حل عددی معادلات انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف با استفاده از روش ماتریس عملیاتی چندجمله‌ای‌های اویلر

فرشید میرزائی*، نسرین صمدیار؛
دانشگاه ملایر، دانشکدهٔ علوم ریاضی و آمار، گروه ریاضی

دریافت ۹۵/۰۴/۰۲ پذیرش ۹۵/۰۷/۰۷

چکیده

در این مقاله به حل عددی معادلات انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های اویلر می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا ماتریس عملیاتی و ماتریس عملیاتی تصادفی چندجمله‌ای‌های اویلر را به‌دست می‌آوریم. تمامی توابع موجود در معادلهٔ انتگرال ولترا تصادفی را با استفاده از سری چندجمله‌ای‌های اویلر تقریب زده و سپس از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های اویلر استفاده می‌کنیم. با این کار حل معادلهٔ انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف به حل یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود، که با روشی مناسب می‌توان آن را حل کرد. سپس کران بالای خطای روش مطرح شده برای حل معادلات انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف را اثبات می‌کنیم. هم‌چنین برای بررسی دقت و کارایی روش چند مثال عددی ارائه می‌شود. نتایج ارائه شده با استفاده از اجرا کردن برنامه‌ای نوشته شده در نرم‌افزار متلب به‌دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال ولترا تصادفی، معادلات انتگرال ولترا منفرد ضعیف، ماتریس‌های عملیاتی، چندجمله‌ای‌های اویلر.

مقدمه

معادلات انتگرال یکی از شاخه‌های علم ریاضی است که کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی و فیزیک دارد. یک معادلهٔ انتگرال را منفرد می‌نامند اگر یکی از حدود انتگرال نامتناهی باشد و یا این‌که هستهٔ معادلهٔ انتگرال در نقطه یا نقاطی از دامنه انتگرال‌گیری بی‌کران شود. معادلات انتگرال منفرد را اولین بار ریاضی‌دان نروژی به‌نام آبل در ۱۸۲۳ معرفی کرد. این‌گونه معادلات در کاربردهای مهندسی و فیزیک نظیر انتقال گرما، رشد کریستال‌ها و مکانیک سیالات ظاهر می‌شوند. امروزه این معادلات به‌دلیل کاربرد زیاد توجه ویژه‌ای را به‌خود معطوف داشته‌اند. از آن‌جاکه حل تحلیلی اغلب معادلات انتگرال بسیار پیچیده و در مواقعی غیرممکن است، محققان بسیاری را به حل عددی این معادلات سوق داده است. در سال‌های اخیر محققان و پژوهش‌گران از روش‌ها و چندجمله‌ای‌های مختلفی برای حل این معادلات استفاده کرده‌اند. از جمله روش‌های هم‌محلی [1]، [2]، گلرکین [3]، موجک‌ها [4]، [5]، روش مبتنی بر ماتریس عملیاتی [6]، روش‌های بدون شبکه [7]، روش‌های تصویری [8]، استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین [9] و توابع ترکیبی [10] برای حل این معادله به‌کار برده شده است. در برخی موارد سیستم بررسی شده به یک منبع اختلال وابسته‌اند. در این موارد برای مدل‌بندی سیستم از معادلات دیفرانسیل تصادفی یا معادلات انتگرال تصادفی استفاده می‌کنیم [14]-[10].

نویسنده مسئول fa_mirzaee@yahoo.com

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

در این مقاله یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال ولترا تصادفی منفرد با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های اویلر ارائه می‌دهیم. معادله بررسی شده در این مقاله بدین‌صورت است:

$$f(t)=f_0+\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} f(s)ds+\int_0^t k(t,s)f(s)dB(s), \quad t\in[0,1], \tag{۱}$$

که در آن $f(t)$ و $k(t,s)$ برای $s,t\in[0,1]$ فرآیندهای تصادفی هستند که بر فضای احتمال یک‌سان (Ω,F,P) تعریف شده‌اند. $k(t,s)$ تابعی معلوم و $f(t)$ تابعی مجهول است که باید تعیین شود. $B(t)$ نیز یک حرکت براونی است. در معادله انتگرال ولترا تصادفی منفرد (۱) انتگرال ولترا اول یک انتگرال منفرد ضعیف وانتگرال دوم یک انتگرال ایتو است.

چندجمله‌ای‌های اویلر

تعریف: چندجمله‌ای‌های اویلرنوع اول با استفاده از رابطهٔ (۲) ساخته می‌شوند [15].

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(t)+E_n(t)=2t^n, \tag{۲}$$

که در آن $\binom{n}{k}$ ضرایب دوجمله‌ای هستند. چهار جمله اول این چندجمله‌ای‌ها بدین‌صورت است:

$$E_0(t)=1,$$
$$E_1(t)=t-\frac{1}{2},$$
$$E_2(t)=t^2-t,$$
$$E_3(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{4}.$$

در رابطهٔ (۲) اگر n از 0 تا N تغییر کند، فرم ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}\binom{N}{0} & \frac{1}{2}\binom{N}{1} & \frac{1}{2}\binom{N}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix} E_0(t) \\ E_1(t) \\ \vdots \\ E_N(t) \end{pmatrix}}_{E(t)}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{pmatrix}}_{X(t)}.$$

از طرفی ماتریس D یک ماتریس پایین مثلثی با درایه‌های قطری غیرصفر است، پس وارون‌پذیر است. در نتیجه می‌توان بردار اویلر را به‌طور مستقیم از رابطهٔ (۳) حساب کرد.

$$E(t)=D^{-1}X(t). \tag{۳}$$

این چندجمله‌ای‌ها دارای ویژگی‌های مفید هستند:

- چندجمله‌ای‌های اویلر با استفاده از رابطهٔ بازگشتی زیر قابل محاسبه‌اند:

$$E_n(t+1)+E_n(t)=2t^n.$$

- مشتق هر چندجمله‌ای اویلر از مرتبهٔ n را می‌توان به‌صورت مضربی از چندجمله‌ای‌های اویلر از مرتبهٔ $(n-1)$ نوشت. یعنی برای $n=1, 2, 3,\ldots$ داریم

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

$$E_n^{'}(t) = nE_{n-1}(t).$$

- ماتریس‌های عملیاتی بر پایهٔ چندجمله‌ای‌های اویلر ماتریس‌های تنک هستند، از این رو، بعد از گسسته‌سازی معادلهٔ انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف، دستگاه حاصل به‌راحتی قابل حل است. هم چنین استفاده از این توابع به‌دلیل داشتن ماتریس‌های عملیاتی تنک باعث کاهش حجم محاسبات می‌شود و به‌همین دلیل یکی از روش‌های مقرون به صرفه برای حل عددی معادلات انتگرال و دیفرانسیل است.
- مقایسه نتایج عددی ارائه شده در این مقاله نشان می‌دهد که استفاده از روش چندجمله‌ای‌های اویلر جواب‌ها را به‌مراتب دقیق‌تر ارائه می‌دهد. هم‌چنین محاسبات نرم‌افزاری برای چنین پایه‌هایی ساده‌تر است و زمان محاسبات به‌نحو مطلوبی کاهش می‌یابد.

