

ضرایب لیاپونوف و کاربرد آن‌ها در فیزیک

مجید گازر، نسرين صدری*

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی

دریافت ۹۳/۱۱/۰۷

پذیرش ۹۴/۰۷/۲۲

چکیده

نظریه صورت بهنجار یکی از مهم‌ترین ابزارها برای تجزیه و تحلیل موضعی دستگاه‌های دینامیکی در نزدیکی نقاط تعادل و جواب‌های تناوبی است. ایده اصلی در این نظریه استفاده از قسمت خطی دستگاه است که با اعمال تغییر متغیرهای حالت به ساده کردن دستگاه اولیه کمک می‌کند. دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن با فضای حالت دوبعدی را در نظر بگیرید که قسمت خطی آن یک جفت مقدار ویژه موهومی دارد (تکینی هوف). تا کنون تنها ضرایب لیاپونوف تا مرتبه ۲، برای این دستگاه‌های تکین محاسبه شده است. در این مقاله با به‌کارگیری ابزار جبر لی، ضرایب صورت بهنجار (ضرایب لیاپونوف) را برای این دستگاه، تا مرتبه ۳ بر حسب مشتقات قسمت غیرخطی محاسبه می‌کنیم. همچنین به کمک ابزارهای نظریه انفراد، شکافت سراسری را برای این‌گونه دستگاه‌ها در حالت کلی محاسبه می‌کنیم. و متناظراً ثابت می‌کنیم که بررسی نقاط تعادل و مدارهای تناوبی حدی یک دستگاه تکین هوف تعمیم یافته (کانونی ضعیف از مرتبه k) با بسط تیلور صورت بهنجار تا درجه $2k + 1$ به‌صورت کامل مشخص می‌شود و انشعابات متناظر برای دستگاه تکین هوف و هوف تعمیم یافته تا مرتبه کانونی ۲ را تحلیل می‌کنیم. در پایان معادلات دستگاه لینار و یک مدار الکتریکی غیرخطی را به کمک روابط ریاضی، مدل‌سازی و صورت بهنجار را برای آن‌ها محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: صورت بهنجار، تکینی هوف، ضرایب کانونی، دستگاه لینار، مدار الکتریکی غیرخطی.

مقدمه

تاریخچه بررسی‌ها روی صورت بهنجار به بیش از صد سال پیش بازمی‌گردد. زیرا این ابزار در بررسی خواص و انشعابات دستگاه‌های دینامیکی نقش مهم و اساسی ایفا می‌کند. از طرف دیگر بسیاری از پدیده‌ها در علوم مهندسی، فیزیک، شیمی و مانند آن، با یک دستگاه دینامیکی غیرخطی مدل‌سازی می‌شوند. این دستگاه‌های غیرخطی، دینامیک پیچیده‌ای دارند و بررسی آن‌ها برای مهندسان و فیزیک‌دانان دشوار است. از جمله ابزارهایی که برای ساده کردن این دستگاه‌ها به کار برده می‌شود، نظریه صورت بهنجار است. ایده اصلی در این نظریه استفاده از یک تغییر متغیر نزدیک به همانی است که میدان برداری را به ساده‌ترین شکل تبدیل کند، به‌طوری‌که دستگاه ثانوی بسیاری از خواص دستگاه اولی را داشته باشد [3]، [5]، [17].

در اکثر دستگاه‌های غیرخطی، دینامیک و نحوه رفتار دستگاه از جنبه وقوع انشعاب، ارتباط مستقیمی با دوره‌های

*نویسنده مسئول n.sadri@math.iut.ac.ir

حدی دارد. از جمله ابزارهای قدرتمند در بررسی پایداری و ناپایداری دوره‌های حدی، صورت بهنجار و قضیهٔ خمینه مرکزی^۱ است. از طرف دیگر بررسی پایداری این دوره‌ها در نزدیکی نقاط تعادل دستگاه، نیاز به محاسبه ضرایب لیاپونوف^۲ (ضرایب صورت بهنجار) دارد. از جمله انشعابات موضعی که بر اساس وقوع آن، دوره‌های حدی تولید می‌شوند، انشعاب هوپف است [7]. ضرایب لیاپونوف برای انشعاب هوپف تا کنون تا مرتبهٔ ۲ محاسبه شده‌اند.

تا کنون روش‌های زیادی از جمله روش پوانکاره، روش مقدار نقطهٔ تکین و روش اختلال برای محاسبه ضرایب لیاپونوف معرفی شده است. قابل ذکر است که دو روش پوانکاره و مقدار نقطهٔ تکین تنها برای دستگاه‌های از بعد دو کارآمد است، در غیر این صورت ابتدا باید به کمک ابزار خمینهٔ مرکزی دستگاه را کاهش و سپس از این دو روش استفاده کرد. در حالی که روش اختلال چنین محدودیتی را ندارد.

ما در این مقاله برای آن دسته از دستگاه‌هایی که قسمت خطی آن‌ها دارای یک جفت مقدار ویژهٔ موهومی است (تکینی هوپف)، اولین و دومین ضریب لیاپونوف را بر حسب مشتقات قسمت غیرخطی، محاسبه و شرط تشدید را برای این دستگاه‌های تکین تحقیق می‌کنیم. همچنین با استفاده از مفاهیم نظریهٔ افراد، شکافت سراسری را برای هر دستگاه تکین هوپف محاسبه می‌کنیم.

