسئله  $L(q, M)$  و  $\tilde{L}(q, \tilde{M})$  داده شده باشند و  $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 1}$  مقادیر ویژه مسئله  $\tilde{L}(q, \tilde{M})$  باشد. حال قضیه یکتایی ۳ را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۳. [۶] اگر  $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ,  $n \geq 1$ , آن‌گاه  $M(x) = \tilde{M}(x)$  تقریباً همه جا روی  $(0, 1)$ .

در این پژوهش، مسئله  $L(q, M)$  که  $q(x) = 0$  را در نظر می‌گیریم یعنی معادله

$$-y''(x) + \int_0^x M(x-t)y(t)dt = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

تحت شرایط مرزی

$$y(0, \lambda) = y(1, \lambda) = 0, \quad (9)$$

و از روش درون‌یابی چبیشف برای محاسبه تقریب جواب مسئله عکس (۸) و (۹) استفاده می‌کنیم.

### الگوریتم عددی

در این بخش، یک روش عددی بر پایه روش درون‌یابی چبیشف با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول

برای حل مسئله اثر ثانوی عکس (۸) و (۹) ارائه می‌دهیم. مسئله عکس زیر را در نظر می‌گیریم.

مسئله عکس. فرض کنید مقادیر ویژه  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  داده‌های ورودی مسئله است و  $M$  تابع مجهول باشد. هدف

محاسبه تابع  $M$  با فرض معلوم بودن مقادیر ویژه است.

با استفاده از (۶) داریم که

$$S(1, \lambda_n) = 0.$$

از رابطه (۳) داریم:

$$\int_0^1 \frac{\sin(\rho_n(1-t))}{\rho_n} \int_0^t M(t-s)S(s, \lambda_n) ds dt = -\frac{\sin \rho_n}{\rho_n}, \quad n \geq 1. \quad (10)$$

در معادله بالا،  $M$  تابع مجهول است و  $S$  می‌تواند از رابطه (۴) به دست آید.

چون جواب معادله انتگرال فوق جواب مسئله عکس است بنابراین کافی است که ما معادله انتگرال (۱۰) را حل

کنیم. در [۱۳]، راشد<sup>۱</sup> معادلات انتگرال-دیفرانسیل را به کمک روش درون‌یابی چبیشف حل کرد. در این‌جا، ما این

روش را برای حل معادله انتگرال (۱۰) به کار می‌بریم. از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به عنوان توابع پایه برای

محاسبه تقریب تابع  $M$  استفاده می‌کنیم و معادله انتگرال (۱۰) را به دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کنیم.

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول  $T_k(x)$  روی بازه  $(-1, 1)$  به وسیله رابطه بازگشتی

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

تعریف می‌شود.

با استفاده از روش درون‌یابی چبیشف برای تابع  $M$  [۱۳] ببینید، داریم

$$M \cong \sum_{j=0}^N M_j l_{j,N}(x), \quad x \in [0, 1], \quad (11)$$

که در آن

$$l_{i,N}(x) = \frac{2\delta_j}{N} \sum_{k=0}^{N''} T_k(2x-1) \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right),$$

$$\delta_j = \begin{cases} 0/5 & j=0, N, \\ 1 & 0 < j < N, \end{cases}$$

اعداد  $M_j$ ،  $j = 0, 1, \dots, N$  مقادیر تابع  $M$  در نقاط

$$x_j = \left( \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) + 1 \right) / 2$$

هستند. هم‌چنین نماد " نشان‌دهنده آن است که در مجموع فوق نصف جملات اول و آخر در نظر گرفته می‌شود. از (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\sum_{j=0}^N R(x_j, \lambda_n) M_j \cong g(\lambda_n), \quad n \geq 1,$$

که در آن

$$R(x_j, \lambda_n) = \frac{2\delta_j}{N} \sum_{k=0}^{N'} I_k(\lambda_n) \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right),$$

$$I_k(\lambda_n) = \int_0^1 \frac{\sin(\rho_n(1-t))}{\rho_n} \int_0^1 T_k(2(t-s)-1) S(s, \lambda_n) ds dt,$$

$$g(\lambda_n) = -\frac{\sin \rho_n}{\rho_n} \quad \text{و}$$

برای به‌دست آوردن جواب مسئله عکس، الگوریتم زیر را تنظیم می‌کنیم.

الگوریتم. فرض کنید اعداد  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  داده شده باشند.

(۱)  $N$  را انتخاب می‌کنیم،

(۲) ضرایب  $M_j$ ،  $j = 0, 1, \dots, N$ ، را به کمک دستگاه خطی زیر پیدا می‌کنیم:

$$A_N \hat{M} \cong B_N,$$

که در آن

$$A_N = [R(x_j, \lambda_n)]_{n=1}^{N+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$$B_N = [g(\lambda_n)]_{n=1}^{N+1},$$

$$\hat{M}^T = [M_j], \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

### مثال‌های عددی

در این بخش، بعضی مثال‌های عددی را با توجه به الگوریتم داده شده ارائه می‌کنیم. هم‌چنین در رسم شکل‌ها از نرم‌افزار متلب استفاده می‌کنیم. بدون این‌که از کلیت کاسته شود، مسئله عکس را با دو شرط اضافی  $M(1-x) = M(x)$  و  $M(1-x) = -M(x)$  به‌طور مجزا، در نظر می‌گیریم. برای این هدف، بعضی مثال‌های عددی را در دو حالت زیر ارائه می‌کنیم.