تقریب توابع با استفاده از چندجمله‌ای‌های اویلر

قضیهٔ ۱. فرض کنیم f تابعی یک متغیره دلخواه باشد. این تابع را می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای‌های اویلر به‌صورت (۴) تقریب زد:

$$f(t) \simeq f_N(t) = \sum_{i=0}^{N} f_i E_i(t) = F^T E(t) = E(t)^T \mathrm{F}, \qquad (۴)$$

که در آن $E(t)$ بردار چندجمله‌ای‌های اویلر و $F = [f_0, f_1, \cdots, f_N]^T$ بردار ضرایب چندجمله‌ای‌های اویلر است. هم‌چنین ضرایب f_i از طریق این رابطه محاسبه می‌شوند [16]:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{N!}\displaystyle\int_0^1 f^{(N)}(t)dt & i = N, \\ \dfrac{1}{i!}\left(\displaystyle\int_0^1 f^{(i)}(t)dt + \sum_{k=0}^{N-i-1} \dfrac{2(i!)}{k+2}\binom{k+i+1}{k+1}\mathrm{E}_{k+2}(0)\mathrm{f}_{i+k+1}\right) & i = N-1, N-2, \cdots, 0. \end{cases}$$

قضیهٔ ۲. تابع دومتغیره k را می‌توان با استفاده از سری تیلور و سری قطع شده چندجمله‌ای‌های اویلر به‌صورت (۵) تقریب زد:

$$k(t,s) \simeq \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} k_{ij}^t t^i s^j = X^T(t)\mathrm{K}_t X(s),$$
$$k(t,s) \simeq \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} k_{ij}^e E_i(t) E_j(s) = E^T(t)\mathrm{K}_e E(s). \qquad (۵)$$

که در آن درایه‌های ماتریس $K_t = [k_{ij}^t]_{(N+1)\times(N+1)}$ و $K_e = [k_{ij}^e]_{(N+1)\times(N+1)}$ با این روابط محاسبه می‌شوند:

$$k_{ij}^t = \frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^{i+j}k(0,0)}{\partial t^i \partial s^j}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, N,$$
$$K_e = \mathrm{D}^T K_t D \ .$$

ماتریس عملیاتی چندجمله‌ای‌های اویلر

چندجمله‌ای‌های اویلر دارای خواص مهمی هستند. از جمله

$$E_n^{'}(t) = nE_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

با استفاده از این خاصیت داریم

$$\int_0^t E_n(s)ds = \frac{1}{n+1}(\mathrm{E}_{n+1}(\mathrm{t}) - \mathrm{E}_{n+1}(0)), \quad n = 0,1,\cdots.$$

پس انتگرال بردار $E(\mathrm{t})$ بدین‌صورت است:

$$\int_0^t E(s)ds = PE(t) + \frac{1}{N+1}E_{N+1}(t)I_{N+1}, \tag{۶}$$

که در آن I_{N+1} آخرین ستون ماتریس همانی از مرتبهٔ $(N+1)$ است و P ماتریس عملیاتی انتگرال‌گیری چندجمله‌ای‌های اویلر است که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$P = \begin{pmatrix} -E_1(0) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-E_2(0)}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-E_N(0)}{N} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N} \\ \frac{-E_{N+1}(0)}{N+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

با صرف نظر کردن از جملهٔ دوم درعبارت (۶) داریم:

$$\int_0^t E(s)ds \simeq PE(t). \tag{۷}$$

با استفاده از روابط (۴) و (۷) ، انتگرال هر تابع دلخواهی مثل f را می‌توان به‌صورت (۸) تقریب زد:

$$\int_0^t f(s)ds \simeq \int_0^t F^T E(\mathrm{s})\mathrm{ds} \simeq F^T PE(t). \tag{۸}$$

گاهی لازم است که حاصل‌ضرب بردار $E(\mathrm{t})$ در $E^T(t)$ در برداری دلخواه مثل $C \in \mathbb{R}^{N+1}$ محاسبه شود. طبق [16] داریم:

$$\begin{aligned} E(t)E^T(t)C &= (\mathrm{D}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{t}))\mathrm{E}^T(\mathrm{t})\mathrm{C} = \mathrm{D}^{-1}[\mathrm{E}^T(\mathrm{t})\mathrm{C}, t\,\mathrm{E}^T(\mathrm{t})\mathrm{C}, \ldots, t^N\,\mathrm{E}^T(\mathrm{t})\mathrm{C}]^T \\ &= D^{-1}[\sum_{i=0}^N c_i E_i(t), \sum_{i=0}^N c_i t E_i(t), \ldots, \sum_{i=0}^N c_i t^N E_i(t)]^T. \end{aligned} \tag{۹}$$

حال توابع $t^k E_i(t)$ را برای $k = 0,1,\ldots,N$ با استفاده از سری اویلر به‌صورت (۱۰) تقریب می‌زنیم:

$$t^k E_i(t) \simeq E^T(t)e_{k,i}, \tag{۱۰}$$

که در آن $e_{k,i} = [\mathrm{e}_0^{k,i}, \mathrm{e}_1^{k,i}, \ldots, \mathrm{e}_N^{k,i}]^T$ بردار ضرایب اویلر است. از طرفی با استفاده از رابطهٔ (۳) داریم:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 E(t)E^T(t)dt = \int_0^1 (\mathrm{D}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{t}))(\mathrm{D}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{t}))^T dt \\ &= D^{-1}(\int_0^1 X(t)X^T(t)dt)(D^{-1})^T = D^{-1}H(D^{-1})^T. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در آن H ماتریس هیلبرت از مرتبهٔ $N+1$ است.