از جمله کاربردهای نتایج به دست آمده در این مقاله در کنترل انشعاب هوپف است. در این راستا لازم است که صورت بهنجار پارامتریک دستگاه هوپف محاسبه شود و رابطه بین پارامترهای دستگاه اصلی پارامتریک و صورت بهنجار پارامتریک به دست آیند. سپس با استفاده از نتایج فصل ۶ در [8]، می‌توان با استفاده از کنترل‌های غیرخطی، رفتار دستگاه را کنترل کرد.

همچنین به کمک نرم‌افزار میپل، برنامه‌ای تنظیم کرده‌ایم که این ضرایب را محاسبه و نتایج به دست آمده را اثبات می‌کند. این برنامه صورت بهنجار کلاسیک دستگاه‌های تکین هوپف با ضرایب نمادین را نیز محاسبه می‌کند. و همین ویژگی سبب متمایز شدن این برنامه از سایر برنامه‌های موجود و همچنین کارآمدتر بودن آن در مسایل کاربردی، از قبیل علوم مهندسی و فیزیک شده است.

محاسبه ضرایب لیاپونوف برای دستگاه‌های غیرخطی نه تنها در زمینهٔ بررسی‌های این نظریه حائز اهمیت هستند بلکه در تجزیه و تحلیل مسائل کاربردی نیز مفید و کارآمد هستند. یکی از دستگاه‌های مهم در فیزیک، دستگاه لینار است. معادله لینار معادلهٔ دیفرانسیل اسکالر مرتبهٔ دوم است که از نام فیزیک‌دان فرانسوی آلفرد ماری لینار (۱۹۵۸-۱۸۶۹) گرفته شده است. معادلات چندجمله‌ای لینار^۳ در بسیاری از زمینه‌های علمی به عنوان مدل در مسایل ظاهر می‌شود و یا در ساده‌سازی مدل‌ها نقش مهمی ایفا می‌کند.

در بخش آخر به منظور اشاره به کاربرد صورت بهنجار در فیزیک، از این دستگاه و یک مدار الکتریکی غیرخطی به عنوان مثال استفاده و وقوع انشعاب هوپف را به کمک محک روث-هورویتس اثبات و ضرایب لیاپونوف را تا مرتبهٔ ۳ محاسبه می‌کنیم. همچنین منحنی‌های انشعاب مشخص شده‌اند.

1. Center manifold theorem
2. Liapunov coefficient
3. Lienard equation

قضایا و نتایج

فرض کنید دستگاه بررسی شده از بعد ۲ و با مقادیر ویژه $\pm i\omega$ باشد (تکینی هوف^۱).

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} \quad (۱)$$

که $F(x,y)$ و $G(x,y)$ چندجمله‌ای‌های همگن از درجه دو به بالا هستند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم دستگاه مذکور در مبدأ مختصات یک نقطه تعادل داشته باشد.

ابتدا دستگاه مذکور را با اعمال تغییر متغیرهای

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

در مختصات اعداد مختلط بازنویسی می‌کنیم.

قرارداد: در تمامی قسمت‌های مقاله $\bar{z} = \omega$ فرض شده است.

با اعمال تغییرمتغیرهای مذکور، دستگاه (۱) بدین صورت تبدیل می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(z, \omega) \\ Q(z, \omega) \end{pmatrix},$$

به‌طوری‌که

$$P(z, \omega) = F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right),$$

$$Q(z, \omega) = G\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

توجه داشته باشید که $Q(z, \omega) = \overline{P(z, \omega)}$ ، که $P(z, \omega)$ و $Q(z, \omega)$ چندجمله‌ای‌های همگن هستند.

بهترین و ایده‌آل‌ترین پایه‌ای که برای این چندجمله‌ای‌های همگن می‌توان در نظر گرفت، بدین صورت است:

$$B = \left\{ X_{i,j}, Y_{i,j} \mid X_{i,j} = z^i \omega^j \frac{\partial}{\partial z} + z^j \omega^i \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad Y_{i,j} = i z^i \omega^j \frac{\partial}{\partial z} - i z^j \omega^i \frac{\partial}{\partial \omega} \right\}.$$

از این پس با این پایه جدید کار می‌کنیم.

قسمت خطی دستگاه (۱) بر اساس این پایه به صورت $Y_{1,0}$ نمایش داده می‌شود. لزوم به دست آوردن صورت بهنجار آن است که ابتدا گروه لی هر یک از عناصر پایه را با قسمت خطی دستگاه به دست آوریم که در زیر محاسبه شده است [6].

$$[Y_{i,j}, Y_{k,l}] = (k-i)X_{i+k-1,j+l+1} - lX_{k+j,j+l-1} + jX_{i+1,j+k-1},$$

$$[Y_{i,j}, X_{k,l}] = (i-k)X_{i+k-1,j+l+1} + lY_{k+j,j+l-1} + jY_{i+1,j+k-1}.$$

در این صورت داریم:

$$[Y_{1,0}, Y_{k,l}] = (k-1)X_{k,l},$$

$$[Y_{1,0}, X_{k,l}] = (1-k)Y_{k,l}.$$

با توجه به دو رابطه مذکور واضح است که در صورتی که $l = k - 1$ جملات $X_{k,l}$ و $Y_{k,l}$ از دستگاه حذف نمی‌شوند.

بنابراین جملاتی که در صورت بهنجار کلاسیک باقی می‌مانند، به صورت $X_{i+1,i}$ و $Y_{i+1,i}$ هستند.