**حالت اول:** در این حالت، شرط اضافی  $M(1-x) = M(x)$  را به‌کار می‌بریم و مثال‌های شامل این شرط را معرفی می‌کنیم.

**مثال ۴.** فرض کنید  $M(x) = \cos(2\pi x)$  داده شده باشد. آن‌گاه مقادیر ویژه مسئله (۸) و (۹) با استفاده از رابطه (۷) و با فرض  $N=5$  عبارت است از:

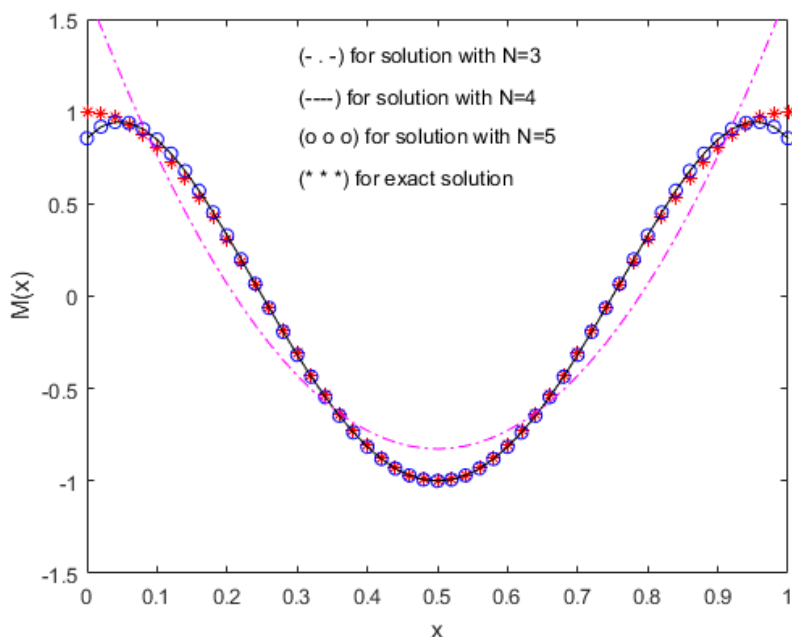
$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{n=6} = \{9.9146874043, 39.7288133902, 88.9724020276, 157.9136704174, 246.7630858872, 355.3057584392\}.$$

حال، فرض می‌کنیم که  $M$  تابع مجهول است و مقادیر ویژه مذکور، داده‌های ورودی مسئله باشند. فرض کنید  $\hat{M}$  تقریب محاسبه شده تابع  $M$  باشد. با به‌کارگیری الگوریتم توصیف شده، مقادیر عددی تابع  $M(x) = \cos(2\pi x)$  با  $N=5$  را به‌دست می‌آوریم که در جدول ۱ نشان داده شده است

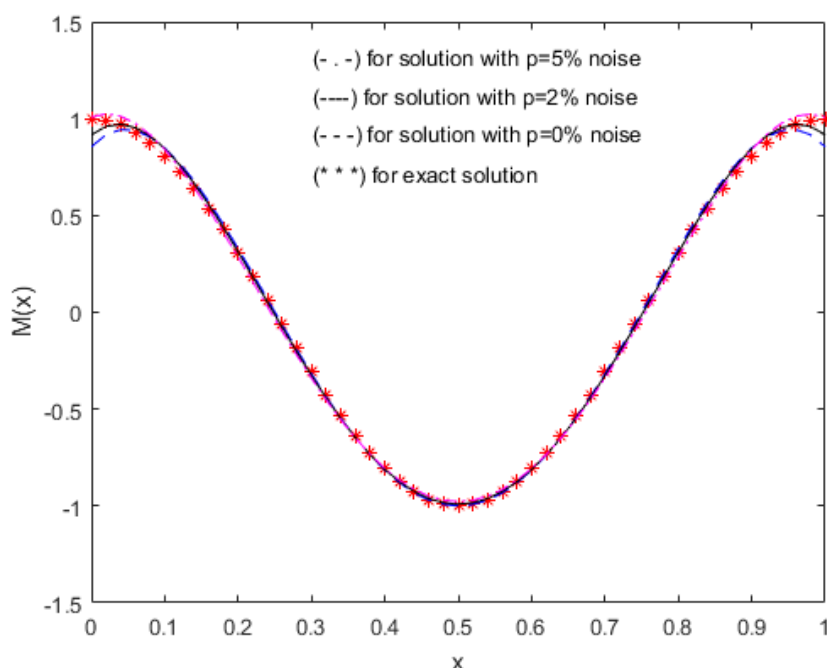
جدول ۱. مقادیر تقریبی  $M(x)$  در مثال ۴ با  $n=5$

$j$	$x_j$	$\hat{M}(x)$	$M(x)$	$M(x) - \hat{M}(x)$
۰	۱	-۰/۸۵۵۲۴۱۶	۱	۰/۱۴۴۷۵۸۴
۱	۰/۹۰۴۵۰۸۵	-۰/۸۶۳۲۷۳۵	۰/۸۲۵۳۴۰۸	-۰/۰۳۷۹۳۲۷
۲	۰/۶۵۴۵۰۸۵	-۰/۵۷۵۰۳۸۱	-۰/۵۶۴۶۳۴۹	۰/۰۱۰۴۰۳۲
۳	۰/۳۴۵۴۹۱۵	-۰/۵۷۵۰۳۸۱	-۰/۵۶۴۶۳۴۹	۰/۰۱۰۴۰۳۲
۴	۰/۰۹۵۴۹۱۵	-۰/۸۶۳۲۷۳۵	۰/۸۲۵۳۴۰۸	-۰/۰۳۷۹۳۲۷
۵	۰	۰/۸۵۵۲۴۱۶	۱	۰/۱۴۴۷۵۸۴