با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\int_0^1 t^k E_i(t)E(t)dt \simeq (\int_0^1 E(t)E^T(t)dt)e_{k,i} = Qe_{k,i}.$$

بنابراین برای $i,k = 0,1,\ldots,N$ داریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

$$e_{k,i} \simeq Q^{-1}\int_0^1 t^k E(t)E_i(t)dt = Q^{-1}\begin{pmatrix} \int_0^1 t^k E_i(t)E_0(t)dt \\ \int_0^1 t^k E_i(t)E_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^1 t^k E_i(t)E_N(t)dt \end{pmatrix}.$$

و با استفاده از رابطهٔ (۱۰) داریم:

$$\sum_{i=0}^{N} c_i t^k E_i(t) \simeq \sum_{i=0}^{N} c_i (E^T(t)\mathrm{e}_{k,i}) = \sum_{i=0}^{N} c_i (\sum_{j=0}^{N} e_j^{k,i} E_j(t)) = \sum_{j=0}^{N} E_j(t)(\sum_{i=0}^{N} c_i e_j^{k,i})$$

$$= E^T(t)\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N} c_i e_0^{k,i} \\ \sum_{i=0}^{N} c_i e_1^{k,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N} c_i e_N^{k,i} \end{pmatrix} = E^T(t)[\mathrm{e}_{k,0}, \mathrm{e}_{k,1}, \ldots, \mathrm{e}_{k,N}]C = E^T(t)\tilde{\mathrm{F}}_k, \qquad (۱۲)$$

که در آن $\tilde{F}_k = E_k C, \quad k = 0,1,\ldots,\mathrm{N}$ و E_k یک ماتریس از مرتبهٔ $(N+1)\times(\mathrm{N}+1)$ است که ستون‌های آن بردار $e_{k,i}, \quad i = 0,1,\ldots,N$ است. حال با تعریف ماتریس $\tilde{C} = [\tilde{\mathrm{F}}_0, \tilde{\mathrm{F}}_1, \ldots, \tilde{\mathrm{F}}_N]$ و استفاده از روابط (۹) و (۱۲) داریم:

$$E(t)E^T(t)C \simeq \hat{C}E(t),$$

که $\hat{C} = D^{-1}\tilde{C}^T$.

ماتریس عملیاتی تصادفی چندجمله‌ای‌های اویلر

انتگرال ایتوی بردار چندجمله‌ای‌های اویلر را می‌توان بدین‌صورت تقریب زد:

$$\int_0^t E(s)dB(s) = D^{-1}\int_0^t X(s)dB(s).$$

از طرفی

$$\int_0^t X(s)dB(s) = \begin{pmatrix} \int_0^t dB(s) \\ \int_0^t s dB(s) \\ \vdots \\ \int_0^t s^N dB(s) \end{pmatrix} = X(t)B(\mathrm{t}) - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t B(s)\mathrm{ds} \\ \vdots \\ N\int_0^t s^{N-1}B(\mathrm{s})\mathrm{ds} \end{pmatrix}.$$

حال انتگرال‌های ایجاد شده در سمت راست عبارت اخیر را با روش انتگرل‌گیری ذوزنقه‌ای تقریب می‌زنیم. هم‌چنین $B(t)$ و $B(\frac{t}{2})$ را به‌ازای $0 \le t \le 1$ به‌ترتیب با $B(0.5)$ و $B(0.25)$ تقریب می‌زنیم. در نتیجه

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

$$\int_0^t \mathrm{E}(s)dB(s) = D^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix} B(0.5) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}B(0.5)-\frac{1}{2}B(0.25) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-\frac{N}{4})B(0.5)-\frac{N}{2^N}B(0.25) \end{pmatrix}}_{\Lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{pmatrix}$$

$$= D^{-1}\Lambda X(t) = \underbrace{D^{-1}\Lambda D}_{P_S} E(t) = \mathrm{P}_S\, E(t).$$

در نتیجه انتگرال ایتوی هر تابع دلخواهی مانند f را می‌توان بدین‌صورت تقریب زد:

$$\int_0^t f(s)dB(s) \simeq \int_0^t F^T E(\mathrm{s})\,\mathrm{dB(s)} \simeq F^T P_S E(t).$$

روش عددی

در این بخش به حل عددی معادلات انتگرال ولترا تصادفی منفرد (۱) با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های اویلر می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا توابع $f(t)$ و $k(t,s)$ را با استفاده از سری قطع شده چندجمله‌ای‌های اویلر بدین‌صورت تقریب می‌زنیم:

$$f(t) \simeq F^T E(t) \simeq E^T(t)F,$$
$$k(t,s) \simeq E^T(t)K_e E(s) \simeq E^T(s)K_e^T E(t).$$

با جای‌گذاری این تقریب‌ها در معادلهٔ انتگرال (۱) و استفاده از رابطهٔ (۳) داریم:

$$F^T E(t) = f_0 + F^T D^{-1}\int_0^t \frac{X(s)}{\sqrt{t-s}}ds + E^T(t)K_e\hat{F}P_S E(t). \qquad (۱۳)$$

از طرفی داریم [18]:

$$\int_0^t \frac{s^n}{\sqrt{t-s}}ds = \frac{\sqrt{\pi}t^{(n+\frac{1}{2})}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}.$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int_0^t \frac{X(s)}{\sqrt{t-s}}ds = [\frac{\sqrt{\pi}t^{\frac{1}{2}}\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}, \frac{\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}, \cdots, \frac{\sqrt{\pi}t^{(N+\frac{1}{2})}\Gamma(\mathrm{N}+1)}{\Gamma(\mathrm{N}+\frac{3}{2})}]^T = \Phi(\mathrm{t}).$$

در نتیجه رابطهٔ (۱۳) را می‌توان بدین‌صورت نوشت:

$$F^T E(t) = f_0 + F^T D^{-1}\Phi(t) + E^T(t)K_e\hat{F}P_S E(t).$$

حال این معادله را در $(N+1)$ نقطهٔ نیوتن- کاتس که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، گسسته‌سازی می‌کنیم

$$t_i = \frac{2i+1}{2(N+1)}, \quad i = 0,1,\cdots,N.$$

در نتیجه

$$F^T E(t_i) = f_0 + F^T D^{-1}\Phi(t_i) + E^T(t_i)K_e\hat{F}P_S E(t_i). \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

با حل این دستگاه و پیدا کردن بردار مجهول F مقدار $f(\mathrm{t})$ از طریق رابطهٔ $f(t) \simeq F^T E(t)$ تقریب زده می‌شود.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

همگرایی و آنالیز خطا

قضیهٔ ۳. [19] اگرتابع یک متغیره f و تابع دومتغیره k توابعی هموار باشند و f_N و k_N تقریب این توابع با استفاده از سری قطع شده چندجمله‌ای‌های اویلر باشد، در این صورت کران خطا بدین‌صورت است:

$$\|f-f_N\|_\infty \le C\bar{F}(2\pi)^{-N},$$
$$\|k-k_N\|_\infty \le CN(2\pi)^{-N},$$

که در آن $\bar{F}=\sup\{\|f^{(i)}\|_\infty, i=0,1,2,\ldots\}$ و C یک ثابت مثبت است.