تعریف: فرض کنید که $X: C^n \rightarrow C^n$ یک میدان برداری از رده C^{r+1} و $DX = A$ ، $X(0) = 0$ است. هم چنین

فرض کنید $\sigma(A) = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ طیف A باشد. آن‌گاه رابطه

$$\mu \cdot \alpha - \mu_1 = 0,$$

یک شرط تشدید نامیده می‌شود. که در آن $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ و $\alpha \cdot \mu = \alpha_1 \mu_1 + \dots + \alpha_N \mu_N$ حال فرض کنید $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ مختصات در پایه استاندارد $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ در C^n باشد. در این صورت چندجمله‌ای $X^\alpha e_i$ یک چندجمله‌ای تشدید^۱ نامیده می‌شود اگر و تنها اگر رابطه مذکور برای یک i وجود داشته باشد.

توجه داشته باشید که در صورت بهنجار کلاسیک، تنها جملات تشدید باقی می‌مانند. این مطلب در این‌جا نیز قابل تحقیق است. برای این منظور بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $\mu_1 = i$ باشد. در این صورت داریم:

$$| \langle (i, -i), (\alpha_1, \alpha_2) \rangle - i | = | i(\alpha_1 - \alpha_2 - 1) | \\ = | \alpha_1 - \alpha_2 - 1 |.$$

واضح است که تساوی مذکور برابر صفر است اگر و تنها اگر تساوی $\alpha_1 = 1 + \alpha_2$ برقرار باشد.

بنابراین با توجه به تعریف $X_{i,j}$ و $Y_{i,j}$ واضح است که برقراری رابطه مذکور هم‌ارز با وجود جملات $X_{i+1,i}$ و $Y_{i+1,i}$ در صورت بهنجار کلاسیک است.

از طرف دیگر $X_{i+1,i}$ و $Y_{i+1,i}$ در مختصات دکارتی بدین‌صورت نمایش داده می‌شوند:

$$X_{i+1,i} = (x^2 + y^2)^i \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ Y_{i+1,i} = (x^2 + y^2)^i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

میدان برداری $X_{i+1,i}$ معمولاً میدان برداری اوپلری و $Y_{i+1,i}$ میدان برداری همیلتونی نامیده می‌شوند. بنابراین با محاسبه صورت بهنجار به‌روش معرفی شده مذکور، فضای صورت بهنجار کلاسیک تکنی هوف را به زیرفضاهای ناوردا و تجزیه‌ناپذیر همیلتونی (پایستار) و اوپلری (ناپایستار) تجزیه می‌کنیم [4]. این امر روند بررسی انشعابات را ساده‌تر می‌کند.

از مزیت‌های این تجزیه، تسهیل در استفاده از ابزارهایی مانند تابع ملنیکوف به‌منظور بررسی انشعابات سراسری و آشکار کردن تقارن‌های دستگاه (در صورت وجود) است. هم‌چنین بررسی دینامیک هر یک از این زیرفضاها مطالعه و بررسی دینامیک کل دستگاه را ساده‌تر می‌کند [4]، [8].

بر اساس توضیحات مذکور، قضیه ۱ برقرار است.

قضیه ۱: تغییر متغیر حالت نزدیک به همانی مناسبی وجود دارد که با اعمال آن می‌توان دستگاه (۱) را بدین‌صورت نمایش داد:

$$V^{(1)} := Y_{1,0} + \sum_{i \geq 2} a_i X_{i+1,i} + b_i Y_{i+1,i},$$

و در مختصات (x, ρ, θ) بدین‌صورت مایش داده می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \sum_{i=1} a_i \rho^{2i+1}, \\ \dot{\theta} = 1 + \sum_{i=1} b_i \rho^{2i}. \end{cases}$$

در این مقاله به کمک نرم‌افزار میپل، ضرایب صورت بهنجار فوق را تا مرتبه ۳ محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۲: توابع $F(x,y)$ و $G(x,y)$ را به صورت (۲) در نظر بگیرید:

$$F := a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + \dots, \quad (2)$$

$$G := b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{11}xy + \dots.$$

که ... نمایان گر جمله‌های از مرتبه سه به بالا در دستگاه است.

در این صورت دستگاه

$$\dot{x} = -y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + \dots$$

$$\dot{y} = x + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{11}xy + \dots$$

با اعمال تغییر متغیرهای

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

به دستگاه زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= iz + \frac{1}{4}ib_{20}\bar{z}^2 + \frac{1}{4}ib_{20}z^2 + \frac{1}{2}ib_{20}z\bar{z} - \frac{1}{4}ib_{02}\bar{z}^2 - \frac{1}{4}ib_{02}z^2 + \frac{1}{2}ib_{02}z\bar{z} \\ &\quad + \frac{1}{4}ia_{11}\bar{z}^2 - \frac{1}{4}ia_{11}z^2 + \frac{1}{4}b_{11}z\bar{z} - \frac{1}{4}b_{11}\bar{z}^2 + \frac{1}{4}a_{20}z^2 + \frac{1}{2}a_{20}z\bar{z} + \frac{1}{4}a_{20}\bar{z}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}a_{02}z^2 + \frac{1}{2}a_{02}z\bar{z} - \frac{1}{4}a_{02}\bar{z}^2, \\ \dot{\bar{z}} &= -i\bar{z} - \frac{1}{4}ib_{20}\bar{z}^2 - \frac{1}{4}ib_{20}z^2 - \frac{1}{2}ib_{20}z\bar{z} + \frac{1}{4}ib_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{4}ib_{02}z^2 - \frac{1}{2}ib_{02}z\bar{z} \\ &\quad + \frac{1}{4}ia_{11}\bar{z}^2 - \frac{1}{4}ia_{11}z^2 - \frac{1}{4}b_{11}z\bar{z} + \frac{1}{4}b_{11}\bar{z}^2 + \frac{1}{4}a_{20}z^2 + \frac{1}{2}a_{20}z\bar{z} + \frac{1}{4}a_{20}\bar{z}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}a_{02}z^2 + \frac{1}{2}a_{02}z\bar{z} - \frac{1}{4}a_{02}\bar{z}^2. \end{aligned}$$