با جای‌گذاری مقادیر به‌دست آمده در جدول ۱ در (۱۱)، جواب تقریبی مسئله عکس محاسبه می‌شود. جواب دقیق و تقریب‌های عددی محاسبه شده با  $N \in \{3, 4, 5\}$  در شکل ۱ بدون هیچ نویز دیده می‌شود (ببینید (a)). هم‌چنین، مسئله عکس را با استفاده از داده نویز  $(1 + P\varepsilon)\lambda_n$ ، به‌جای  $\lambda_n$ ، حل می‌کنیم که در آن  $p$  و  $\varepsilon$  به‌ترتیب در بازه  $[-1, 1]$ ، مقدار نویز و مقدار حقیقی تصادفی هستند. جواب دقیق و تقریب عددی تابع  $M$  با  $N = 5$  و  $5\%$  و  $2\%$  و  $P = 0^\circ$  در شکل ۱ دیده می‌شوند. (ببینید (b)) و در این شکل، می‌توان نشان داد که جواب عددی محاسبه شده پایدار است و هم‌چنین وقتی مقدار نویز  $p$  کم می‌شود دقیق‌تر می‌شود



(a) جواب‌های دقیق و تقریبی بدون نویز در مقادیر ویژه



(b) جواب‌های دقیق و تقریبی با  $N=5$

شکل ۱. جواب مسئله عکس در مثال ۴

مثال ۵. فرض کنید  $M(x) = \sin(\pi x)$  داده شده باشد. آن‌گاه، مقادیر ویژه مسئله (۸) و (۹) که از رابطه (۷) با  $N=5$  به دست می‌آید عبارت است از:

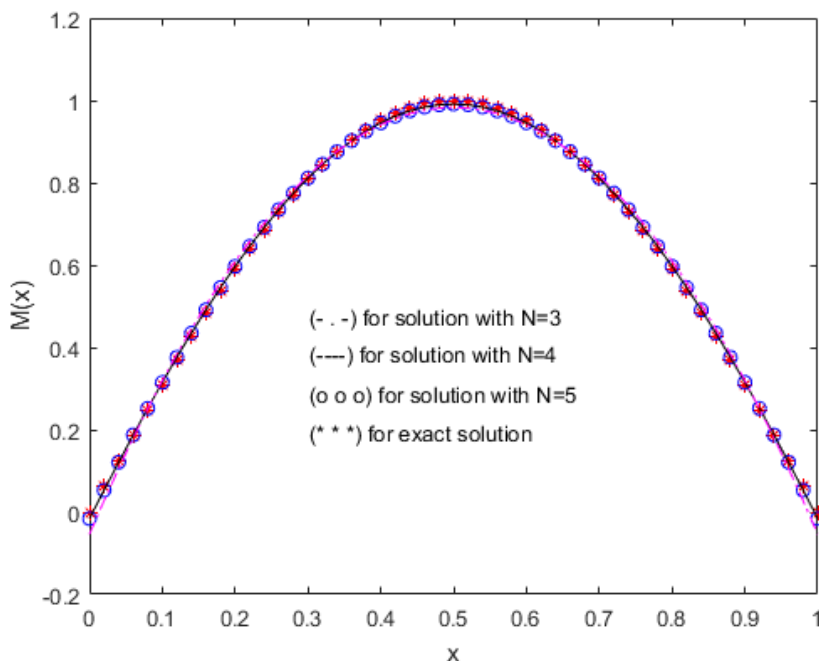
$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{n=6} = \{10.1097804695, 39.3723856005, 88.7866553298, 157.8924504713, 246.7268472935, 355.2966639292\}.$$

حال، فرض می‌کنیم که  $M$  تابع مجهول باشد و مقادیر ویژه فوق، داده‌های ورودی مسئله باشند. می‌خواهیم طبق الگوریتمی که ارائه کرده بودیم تقریب تابع  $M$  را به دست آوریم. نتایج به دست آمده  $M(x) = \sin(\pi x)$  با  $N = 5$  در جدول ۲ نشان داده شده است.

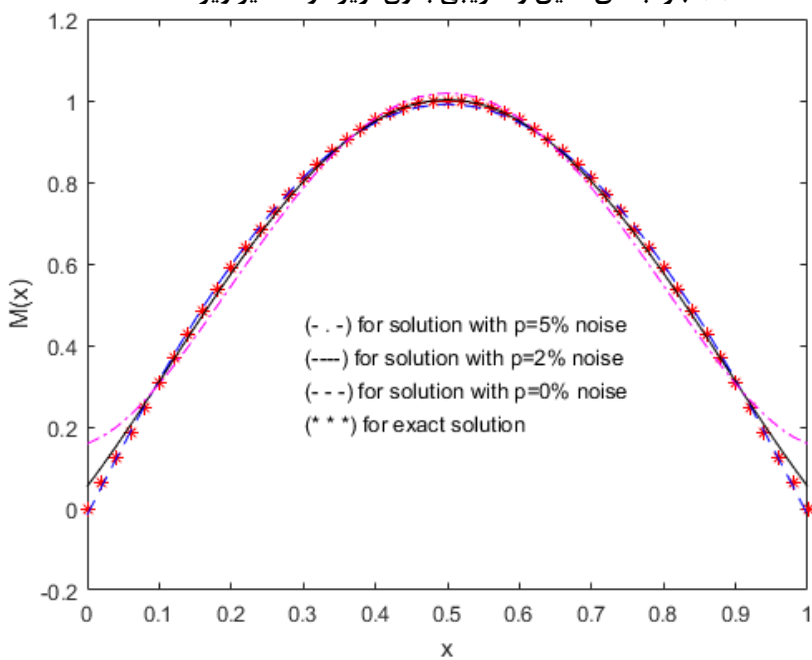
جدول ۲. مقادیر تقریبی  $M$  در مثال ۵ با  $N=5$