قضیهٔ ۴. [20] اگر تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و تابع g در این بازه تغییر علامت ندهد، در این صورت $\eta\in[a,b]$ ای وجود داردکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\eta)\int_a^b g(x)dx.$$

قضیهٔ ۵. فرض کنیم f و f_N به‌ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی معادله (۱) باشند. به‌علاوه فرض کنید

۱. $|f(t)|\le\rho, \quad \forall t\in[0,1].$

۲. $|k(t,s)|\le M, \quad \forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1].$

۳. $1-\|B\|_\infty(M+\alpha(N))>0.$

در این صورت

$$|f(t)-f_N(t)|\le\frac{2|f(\eta)-f_N(\eta)|+\|B\|_\infty\alpha(N)\rho}{1-\|B\|_\infty(M+\alpha(N))},$$

که در آن

$$\alpha(N)=CN(2\pi)^{-N}.$$

اثبات: معادله انتگرال زیر را داریم:

$$f(t)=f_0+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}f(s)ds+\int_0^t k(t,s)f(s)dB(s), \quad t\in[0,1].$$

تقریب این معادله بدین‌صورت است:

$$f_N(t)=f_0+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}f_N(s)ds+\int_0^t k_N(t,s)f_N(s)dB(s), \quad t\in[0,1].$$

در نتیجه:

$$f(t)-f_N(t)=\int_0^t\frac{f(s)-f_N(s)}{\sqrt{t-s}}ds+\int_0^t(k(t,s)f(s)-k_N(t,s)f_N(s))dB(s).$$

با فرض پیوسته بودن تابع $f(t)$، چون تابع با ضابطهٔ $s\to\frac{1}{\sqrt{t-s}}$ در بازه $[0,t]$ همواره مثبت است، طبق قضیهٔ ۴، $\eta\in[0,t]$ای وجود دارد که

$$\int_0^t\frac{f(s)-f_N(s)}{\sqrt{t-s}}ds=(f(\eta)-f_N(\eta))\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}ds=2(f(\eta)-f_N(\eta))\sqrt{t}.$$

بنابراین

$$|f(t)-f_N(t)|\le 2|f(\eta)-f_N(\eta)|\|\sqrt{t}\|_\infty+\|B\|_\infty|k(t,s)f(s)-k_N(t,s)f_N(s)|. \qquad (۱۴)$$

از طرفی

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

$$\left|k(t,s)f(s)-k_N(t,s)f_N(s)\right|\le\left|k(t,s)\right|\left|f(s)-f_N(s)\right|+\left|k(t,s)-k_N(t,s)\right|(\left|f(s)-f_N(s)\right|+\left|f(s)\right|).$$

با استفاده از قضیهٔ ۳ و فرض اول و دوم داریم:

$$\left|k(t,s)f(s)-k_N(t,s)f_N(s)\right|\le(\mathrm{M}+\alpha(\mathrm{N}))\left|f(s)-f_N(s)\right|+\alpha(\mathrm{N})\rho. \qquad (۱۵)$$

با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\left|f(t)-f_N(\mathrm{t})\right|\le 2\left|f(\eta)-f_N(\eta)\right|+\|B\|_\infty((\mathrm{M}+\alpha(\mathrm{N}))\left|f(s)-f_N(s)\right|+\alpha(\mathrm{N})\rho).$$

در نهایت با استفاده از فرض سوم کران این خطا نتیجه می‌شود:

$$\left|f(t)-f_N(t)\right|\le\frac{2\left|f(\eta)-\mathrm{f}_N(\eta)\right|+\|B\|_\infty\alpha(N)\rho}{1-\|B\|_\infty(\mathrm{M}+\alpha(\mathrm{N}))}.$$

نتایج عددی

در این بخش برای نشان دادن دقت و کارایی این روش چند مثال ارائه می‌کنیم. نتایج ارائه شده با اجرا کردن برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب به‌دست آمده است. توجه شود که در این نتایج m تعداد پایه‌های بلاک پالس استفاده شده و n تعداد پایه‌های اویلر است.

مثال۱. معادلهٔ انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(t)=\frac{1}{12}-\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}f(s)ds-\int_0^t\sin sf(s)dB(s),\quad t\in[0,1],$$

که جواب دقیق این مسئله بدین‌صورت است:

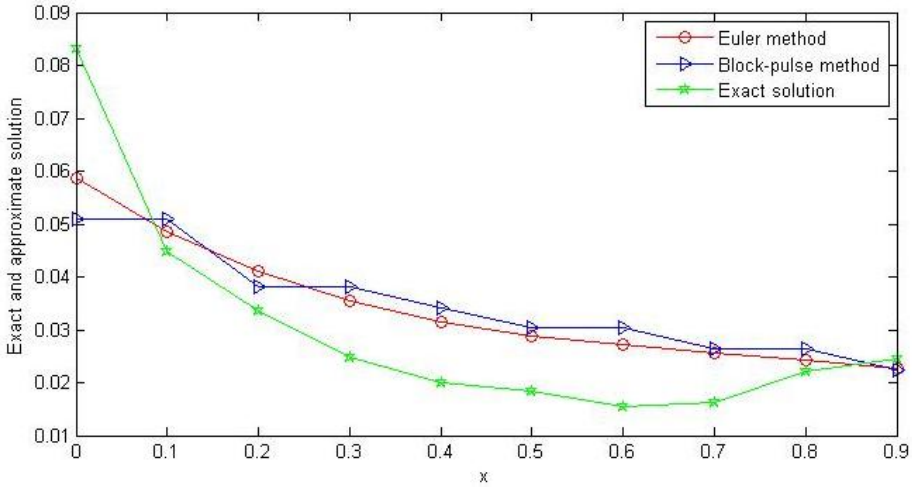
$$f(t)=\frac{1}{12}\exp(-\frac{t}{4}+\frac{\sin 2t}{8}-2\sqrt{t}-\int_0^t\sin sdB(s)).$$

در جدول ۱ مقادیر دقیق و تقریبی برای حل این معادله با دو روش سری چندجمله‌ای‌های اویلر وتوابع بلاک- پالس برای مقادیر $m=6,n=3$ و $m=12,n=6$ ارائه شده است. هم‌چنین نمودارهای جواب دقیق و تقریبی به‌ازای این مقادیر m,n در شکل‌های ۱ و ۲ آورده شده است.