صورت بهنجار مرتبه اول برای دستگاه فوق در مختصات قطبی به فرم

$$\dot{\rho} = a_1\rho^3 + a_2\rho^5 + \dots,$$

$$\dot{\theta} = 1 + b_1\rho^2 + b_2\rho^4 + \dots. \quad (3)$$

است. ضرایب b_1, b_2, a_1, a_2 بر حسب مشتقات توابع F و G به کمک این روابط محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{16}(F_{yy}G_{yy} + F_{yy}F_{xy} - G_{yy}G_{xy} - G_{xx}G_{xy} - F_{xx}G_{xx} + F_{xx}F_{xy}), \\ a_2 &= \frac{1}{144}\left(F_{yy}G_{xx}F_{xy}^2 - F_{xy}G_{xy}F_{xx}^2 - \frac{1}{2}G_{xy}F_{xy}^2G_{xx}^2 - \frac{1}{4}G_{xx}^3G_{xy} + \frac{1}{4}F_{yy}G_{yy}^3 - \frac{1}{4}F_{xx}^3G_{xx} \right. \\ &\quad - G_{yy}G_{xy}^3 - G_{xx}G_{xy}^3 + \frac{1}{2}F_{xx}G_{yy}G_{xx}^2 + \frac{1}{4}F_{xy}F_{xx}^3 + \frac{1}{4}G_{yy}F_{yy}^3 - \frac{1}{4}G_{xx}G_{xy}F_{yy}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{xx}G_{xx}G_{yy}^2 + \frac{1}{4}F_{yy}F_{xy}G_{xx}^2 + \frac{1}{4}F_{yy}G_{yy}F_{xx}^2 - \frac{1}{4}G_{yy}G_{xy}F_{xx}^2 + F_{xx}G_{yy}G_{xy}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}F_{xx}G_{xx}F_{yy}^2 + \frac{1}{2}F_{xx}^2F_{yy}G_{xx} - F_{xx}G_{yy}F_{xy}^2 + F_{xx}F_{xy}G_{xy}^2 + F_{yy}F_{xy}G_{xy}^2 \\ &\quad - \frac{4}{3}F_{xx}F_{xy}G_{xx}^2 + F_{yy}F_{xy}^3 - G_{yy}G_{xy}F_{xy}^2 + \frac{4}{3}G_{yy}G_{xy}F_{yy}^2 + \frac{1}{4}F_{xx}F_{xy}G_{yy}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{xx}G_{xx}^3 - \frac{1}{4}G_{yy}^3G_{xy} - F_{xy}G_{xy}G_{xx}^2 - \frac{1}{2}F_{xx}G_{yy}F_{yy}^2 + \frac{1}{4}G_{xx}G_{xy}G_{yy}^2 \\ &\quad + \frac{4}{3}G_{xx}G_{xy}F_{xx}^2 + F_{xx}F_{xy}^3 + \frac{1}{4}F_{yy}^3F_{xy} - \frac{1}{4}F_{xx}^2F_{yy}F_{xy} + F_{xy}G_{yy}^2G_{xy} + F_{yy}^2F_{xy}G_{xy} \\ &\quad \left. - F_{yy}G_{xx}G_{xy}^2 + \frac{1}{4}F_{yy}G_{xx}^2G_{yy}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 = & \frac{1}{48} (F_{xy}G_{xx} - 5F_{yy}^2 + 5F_{xy}G_{yy} - 5G_{xx}G_{yy} - 2F_{xx}^2 - 2G_{yy}^2 - 5G_{xx}^2 - 2F_{xy}^2 - 2G_{xy}^2 \\
& - 5F_{xx}F_{yy} + 5F_{xx}G_{xy} + F_{yy}G_{xy}), \\
b_2 = & \frac{1}{576} (-\frac{71}{2}F_{yy}G_{xx}G_{xy} + \frac{43}{2}F_{yy}F_{xy}^2G_{xy} + \frac{15}{4}F_{xx}G_{yy}G_{xy} + \frac{57}{2}F_{yy}^2F_{xy}G_{yy} - \frac{59}{8}F_{yy}^2G_{yy}^2 \\
& + \frac{43}{2}F_{yy}G_{xy}^3 - \frac{71}{4}F_{yy}^3G_{xy} + 62F_{yy}F_{xy}G_{xx}G_{yy} + \frac{31}{8}F_{yy}^2G_{xx}G_{yy} - \frac{71}{4}F_{yy}^2F_{xy}G_{xx} \\
& - \frac{71}{4}F_{yy}G_{xx}^2G_{xy} - \frac{51}{4}F_{yy}^2G_{xx}^2 - \frac{223}{8}F_{yy}^2F_{xy}^2 + \frac{25}{8}F_{yy}^2G_{xy}^2 - 19F_{yy}F_{xy}G_{yy}G_{xy} \\
& - G_{yy}^4 - \frac{19}{2}G_{xy}^4 - F_{xx}^4 + \frac{43}{2}F_{xy}G_{xx}G_{xy}^2 - \frac{137}{4}F_{xy}^2G_{xx}G_{yy} - \frac{71}{4}F_{xy}G_{xx}^3 - \frac{61}{4}G_{xx}G_{yy}G_{xy}^2 \\
& - \frac{223}{8}G_{xx}^2G_{xy}^2 - 3G_{xx}G_{yy}^3 - \frac{71}{4}F_{xy}G_{xx}G_{yy}^2 + 7F_{xy}G_{yy}^3 + \frac{43}{2}F_{xy}^3G_{xx} - 7F_{xy}G_{xx}^2G_{yy} \\
& + \frac{25}{8}F_{xy}^2G_{xx}^2 + \frac{43}{2}F_{xy}^3G_{yy} - \frac{147}{8}F_{xy}^2G_{yy}^2 - 19F_{xy}^2G_{xy}^2 + \frac{43}{2}F_{xy}G_{yy}G_{xy}^2 + \frac{21}{8}G_{xx}^2G_{yy}^2 \\
& + \frac{31}{8}G_{xx}^3G_{yy} - \frac{51}{8}G_{yy}^2G_{xy}^2 - \frac{51}{8}G_{xx}^4 - \frac{137}{4}F_{xx}F_{yy}G_{xy}^2 + \frac{71}{4}F_{xx}^2F_{yy}G_{xy} + \frac{31}{4}F_{xx}F_{yy}G_{xx}^2 \\
& + 14F_{xx}G_{xx}G_{yy}G_{xy} - \frac{59}{8}F_{xx}^2G_{xx}^2 - \frac{71}{2}F_{xx}F_{yy}G_{xx} + 20F_{xx}F_{yy}G_{xx}G_{yy} - 3F_{xx}^3F_{yy} \\
& - \frac{31}{4}F_{xx}F_{yy}^3 \\
& - 19F_{xx}F_{xy}G_{xx}G_{xy} + \frac{15}{4}F_{xx}^2F_{xy}G_{xx} - \frac{51}{8}F_{xx}^2F_{xy}^2 - 3F_{xx}F_{yy}G_{yy}^2 + 14F_{xx}F_{xy}F_{yy}G_{yy} + \\
& + 7F_{xx}^3G_{xy} + 7F_{xx}^2F_{xy}G_{yy} + \frac{43}{2}F_{xx}F_{xy}^2G_{xy} + \frac{57}{2}F_{xx}G_{xx}^2G_{xy} - \frac{147}{8}F_{xx}^2G_{xy}^2 - \frac{61}{4}F_{xx}F_{yy}F_{xy}^2 \\
& - 3F_{xx}^2G_{xx}G_{xy} - 7F_{xx}F_{yy}^2G_{xy} + \frac{21}{8}F_{xx}^2F_{yy}^2 - 2F_{xy}^2G_{yy}^2 + 7F_{xx}G_{yy}^2G_{xy} - 24F_{xx}F_{xy}G_{yy}G_{xy} \\
& - \frac{51}{8}F_{yy}^4 - \frac{19}{2}F_{xy}^2 + \frac{43}{2}F_{xx}G_{xy}^3). \quad (۴)
\end{aligned}$$