$j$	$x_j$	$\widehat{M}(x)$	$M(x)$	$M(x) - \widehat{M}(x)$
۰	۱	-۰/۰۱۵۹۵۰۰	$1/22464668 * 10^{-(16)}$	-۰/۰۱۵۹۵۰۰
۱	۰/۹۰۴۵۰۸۵	-۰/۳۰۰۹۳۶۷	۰/۲۹۵۵۱۵۸	-۰/۰۰۵۴۲۰۹
۲	۰/۶۵۴۵۰۸۵	۰/۸۸۳۱۵۶۱	۰/۸۸۴۴۸۷۱	۰/۰۰۱۳۳۱۰
۳	۰/۳۴۵۴۹۱۵	۰/۸۸۳۱۵۶۱	۰/۸۸۴۴۸۷۱	۰/۰۰۵۴۲۰۹
۴	۰/۰۹۵۴۹۱۵	-۰/۳۰۰۹۳۶۷	۰/۲۹۵۵۱۵۸	۰/۰۰۵۴۲۰۹
۵	۰	-۰/۰۱۵۹۵۰۰	۰	۰/۰۱۵۹۵۰۰

با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده از جدول ۴ در (۱۱)، تقریب تابع  $M$  را به دست می‌آوریم. جواب دقیق و تقریب عددی به دست آمده با  $N \in \{3,4,5\}$  برای حالت بدون نویز در شکل ۲ (ببینید (a)) نشان داده شد. هم‌چنین، جواب‌های تقریبی با  $N = 5$  و ۵٪ و ۲٪ و  $P = 0$  در شکل ۲ (ببینید (b)) نشان داده شد. مشابه مثال ۴، می‌توان نشان داد که جواب عددی و دقیق‌تر می‌شود وقتی مقدار نویز  $p$  کم می‌شود.



(a) جواب‌های دقیق و تقریبی بدون نویز در مقادیر ویژه



(b) جواب‌های دقیق و تقریبی تابع با N=5

شکل ۲. جواب مسئله عکس در مثال ۵

مثال ۶. فرض کنید  $M(x) = (x - \frac{1}{2})^2$  داده شده باشد. آن‌گاه، مقادیر ویژه مسئله (۸) و (۹) که از رابطه (۷) با

$N=5$  به دست می‌آید عبارت است از:

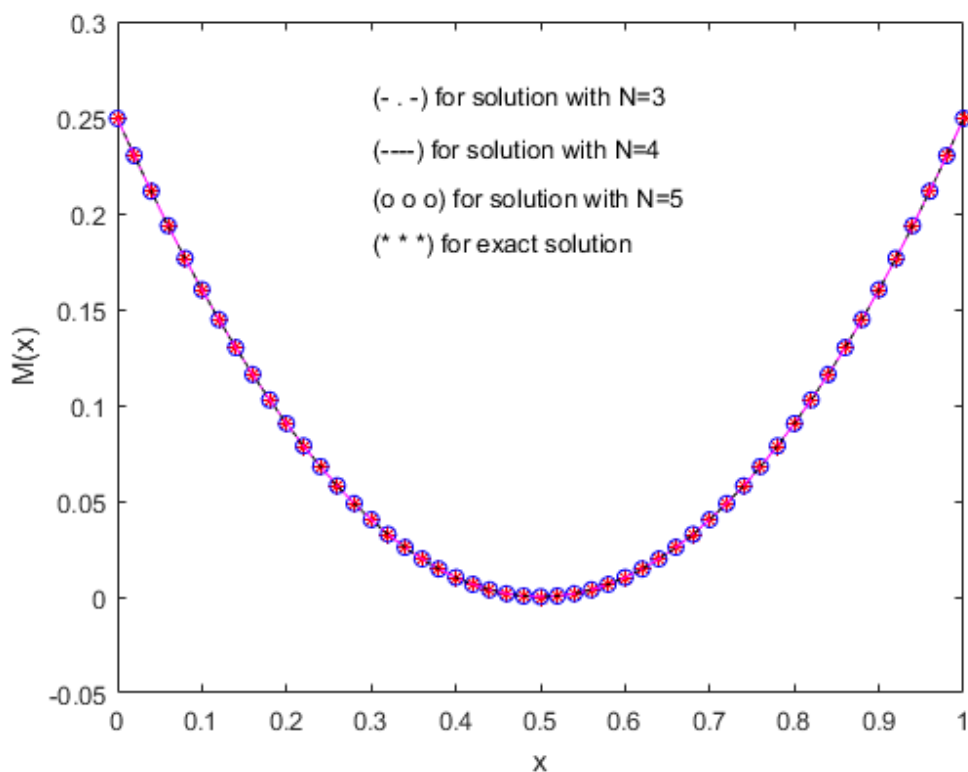
$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{n=6} = \{9.9080283774, 39.5037519634, 88.8469287614, 157.9200030549, 246.7479529751, 355.3085729221\}.$$

حال، فرض می‌کنیم  $M$  تابع مجهول و مقادیر ویژه فوق، داده‌های ورودی مسئله باشند. با توجه به الگوریتم داده شده، مقادیر عددی تابع  $M$  با  $N = 5$  را به دست می‌آوریم که در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳. مقادیر تقریبی  $M$  در مثال ۶ با  $N=5$