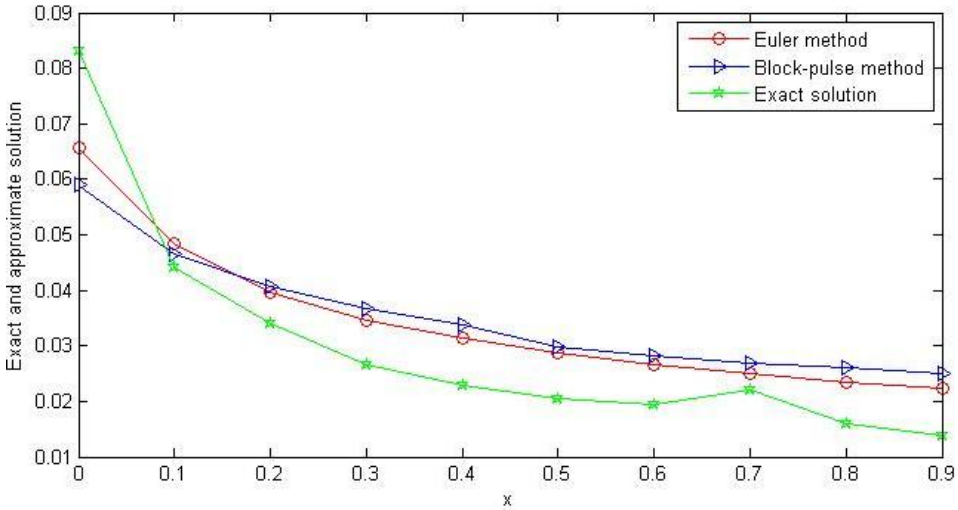
جدول۱. جواب دقیق و جواب تقریبی مثال ۱

m=۶, n=۳				m=۱۲, n=۶		
نقاط	جواب دقیق	روش بلاک پالس	روش اویلر	**جواب دقیق**	**روش بلاک پالس**	روش اویلر
۰	۰/۰۸۳۳	۰/۰۵۱۰	۰/۰۵۸۷	**۰/۰۸۳۳**	**۰/۰۵۸۹**	۰/۰۶۵۶
۰/۱	۰/۰۴۴۹	۰/۰۵۱۰	۰/۰۴۸۷	**۰/۰۴۴۲**	**۰/۰۴۶۶**	۰/۰۴۸۵
۰/۲	۰/۰۳۳۵	۰/۰۳۸۱	۰/۰۴۱۱	**۰/۰۳۴۱**	**۰/۰۴۰۷**	۰/۰۳۹۷
۰/۳	۰/۰۲۴۸	۰/۰۳۸۱	۰/۰۳۵۵	**۰/۰۲۶۶**	**۰/۰۳۶۷**	۰/۰۳۴۷
۰/۴	۰/۰۲۰۰	۰/۰۳۴۱	۰/۰۳۱۶	**۰/۰۲۲۸**	**۰/۰۳۳۸**	۰/۰۳۱۳
۰/۵	۰/۰۱۸۴	۰/۰۳۰۵	۰/۰۲۸۹	**۰/۰۲۰۶**	**۰/۰۲۹۷**	۰/۰۲۸۷
۰/۶	۰/۰۱۵۴	۰/۰۳۰۵	۰/۰۲۷۱	**۰/۰۱۹۵**	**۰/۰۲۸۳**	۰/۰۲۶۶
۰/۷	۰/۰۱۶۳	۰/۰۲۶۴	۰/۰۲۵۷	**۰/۰۲۲۰**	**۰/۰۲۷۰**	۰/۰۲۴۹
۰/۸	۰/۰۲۲۰	۰/۰۲۶۴	۰/۰۲۴۴	**۰/۰۱۶۰**	**۰/۰۲۶۰**	۰/۰۲۳۵
۰/۹	۰/۰۲۴۴	۰/۰۲۲۵	۰/۰۲۲۷	**۰/۰۱۴۰**	**۰/۰۲۴۹**	۰/۰۲۲۵

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]



شکل۱. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=6, n=3$ مثال۱



شکل۲. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=12, n=6$ مثال ۱

مثال۲. معادلهٔ انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(t)=\frac{1}{24}-\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} f(s)ds-\int_0^t (s+4)\sqrt{\cos s}\, f(s)dB(s), \quad t\in[0,1],$$

که جواب دقیق این مسئله بدین‌صورت است:

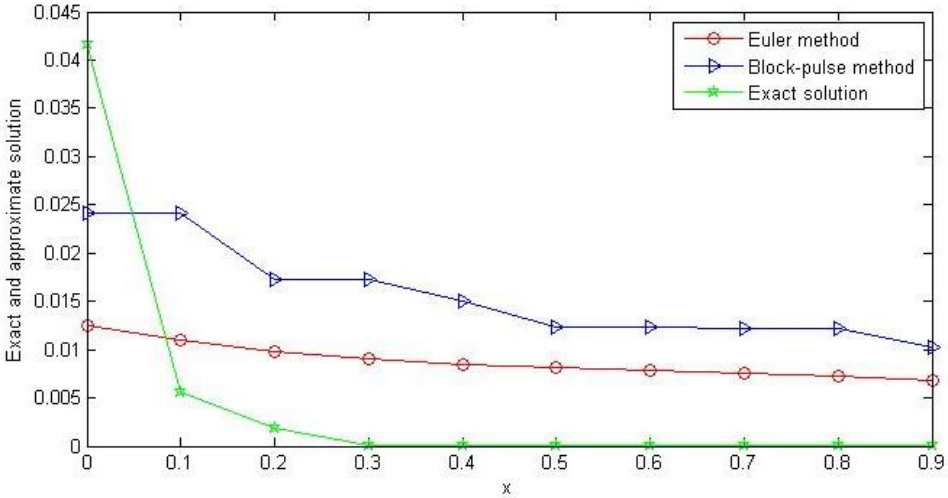
$$f(t)=\frac{1}{24}\exp(-2\sqrt{t}-\frac{1}{2}(t^2+8t+14)\sin t-(t+4)\cos t+4-\int_0^t (s+4)\sqrt{\cos s}\, dB(s)).$$

در جدول ۲ جواب دقیق و تقریبی برای حل این معادله با دو روش سری چندجمله‌ای‌های اویلر وتوابع بلاک- پالس برای مقادیر $m=6, n=3$ و $m=12, n=6$ ارائه شده است. هم‌چنین نمودارهای جواب دقیق و تقریبی به‌ازای این مقادیر m, n در شکل‌های ۳ و ۴ آورده شده است.