تذکر: فرمول (۴) برای ضریب a_1 در بعضی از کتاب‌های موجود در نظریه انشعاب معرفی شده است. عدد a_1 اولین ضریب لیاپونوف نامیده می‌شود. در صورتی که $a_1 \neq 0$ باشد برای تجزیه و تحلیل انشعاب جواب‌های متناوب حدی، می‌توان بدون در دست داشتن سایر ضرایب نتیجه‌گیری کرد. در غیر این صورت بررسی انشعابات مستلزم محاسبه ضریب a_2 است.

صورت بهنجار کوتاه شده و شکافت سراسری

در صورت بهنجار داده شده در معادله (۳)، عدد k را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$k = \min\{i: a_i \neq 0\}.$$

در این صورت معادله دیفرانسیل (۱) را کانونی ضعیف^۱ از مرتبه k می‌نامیم.

با توجه به محدودیت‌های محاسباتی، صورت‌های بهنجار تا درجه‌ای متناهی محاسبه می‌شوند و بررسی‌های انشعابات بر صورت بهنجار کوتاه شده انجام می‌گیرد. از این رو، اثبات هم‌ارز بودن و یا نبودن دینامیک صورت‌های بهنجار کوتاه شده و دستگاه اصلی اهمیت خاصی دارد. در این قسمت ابتدا ثابت می‌کنیم که به‌ازای درجه خاصی صورت بهنجار کوتاه شده و دستگاه اصلی هم‌ارز هستند. درجه خاص مزبور بر اساس تباهیدگی دستگاه اصلی (مرتبه کانونی ضعیف) تعیین و محاسبه می‌شود.

1. Weak focus

در این قسمت با حذف مؤلفه زاویه‌ای Θ ، به بررسی نقاط تعادل $\dot{\rho}$ در معادله صورت بهنجار (۳) می‌پردازیم. بنابراین معادله (۵) را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{\rho} = a_0 \lambda \rho + \sum_{i=k} a_i \rho^{2k+1}, \quad (5)$$

در این راستا رفتار کیفی نقاط تعادل بر اساس رابطه هم‌ارزی مماسی $\sim$ انجام می‌گیرد. با محاسبه یک ایده‌آل به‌نام ایده‌آل جمله‌های مرتبه بالا تعیین می‌شود که تا چه درجه‌ای بسط تیلور فوق مورد نیاز است. در ادامه به معرفی این مفاهیم و ابزارها می‌پردازیم. برای اطلاعات بیش‌تر به [10] مراجعه شود.