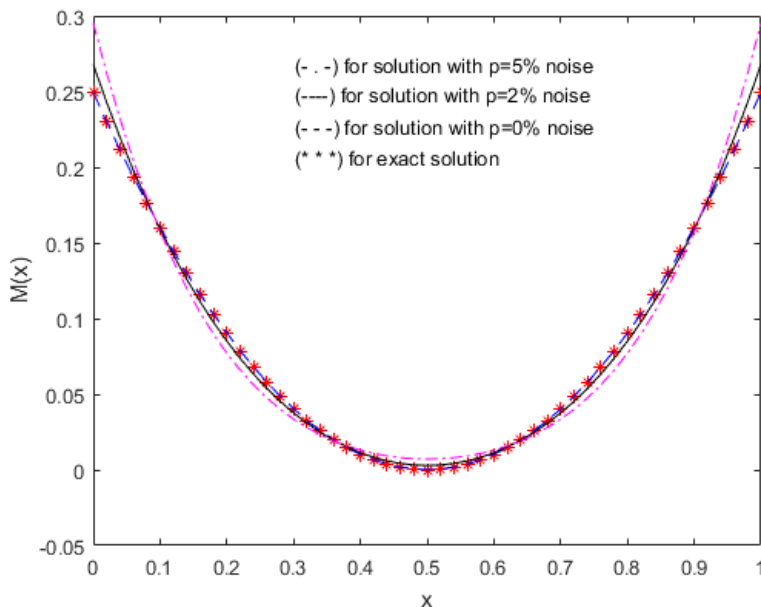
$j$	$x_j$	$\widehat{M}(x)$	$M(x)$	$M(x) - \widehat{M}(x)$
۰	۱	۰/۲۴۹۵۲۰۶	۰/۲۵	۰/۰۰۰۴۷۹۴
۱	۰/۹۰۴۵۰۸۵	۰/۱۶۳۸۴۴۶	۰/۱۶۳۶۲۷۱	۰/۰۰۰۲۱۷۵
۲	۰/۶۵۴۵۰۸۵	۰/۰۲۴۱۳۳۶	۰/۰۲۳۸۷۲۹	۰/۰۰۰۲۶۰۷
۳	۰/۳۴۵۴۹۱۵	۰/۰۲۴۱۳۳۶	۰/۰۲۳۸۷۲۹	۰/۰۰۰۲۶۰۷
۴	۰/۰۹۵۴۹۱۵	۰/۱۶۳۸۴۴۶	۰/۱۶۳۶۲۷۱	۰/۰۰۰۲۱۷۵
۵	۰	۰/۲۴۹۵۲۰۶	۰/۲۵	۰/۰۰۰۴۷۹۴

در شکل ۳ جواب دقیق و تقریب عددی به دست آمده با  $N \in \{3, 4, 5\}$  برای حالت بدون نویز و همچنین جواب‌های تقریبی با  $N = 5$  و  $0.2\%$  و  $0.5\%$  نشان داده شد.



(a) جواب‌های دقیق و تقریبی بدون نویز در مقادیر ویژه





(b) جواب‌های دقیق و تقریبی تابع با  $N=5$

شکل ۳. جواب مسئله عکس در مثال ۶

حالت دوم : در این حالت، شرط اضافی  $M(1-x) = -M(x)$  را به کار می‌بریم و مثال‌های شامل این شرط را معرفی می‌کنیم.

مثال ۷. فرض کنید  $M(x) = \cos(\pi x)$  داده شده باشد. آن‌گاه مقادیر ویژه مسئله (۸) و (۹) که از رابطه (۷) با  $N = 4$  به دست می‌آید عبارت است از:

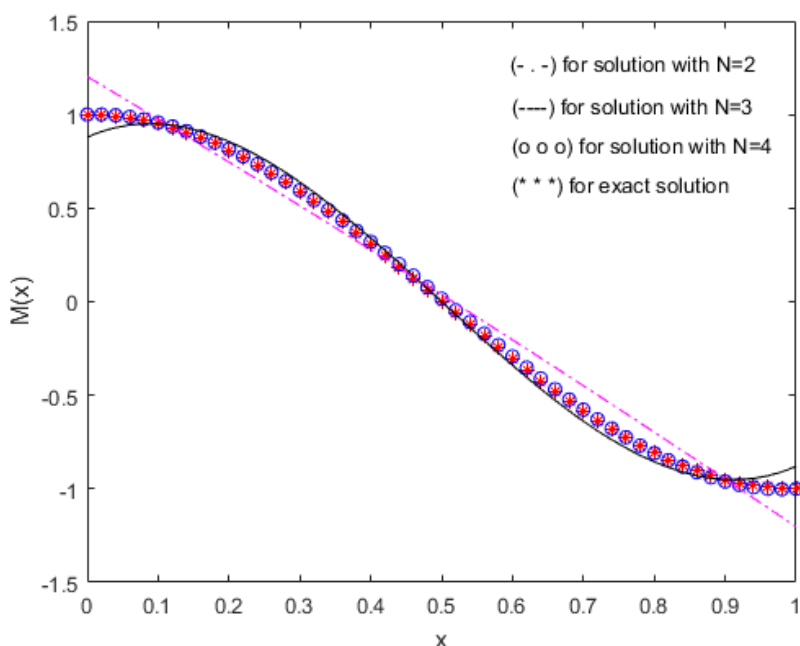
$$\{\lambda_n\}_{n=1}^5 = \{10.1211875446, 39.6587496170, 88.8264396098, 157.9424919802, 246.7401100272\}.$$

حال، فرض می‌کنیم که  $M$  تابع مجهول باشد و مقادیر ویژه فوق، داده‌های ورودی مسئله باشند. با توجه به الگوریتم داده شده مقادیر عددی تابع  $M$  با  $N = 4$  را به دست می‌آوریم که در جدول ۴ نشان داده شده است.