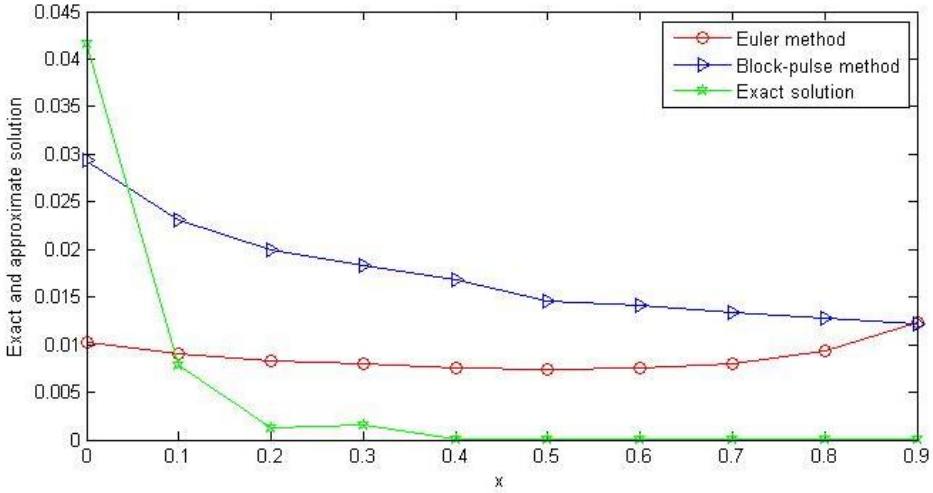
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

جدول۲. جواب دقیق و جواب تقریبی مثال ۲

	m=۶, n=۳			m=۱۲, n=۶		
نقاط	جواب دقیق	روش بلاک پالس	روش اویلر	جواب دقیق	روش بلاک پالس	روش اویلر
۰	۰/۰۴۱۷	۰/۰۲۴۱	۰/۰۱۲۵	۰/۰۴۱۷	۰/۰۲۹۳	۰/۰۱۰۲
۰/۱	۰/۰۰۵۶	۰/۰۲۴۱	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۷۸	۰/۰۲۳۲	۰/۰۰۹۰
۰/۲	۰/۰۰۱۹	۰/۰۱۷۲	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۱۲	۰/۰۲۰۰	۰/۰۰۸۴
۰/۳	۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۷۲	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۱۵	۰/۰۱۸۴	۰/۰۰۷۹
۰/۴	۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۵۰	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۰۱	۰/۰۱۶۸	۰/۰۰۷۶
۰/۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۲۴	۰/۰۰۸۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۷۵
۰/۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۲۴	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۴۱	۰/۰۰۷۶
۰/۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۳۳	۰/۰۰۸۱
۰/۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۲۸	۰/۰۰۹۴
۰/۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۲۲	۰/۰۱۲۴



شکل۳. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=6, n=3$ مثال ۲



شکل۴. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=12, n=6$ مثال ۲

مثال۳. معادلهٔ انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(t)=\frac{1}{48}-\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} f(s)ds-\int_0^t 2t\cos s f(s)dB(s), \quad t\in[0,1],$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

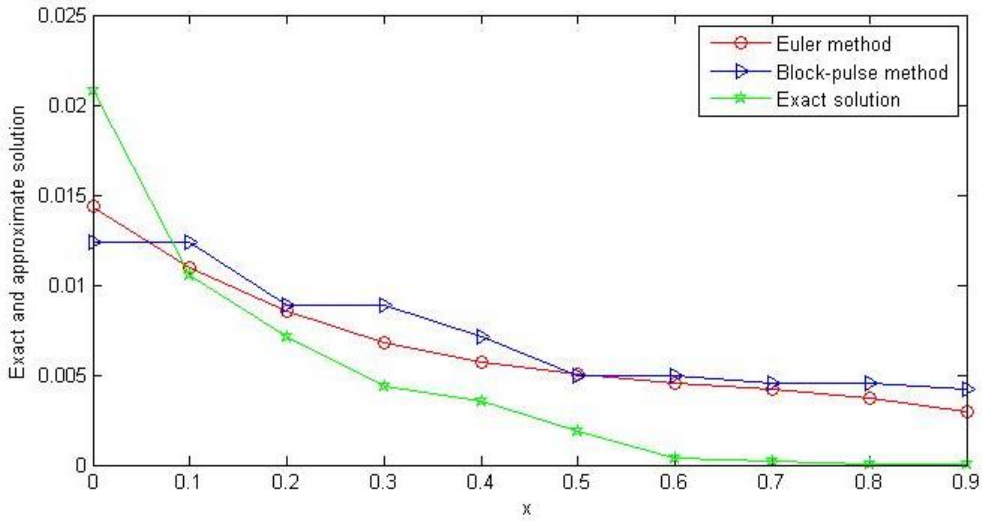
که جواب دقیق این مسئله بدین‌صورت است:

$$f(t)=\frac{1}{48}\exp(-2\sqrt{t}-t^3-\frac{1}{2}t\sin 2t-\int_0^t 2t\cos s dB(s)).$$

در جدول ۳ جواب دقیق و جواب تقریبی برای حل این معادله با دو روش سری چندجمله‌ای‌های اویلر وتوابع بلاک-پالس برای مقادیر $m=6,n=3$ و $m=12,n=6$ ارائه شده است. هم‌چنین نمودارهای جواب دقیق و تقریبی به‌ازای این مقادیر m,n در شکل‌های ۵ و ۶ آورده شده است.