تعریف: فضای مماس محدود شده^۱ متناظر با جرم g ، $RT(g)$ ، بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$RT(g) = \langle g, g_\rho, \lambda g_\rho \rangle.$$

تعریف: ایده‌آل M را که شامل تمام جرم‌هایی است که در مبدا صفر می‌شوند، بدین‌صورت تعریف می‌کنیم.

$$M = \langle \rho, \lambda \rangle.$$

حال جرم h را به‌صورت (۶) در نظر بگیرید.

$$h = a_0 \lambda \rho + \sum_{i=k} a_i \rho^{2k+1}. \quad (6)$$

لم ناکایاما^۲: فرض کنید ζ و ξ دو ایده‌آل دلخواه باشند و ایده‌آل ζ یک ایده‌آل متناهی^۳ تولید شده به‌وسیله پایه $p_1, p_2, \dots, p_k$ باشد ($\zeta = \langle p_1, p_2, \dots, p_k \rangle$). در این صورت داریم:

$$\zeta \subseteq \xi \quad \text{iff} \quad \zeta \subseteq M.$$

اثبات: برای اثبات به لم 5.3 در [10] مراجعه شود.

گزاره ۱: فضای مماس محدود شده متناظر با جرم h بر حسب ایده‌آل M بدین‌صورت است:

$$RT(h) = M^{2k+1} + M \langle \lambda \rangle.$$

اثبات: برای اثبات برقراری رابطه مذکور کافی است نشان دهیم:

$$RT(h) \subseteq M^{2k+1} + M \langle \lambda \rangle, \quad M^{2k+1} + M \langle \lambda \rangle \subseteq RT(h)$$

برقراری $RT(h) \subseteq M^{2k+1} + M \langle \lambda \rangle$ واضح است. بنابراین کافی است تنها نابرابری دوم را ثابت کنیم. برای این منظور ابتدا تعریف می‌کنیم: $h_1 := h$, $h_2 := \rho h_\rho$, $h_3 := \lambda h_\rho$. در این صورت داریم:

$$\frac{1}{a_0} \rho^{j-1} \lambda^{2k-j} \times h_1 = \lambda^{2k+1-j} \rho^j + \frac{1}{a_0} \sum_{i=k} a_i \rho^{2i+j} \lambda^{2k-j},$$

$$\frac{1}{a_0} \lambda^{2k-1} \times h_3 = \lambda^{2k+1} + \frac{1}{a_0} \sum_{i=k} (2i+1) \rho^{2i} \lambda^{2k},$$

$$(h_2 - h_1) = \sum_{i=k} a_i 2i \rho^{2i+1}.$$

با به‌کارگیری لم ناکایاما از رابطه اول و دوم به‌ترتیب داریم $\lambda^{2k+1} \in RT(h)$ و $\rho^i \lambda^{2k+1-i} \in RT(h)$

هم‌چنین از رابطه سوم نتیجه می‌شود $\rho^{2k+1} \in RT(h)$. بنابراین با توجه به مطالب فوق داریم: $M^{2k+1} \subseteq RT(h)$

1. Restricted tangent space
2. Nakayama's lemma
3. Finite determined

از طرفی با در نظر گرفتن h_1 و h_3 می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت که به‌ترتیب $\lambda^2 \in RT(h)$ و $\lambda \rho \in RT(h)$. بنابراین داریم: $M < \lambda > \subseteq RT(h)$ و گزاره ثابت می‌شود.

تعریف: ایده‌آل تولید شده به‌وسیله جمل‌های مراتب بالای جرم g با $\|(g)\|$ نمایش داده می‌شود و شامل همه P -جمله‌هایی است که $g + p$ با g هم‌ارز مماسی است

تذکر: در صورتی که به‌ازای $k \in N$ رابطه $\|(g)\| \subseteq M^k$ برقرار باشد، $g = 0$ را k تعیین شده می‌نامیم.

تعریف: ایده‌آل ζ را ذاتی^۱ گوییم هرگاه برای هر دو جرم g و h این رابطه برقرار باشد:

$$g \in \zeta \text{ and } h \sim g \rightarrow h \in \zeta.$$

بزرگ‌ترین ایده‌آل ذاتی ζ را با نماد Itr نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳: اگر $RT(g)$ یک ایده‌آل با هم‌بعد متناهی باشد. $\|(g)\|$ طبق این رابطه محاسبه می‌شود:

$$\|(g)\| = Itr (M \cdot RT(g) + R\{\lambda g_\rho\}).$$

اثبات: برای اثبات به قضیه ۸.۷ در [10] مراجعه شود.