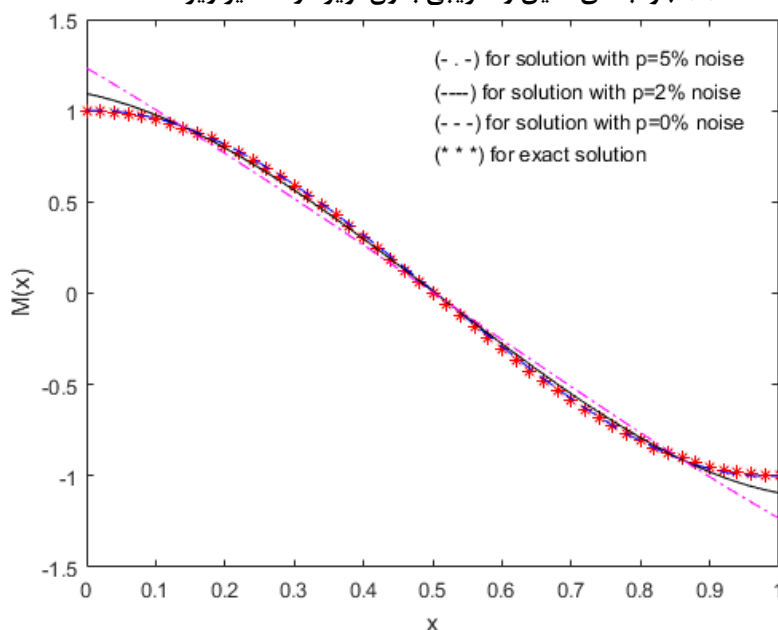
جدول ۴. مقادیر تقریبی  $M$  در مثال ۷ با  $N=5$

$j$	$x_j$	$\widehat{M}(x)$	$M(x)$	$M(x) - \widehat{M}(x)$
۰	۱	۱/۰۰۰۲۵۹۳	-۱	۰/۰۰۰۲۵۹۳
۱	۰/۸۵۲۵۵۲۴	۰/۹۰۲۶۹۰۶	۰/۸۹۶۰۱۸۹	۰/۰۰۶۶۷۱۷
۱	۰/۵	۰/۰۱۵۶۸۷۳	$6/123234 \cdot 10^{-17}$	-۰/۰۱۵۶۸۷۳
۳	۰/۱۴۶۴۴۶۶	۰/۹۰۲۶۹۰۶	۰/۸۹۶۰۱۸۹	-۰/۰۰۶۶۷۱۷
۴	۰	۰/۰۰۰۲۵۹۳	۱	-۰/۰۰۰۲۵۹۳

در شکل ۴ جواب دقیق و تقریب عددی به دست آمده با  $N \in \{2,3,4\}$  برای حالت بدون نویز و همچنین جواب‌های تقریبی با  $N = 5$  و ۵٪ و ۲٪ و  $P = 0^\circ$  نشان داده شد.



(a) جواب‌های دقیق و تقریبی بدون نویز در مقادیر ویژه



(b) جواب‌های دقیق و تقریبی تابع با  $N=4$

شکل ۴. جواب مسئله عکس در مثال ۷

مثال ۸. فرض کنید  $N(x) = \sin(\frac{\pi}{2}(x - \frac{1}{2}))$  داده شده باشد. آن‌گاه، مقادیر ویژه مسئله (۸) و (۹) که از

رابطه (۷) با  $N = 4$  به دست می‌آید عبارت است از:

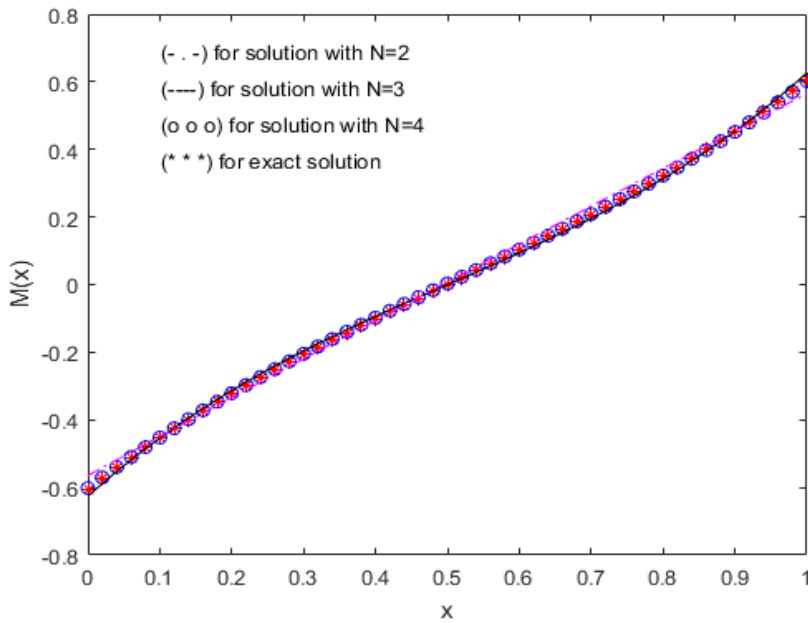
$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{n=5} = \{9.7201220141, 39.3669698555, 88.8135784137, 157.8880417427, 246.7355629961\}$$

حال، فرض می‌کنیم  $M$  تابع مجهول باشد و مقادیر ویژه داده شده در جدول ۹ داده ورودی باشند. با توجه به الگوریتم داده شده مقادیر عددی تابع  $M$  با  $N = 4$  را به دست می‌آوریم که در جدول ۱۰ نشان داده شده است.

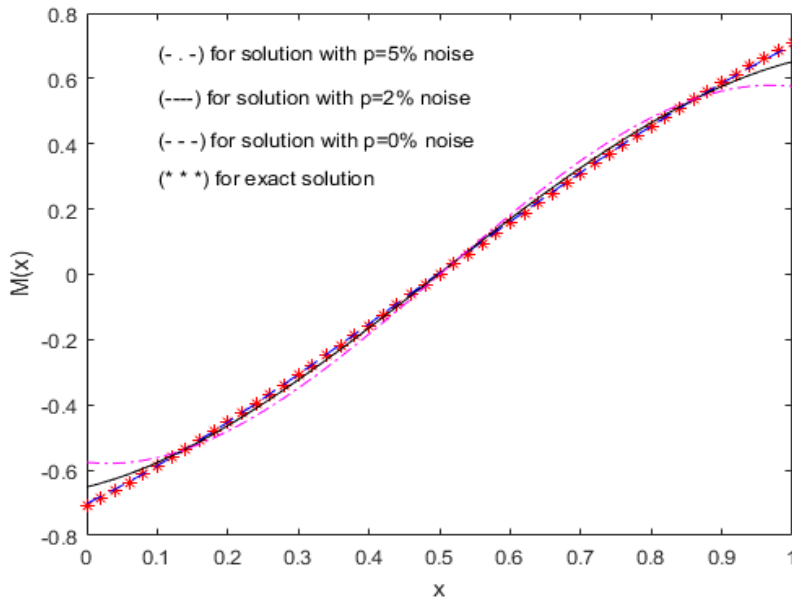
جدول ۵. مقادیر تقریبی  $M$  در مثال ۸ با  $N=4$