جدول۳. جواب دقیق و جواب تقریبی مثال ۳

	m=۶, n=۳			m=۱۲, n=۶		
نقاط	جواب دقیق	روش بلاک پالس	روش اویلر	جواب دقیق	روش بلاک پالس	روش اویلر
۰	۰/۰۲۰۸	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۴۳	۰/۰۲۰۸	۰/۰۱۵۰	۰/۰۱۶۴
۰/۱	۰/۰۱۰۶	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۱۰	۰/۰۱۰۵	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۲۰
۰/۲	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۹
۰/۳	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۸۷
۰/۴	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۷۸
۰/۵	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۷۲
۰/۶	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۶۸
۰/۷	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۶۴
۰/۸	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۶۲
۰/۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۶۰



شکل۵. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=6,n=3$ مثال ۳

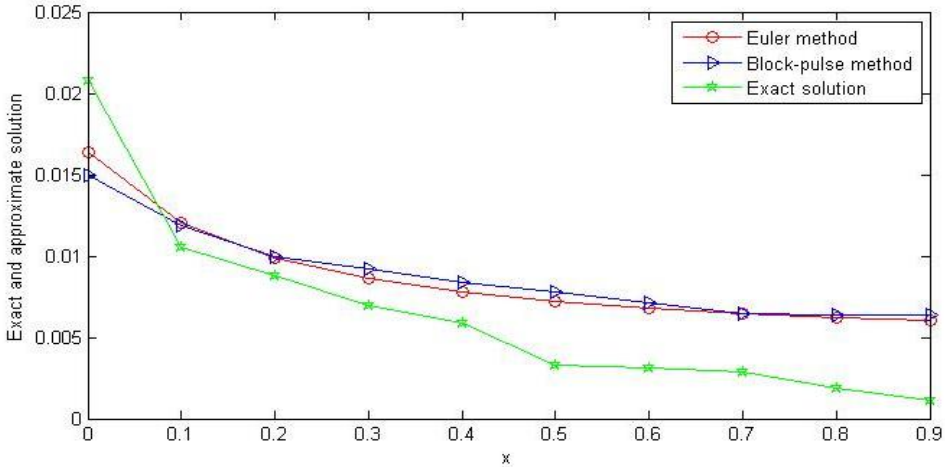
مثال۴. معادلهٔ انتگرال ولترا تصادفی منفرد ضعیف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(t)=\frac{1}{12}-\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}f(s)ds-\int_0^t e^t\sin s f(s)dB(s),\quad t\in[0,1],$$

که جواب دقیق این مسئله بدین‌صورت است:

$$f(t)=\frac{1}{12}\exp(-2\sqrt{t}-\frac{1}{4}te^{2t}+\frac{1}{8}e^{2t}\sin 2t-\int_0^t e^t\sin s dB(s)).$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

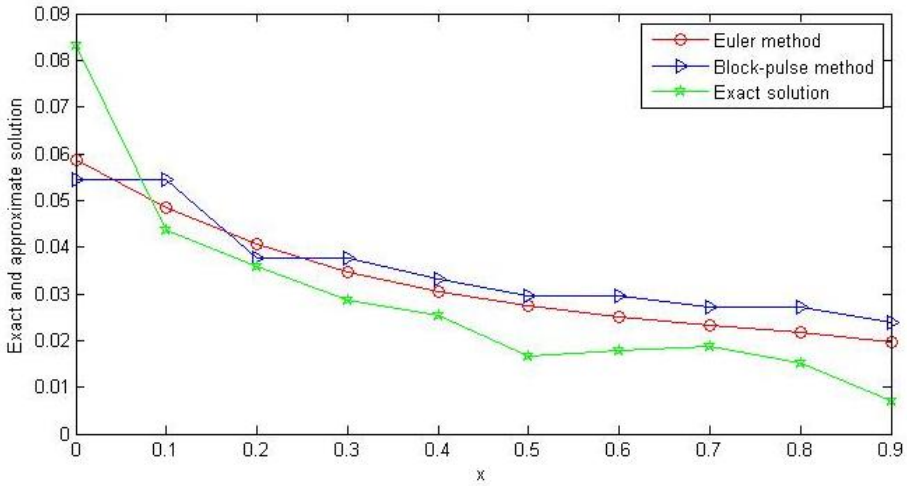


شکل۶. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=12, n=6$ مثال ۳

در جدول ۴ جواب دقیق و جواب تقریبی برای حل این معادله با دو روش سری چندجمله‌ای‌های اویلر وتوابع بلاک-پالس برای مقادیر $m=6, n=3$ و $m=12, n=6$ ارائه شده است. هم‌چنین نمودارهای جواب دقیق و تقریبی به‌ازای این مقادیر m, n در شکل‌های ۷ و ۸ آورده شده است.