گزاره ۲: رفتار کیفی تابع h داده شده در (۶) با بسط تیلور تا درجه $2k+1$ کاملاً تعیین می‌شود.

$$\|(h)\| = M^{2k+2} + M^2 < \lambda >.$$

اثبات: چنان‌که نشان دادیم فضای مماس محدود شده بر جرم h به‌صورت $RT(h) = M^{2k+1} + M < \lambda >$ است بنابراین

$$M \cdot RT(g) = M^{2k+2} + M^2 < \lambda >.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} M \cdot RT(g) + R\{\lambda g_\rho\} &= M^{2k+2} + M^2 < \lambda > + R\left\{a_0 \lambda^2 + \sum_{i=k} a_k (2k+1) \lambda \rho^{2k}\right\} \\ &= M^{2k+2} + M^2 < \lambda > + < \lambda^2 >. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|(h)\| = Itr (M \cdot RT(h) + R\{\lambda h_\rho\}) = M^{2k+2} + M^2 < \lambda >.$$

و گزاره ثابت می‌شود.

حال به کمک مفاهیم مطرح شده در بالا شکافت سراسری را برای جرم g محاسبه می‌کنیم. شکافت سراسری جرم g شامل تمام دینامیک‌های احتمالی ناشی از اختلالات ممکن برای جرم g است.

شکافت سراسری^۲

انشعابات کامل اختلالات پارامتریک دستگاه (۱)، با محاسبه شکافت سراسری صورت به‌نحار (۳) صورت می‌گیرد. از این رو، در این قسمت شکافت سراسری معادله (۶) را به‌دست می‌آوریم.

تعریف: شکافت سراسری جرم g ، یک خانواده پارامتری از نگاشت‌های $G(x, \lambda, \alpha)$ است، به‌طوری‌که این دو شرط را دارا باشد:

$$1. \quad G(x, \lambda, 0) = G(x, \lambda).$$

۲. هر اختلال کوچکی از جرم g ، به‌ازای برخی مقادیر α ، با $G(0, 0, \alpha)$ هم‌ارز باشد.

1. Intrinsic ideal

2. Universal unfolding

برای به دست آوردن شکافت سراسری متناظر با جرم g ، ابتدا باید مفهوم فضای مماس بر جرم g ، $T(g)$ ، را تعریف کنیم. در این راستا ابتدا به بیان یک تریف و یک قضیه می‌پردازیم.

تعریف: فضای مماس بر جرم g را با نماد $T(g)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$T(g) = RT(g) \oplus R\{g_\rho, g_\lambda, \lambda g_\lambda, \dots, \lambda^l g_\lambda\}.$$

که در آن l بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که $\lambda^l g_\lambda \notin RT(g)$.

گزاره ۳: فضای مماس برای جرم h ، $T(h)$ ، بدین صورت است:

$$T(h) = M^{2k+1} + M < \lambda > \oplus R\{a_0 \lambda, \rho^3, \dots, \rho^{2k-1}\}.$$

اثبات: چنان که در گزاره ۲ ثابت کردیم، داریم: $RT(h) = M^{2k+1} + M < \lambda >$. بنابراین

$$\begin{aligned} T(h) &= RT(h) \oplus R\{h_\rho, h_\lambda, h, \dots, \lambda^l h_\lambda\} \\ &= M^{2k+1} + M < \lambda > \oplus R\left\{a_0 \lambda + \sum_{i=k} a_i \rho^{2k}, a_0 \rho, a_0 \lambda \rho, \dots, a_0 \rho \lambda^l\right\} \\ &= M^{2k+1} + M < \lambda > \oplus R\{a_0 \lambda, \rho^3, \dots, \rho^{2k-1}\}. \end{aligned}$$

قضیه ۴: (قضیه شکافت سراسری). فرض کنید که $p_1, p_2, \dots, p_k$ یک پایه برای فضای برداری مکمل فضای مماس $T(g)$ و g صورت بهنجار جرم f باشد. در این صورت شکافت سراسری جرم f بدین صورت است..

$$G(x, \lambda, \mu) = g(x, \lambda) + \sum_{i=1}^k \mu_i p_i.$$

عدد طبیعی k هم‌بعد جرم f است.

گزاره ۴: شکافت سراسری متناظر با معادله نرمال شده (۶) عبارت است از:

$$H(\rho, \lambda, \mu) = a_0 \lambda \rho + \sum_{i=k} a_k \rho^{2k+1} + \mu_1 \rho^3 + \dots + \mu_{k-1} \rho^{2k-1}.$$

اثبات: با در نظر گرفتن گزاره ۳ و قضیه شکافت سراسری قضیه ثابت می‌شود.

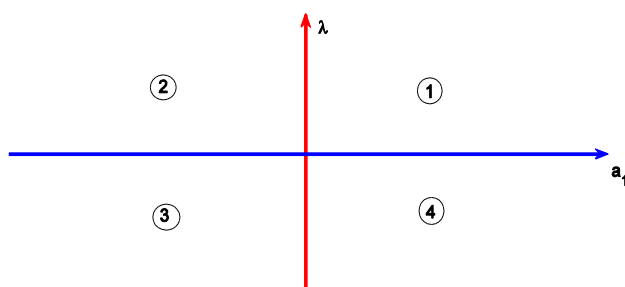
دینامیک و انشعابات کانونی ضعیف از مرتبه یک و دو

در این قسمت نمودار انشعاب‌ها را برای دستگاه‌های تباهیده با انشعاب هوپف (هوپف تعمیم یافته)، بررسی می‌کنیم.