$j$	$x_j$	$\widehat{M}(x)$	$M(x)$	$M(x) - \widehat{M}(x)$
۰	۱	۰/۷۰۲۲۳۲۴	۰/۷۰۷۱۰۶۸	۰/۰۰۴۸۷۴۴
۱	۰/۸۵۳۵۵۳۴	۰/۵۲۶۱۳۷۶	۰/۵۲۷۲۴۹۵	۰/۰۰۱۱۱۱۹
۲	۰/۵	۰/۰۰۵۶۱۳۰	.	-۰/۰۰۵۶۱۳۰
۳	۰/۱۴۶۴۴۶۶	-۰/۵۲۶۱۳۷۶	-۰/۵۲۷۲۴۹۵	-۰/۰۰۱۱۱۱۹
۴	۰	-۰/۷۰۲۲۳۲۴	-۰/۷۰۷۱۰۶۸	-۰/۰۰۴۸۷۴۴

در شکل ۵ (a) جواب دقیق و تقریب عددی به دست آمده با  $N \in \{2,4\}$  برای حالت بدون نویز دیده می‌شود. هم‌چنین جواب‌های تقریبی با  $N = 4$  و ۵٪ و ۲٪ و  $P = 0$  نشان داده شد (b).



(a) جواب‌های دقیق و تقریبی بدون نویز در مقادیر ویژه



(b) جواب‌های دقیق و تقریبی تابع با  $N=4$

شکل ۵. جواب مسئله عکس در مثال ۸

**مثال ۹.** فرض کنید  $M(x) = (x - \frac{1}{2})^3$  داده شده باشد. آن‌گاه مقادیر ویژه مسئله (۸) و (۹) که از رابطه (۷) با  $N=4$  به دست می‌آید عبارت است از:

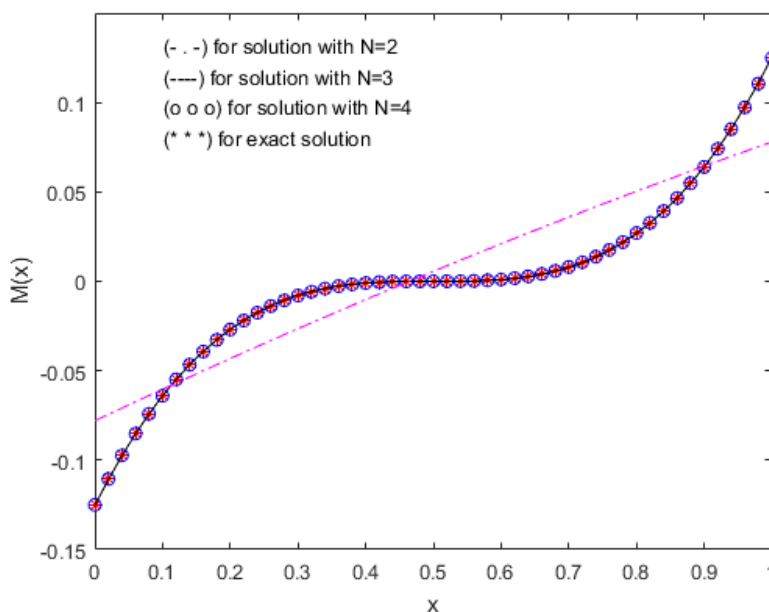
$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{n=5} = \{9.8552146557, 39.4660044271, 88.8187567871, 157.9069578161, 246.7371689539\}$$

حال، فرض می‌کنیم  $M$  تابع مجهول باشد و مقادیر ویژه فوق، داده‌های ورودی مسئله باشند. با توجه به الگوریتم داده شده، مقادیر عددی تابع  $M$  با  $N = 4$  را به دست می‌آوریم که در جدول ۶ نشان داده شده است

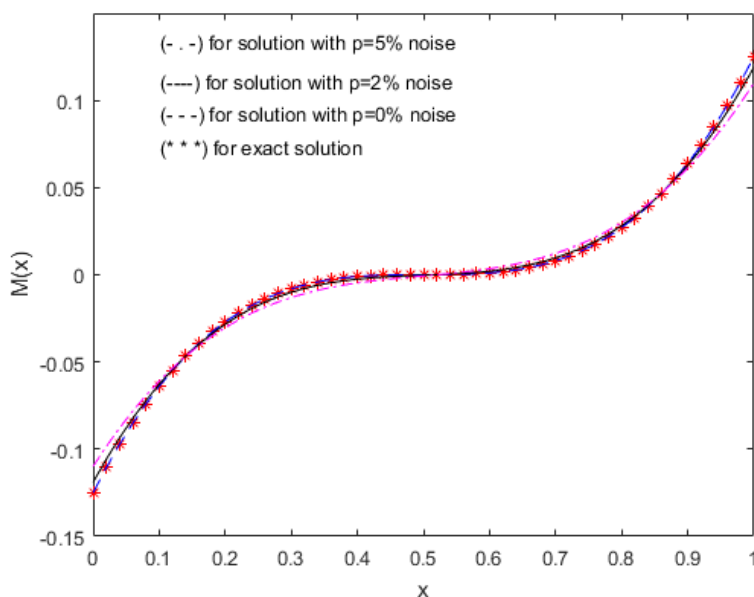
جدول ۶. مقادیر تقریبی  $M$  در مثال ۹ با  $N=4$