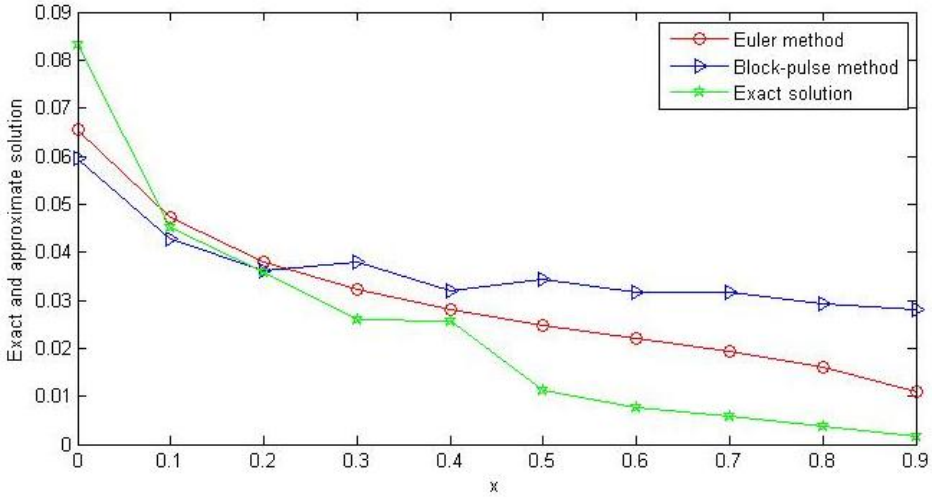
جدول۴. جواب دقیق و جواب تقریبی مثال ۴

	m=۶, n=۳			m=۱۲, n=۶		
نقاط	جواب دقیق	روش بلاک پالس	روش اویلر	جواب دقیق	روش بلاک پالس	روش اویلر
۰	۰/۰۸۳۳	۰/۰۵۴۵	۰/۰۵۸۷	۰/۰۸۳۳	۰/۰۵۹۴	۰/۰۶۵۵
۰/۱	۰/۰۴۳۶	۰/۰۵۴۵	۰/۰۴۸۴	۰/۰۴۵۲	۰/۰۴۲۸	۰/۰۴۷۳
۰/۲	۰/۰۳۶۰	۰/۰۳۷۶	۰/۰۴۰۶	۰/۰۳۵۷	۰/۰۳۶۲	۰/۰۳۷۸
۰/۳	۰/۰۲۸۷	۰/۰۳۷۶	۰/۰۳۴۷	۰/۰۲۶۱	۰/۰۳۸۰	۰/۰۳۲۱
۰/۴	۰/۰۲۵۲	۰/۰۳۳۲	۰/۰۳۰۴	۰/۰۲۵۵	۰/۰۳۲۰	۰/۰۲۸۱
۰/۵	۰/۰۱۶۸	۰/۰۲۹۵	۰/۰۲۷۴	۰/۰۱۱۳	۰/۰۳۴۳	۰/۰۲۴۸
۰/۶	۰/۰۱۷۹	۰/۰۲۹۵	۰/۰۲۵۲	۰/۰۰۷۷	۰/۰۳۱۸	۰/۰۲۲۰
۰/۷	۰/۰۱۸۸	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۳۴	۰/۰۰۵۸	۰/۰۳۱۵	۰/۰۱۹۴
۰/۸	۰/۰۱۵۲	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۱۷	۰/۰۰۳۸	۰/۰۲۹۳	۰/۰۱۶۱
۰/۹	۰/۰۰۷۱	۰/۰۲۳۷	۰/۰۱۹۶	۰/۰۰۱۸	۰/۰۲۸۰	۰/۰۱۰۸



شکل۷. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=6, n=3$ مثال ۴

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]



شکل۸. نمودار جواب دقیق و تقریبی برای $m=12, n=6$ مثال ۴

نتیجه‌گیری

از آن‌جاکه حل تحلیلی بسیاری از معادلات انتگرال تصادفی غیرممکن و یا بسیار پیچیده است، از روش‌های عددی برای حل آن‌ها استفاده می‌شود. ما در این مقاله معادلات انتگرال تصادفی منفرد ضعیف را با استفاده از روش ماتریس عملیاتی سری قطع شده چندجمله‌ای‌های اویلر حل کردیم. نتایج عددی به‌دست آمده از این روش را با روش توابع بلاک-پالس مقایسه کردیم. نتایج ارائه شده گویای کارایی و دقت این روش نسبت به‌روش توابع بلاک-پالس است.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم مقاله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله شد و هم‌چنین از سردبیر مجله و اعضای هیئت تحریریه قدردانی می‌شود.

منابع

1. Saadatmandi A., Dehghan M., "A collocation method for solving Abel's integral equations of first and second kinds", Z. Naturforsch., 63a (10) (2008) 752-756.
2. Okayama T., Matsuo T., Sugihara M., "Sinc-collocation methods for weakly singular Fredholm integral equations of the second kind", J. Comput. Appl. Math., 234 (2010) 1211-1227.
3. Cao Y., Xu Y., "Singularity preserving Galerkin methods for weakly singular Fredholm integral equations", J. Int. Equ. Appl., 6 (1994) 303-334.
4. Lakestani M., Saray B. N., Dehghan M., "Numerical solution for the weakly singular Fredholm integro differential equations using Legendre multiwavelets", J. Comput. Appl. Math., 235 (2011) 3291-3303.
5. Maleknejad K., Nosrati M., Najati E., "Wavelet Galerkian method for solving singular integral equations", Comput. Appl. Math., 31 (2012) 373-390.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]

6. Dixit S., Pandey R.K., Kumar S., Singh O.P., "Solution of the generalized Abel integral equation by using almost operational matrix", American J. Comput. Math.,1 (2011) 226–234.
7. Assari P., Adidbi H., Dehghan M., "The numerical solution of weakly singular integral equations based on the meshless product integration (MPI) method with error analysis", Appl. Numer. Math., 81 (2014) 76-93.
8. Pedas A., Vainikko G., "Smoothing transformation and piecewise polynomial projection methods for weaklysingular Fredholm integral equations", Commun. Pure Appl. Anal., 5 (2006) 395-413.
9. Pandey R. K., Mandal B. N., "Numerical solution of a system of generalized Abel integral equations using Bernstein polynomials", J. Adv. Res. Sci. Comput., 2 (2) (2010) 44-53.
10. Cao Y., Huang M., Liu L., Xuc Y., "Hybrid collocation methods for Fredholm integral equations with weakly singular kernels", Appl. Numer. Math., 57 (2007) 549-561.
11. Khodabin M., Maleknejad K., Rostami M., Nouri M., "Numerical solution of stochastic differential equations by second order Runge–Kutta methods", Math. Comput. Model., 53 (2011) 1910-1920.
12. Cortes J.C., Jodar L., Villafuerte L., "Numerical solution of random differential equations: a mean square approach", Appl. Math. Model., 45 (2007) 757-765.
13. Jankovic S., Ilic D., "One linear analytic approximation for stochastic integro-differential eauations", Acta Math. Sci., 30B (4) (2010)1073-1085.
14. Mirzaee F., Hadadiyan E., "A collocation technique for solving nonlinear stochastic Itˆo-Volterra integral equations", Appl. Math. Comput. , 247 (2014) 1011-1020.
15. Mirzaee F., Bimesl S., "Numerical solutions of systems of high-order Fredholm integro-differential equations using Euler polynomials", Appl. Math. Model., 39(22) (2015) 6767-6779.
16. Mirzaee F., Bimesl S., "Solving systems of high-order linear differential–difference equations via Euler matrix method", J. Egyptian Math. Soc., 23(2) (2015) 286-291.
17. Bazm S., "Bernoulli polynomials for the numerical solution of some classes of linear and nonlinear integral equations", J. Comput. Appl. Math., 275 (2015) 44–60.
18. Singh V. K., Pandey R. K., Singh O. P., "New stable numerical solutions of Singular integral equations of Abel type by using normalized Bernstein polynomials", Appl. Math. Sci., 3 (5) (2009) 241-255.
19. Krylov V.I.," Approximate calculation of integrals", Dover publications, Mineola, New York, 1962.
20. Rudin W., "Principles of Mathematical Analysis", 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York (1976).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1397.4.1.7.2]
[DOI: 10.29252/mmr.4.1.91]