$j$	$x_j$	$\widehat{M}(x)$	$M(x)$	$M(x) - \widehat{M}(x)$
۰	۱	۰/۱۲۴۹۶۲۶	۰/۱۲۵	۰/۰۰۰۰۳۷۴
۱	۰/۸۵۳۵۵۳۴	۰/۰۴۴۱۷۰۲	۰/۰۴۴۱۹۴۲	۰/۰۰۰۰۲۴۰
۲	۰/۵	۰/۰۰۰۰۵۰۲	۰	-۰/۰۰۰۰۵۰۲
۳	۰/۱۴۶۴۴۶۶	-۰/۰۴۴۱۷۰۲	-۰/۰۴۴۱۹۴۲	-۰/۰۰۰۰۲۴۰
۴	۰	-۰/۱۲۴۹۶۲۶	-۰/۱۲۵	-۰/۰۰۰۰۳۷۴

در شکل ۶ جواب دقیق و تقریب عددی به دست آمده با  $N \in \{2,3,4\}$  برای حالت بدون نویز و هم‌چنین جواب‌های تقریبی با  $N = 4$  و ۵٪ و ۲٪ و  $P = 0^\circ$  نشان داده شد.



(a) جواب‌های دقیق و تقریبی بدون نویز در مقادیر ویژه



(a) جواب‌های دقیق و تقریبی تابع با  $N=4$   
 شکل ۶. جواب مسئله عکس در مثال ۹

باید اشاره کرد که در مثال‌های ارائه شده، در حالت اول برای  $N = 5$  و در حالت دوم برای  $N = 4$ ، بهترین تقریب جواب مسئله اثر ثانوی عکس به دست آمده است. همگرایی روش عددی ارائه شده و پایداری جواب مسئله عکس برای حالت‌های اول و دوم وقتی که  $N = 5$  و  $N = 4$  به ترتیب، در مثال‌های ارائه شده دیده می‌شوند.

### نتیجه

در این پژوهش، چندجمله‌ای چبیشف نوع اول را برای به دست آوردن جواب تقریبی مسئله عکس برای حالت خاص از مسئله اثر ثانوی تحت شرایط مرزی مجزا به کار بردیم. هم‌چنین، مثال‌هایی برای محاسبه مقادیر عددی تابع  $M$  ارائه کردیم و نتایج عددی پایدار را در مثال‌های ارائه شده نشان دادیم.

### منابع

1. Andrew AL., "Numerov's method for inverse Sturm-Liouville problem", *Inverse Problems*, 21(2005) 223-238
2. Bockmann C., Kammanee A., "Broyden method for inverse non-symmetric Sturm-Liouville problems", *BIT Numerical Mathematics*, 51 (2011) 513-528.
3. Dabbaghian A., Akbarpour Sh., Neamaty A., "The uniqueness theorem for discontinuous boundary value problems with aftereffect using the nodal points", *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A-Science*, 7 (2012) 391-394.
4. Drignei M. C., "A Newton-type method for solving an inverse Sturm-Liouville problem", *Inverse Problems in Science and Engineering*, 23 (5) (2014) 851-883.

5. Efremova L., Freiling G., "Numerical solution of inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with discontinuous potentials", *Central European Journal of Mathematics*, 11 (2013) 2044-2051.
6. Freiling G., Yurko V. A., "Inverse Sturm-Liouville problems and their applications", New York. NOVA science publishers (2001).
7. Gao Q., Cheng X., Huang Z., "Modified Numerov's method for inverse Sturm-Liouville problems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 253(2013) 181-199.
8. Hald O. H., "The inverse Sturm-Liouville problem and the Rayleigh-Ritz method", *Mathematics of Computation*, 32 (1978) 687-705.
9. Kammanee A., Bockmann C., "Boundary value method for Sturm-Liouville problems", *Applied Mathematics and Computation*, 214 (2009) 342-352.
10. Neamaty A., Khalili Y., "Determination of a differential operator with discontinuity from interior spectral data", *Inverse Problems in Science and Engineering*, 22 (2014) 1002-1008.
11. Pivovarchik V., "Direct and inverse three-point Sturm-Liouville problems with parameter dependent boundary conditions", *Asymptotic Analysis*, 26 (2001) 219-238.
12. Raer M., Bockmann C., "Reconstruction method for inverse Sturm-Liouville problems with discontinuous potentials", *Inverse Problems*, 23 (2007) 933-946.
13. Rashed MT., "Numerical solution of a special type of integro-differential equations", *Applied Mathematics and computation*, 143 (2003) 73-88.
14. Rohrl N., "A least-squares functional for solving inverse Sturm-Liouville problems", *Inverse Problems*, 21 (2005) 2009-2017
15. Rundell W., Sacks PE., "Reconstruction techniques for classical inverse Sturm-Liouville problems", *Mathematics of Computation*, 58 (1992) 161-183.
16. Sacks P.E., "An iterative method for the inverse Dirichlet problem", *Inverse Problems*, 4 (1988) 1055-1069.
17. Shahriari M., Jodayree A., Teschl G., "Uniqueness for inverse Sturm-Liouville problems with a finite number of transmission conditions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 395 (2012) 19-29.
18. Yang CF., Zettl A., "Half inverse problems for quadratic pencils of Sturm-Liouville operators", *Taiwanese Journal of Mathematics* 16 (2012) 829-1846.
19. Yilmaz E., "Inverse nodal problem for an integro-differential operator", *Cankaya University Journal of Science and Engineering* 12 (2015) 014-019