فرض کنید که در صورت بهنجار (۳)، ضریب $a_1 \neq 0$ باشد. در این صورت بنا بر گزاره ۲ بررسی انشعاب‌های دستگاه تکین هوپف با بسط تیلور صورت بهنجار آن تا درجه ۳ به صورت کامل مشخص می‌شود. از این رو، با توجه به قضیه ۴، شکافت سراسری صورت بهنجار (۳) را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \lambda \rho + a_1 \rho^3, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

در این صورت به‌ازای $\dot{\rho} = 0$ یک نقطه تعادل و یا یک جواب متناوب حدی داریم. در شکل ۱ در نواحی اول و سوم به دلیل هم علامت بودن پارامترهای λ و a_1 هیچ دور حدی اتفاق نمی‌افتد. در حالی که در ناحیه دوم یعنی به‌ازای $\lambda < 0$ دور حدی پایدار و در ناحیه چهارم یعنی به‌ازای $\lambda > 0$ دور حدی ناپایدار داریم.



شکل ۱. فضای گذار انشعابات دستگاه تکین هوپف

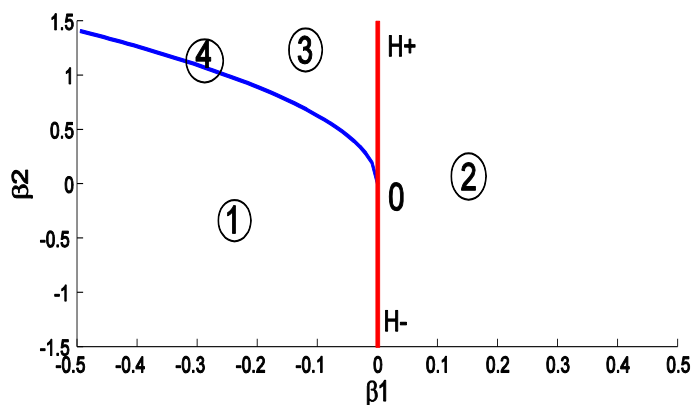
حال فرض کنید $a_1 = 0$ باشد. در این صورت صورت بهنجار مرتبه اول چنین دستگاه‌هایی تا مرتبه ۴ به صورت (۷) است:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta_1 + \beta_2 \rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (7)$$

معادلات دستگاه مذکور یک دستگاه کانونی مرتبه ۲ را نشان می‌دهد که معادله دوم جهت گردش را مشخص می‌کند. ریشه‌های معادله اول به صورت $\rho = 0$ و $\beta_1 + \beta_2 \rho^2 - \rho^4 = 0$ هستند. ریشه‌های چندجمله‌ای $\beta_1 + \beta_2 \rho^2 - \rho^4$ معرف جواب‌های تناوبی در نمودار انشعابات هستند. در این جا می‌توانیم حداکثر ۲ ریشه داشته باشیم. ریشه‌های این چندجمله‌ای دو شاخه جواب به صورت زیر ایجاد می‌کنند که به کمک نرم افزار متلب در شکل ۲ رسم شده‌اند.

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\},$$

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2^2 + 4\beta_1 = 0, \quad \beta_1 < 0, \quad \beta_2 > 0\}.$$

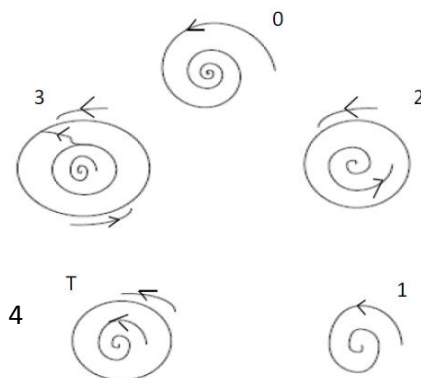


شکل ۲. مجموعه گذار انشعابات دستگاه منفرد کانونی ضعیف از مرتبه دو

چنان‌که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، در طول خط H و به ازای $\beta_1 < 0$ نقاط تعادل، پایدار و به ازای $\beta_1 > 0$ ناپایدار هستند و در نقطه $\beta_1 = 0$ خط H به دو شاخه H^+ ، H^- شکسته می‌شود. اگر بر شاخه H_- از چپ به راست حرکت کنیم، نقاط تعادل به جواب‌های تناوبی پایدار منشعب می‌شود و اگر بر شاخه H_+ از راست به چپ حرکت کنیم، نقاط تعادل به دو جواب تناوبی ناپایدار منشعب می‌شود.

مثال‌های کاربردی

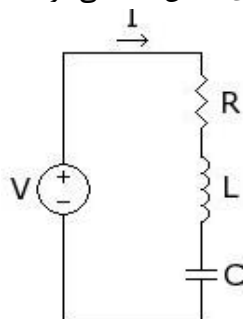
به منظور اشاره‌ای به کاربرد صورت بهنجار و نتایج به دست آمده در این مقاله، نتایج حاصل را روی مثال‌هایی برگرفته از مفاهیم فیزیک پیاده می‌کنیم.



شکل ۳. نمودار انشعابات دستگاه (۷)

معادلهٔ لینار:

به عنوان اولین مثال یک مدار الکتریکی را در نظر بگیرید. این مدار دارای سه جز مقاومت، القاگر و یک خازن است و جریان در هر مدار توسط عدد حقیقی i_R, i_L, i_C نشان داده می‌شوند. به عنوان مثال i_R اندازهٔ جریان گذرا از مقاومت را اندازه‌گیری می‌کند [12].



شکل ۴. مدار الکتریکی ساده

معادلات دیفرانسیل حاکم بر این مدار بر حسب مختصات (i_L, v_C) که نمایانگر ولتاژ خازن است، به صورت (۹) است.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x), \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (9)$$

به طوری که f بیانگر رابطه‌ای است که مقاومت بین i_R, v_R برقراری کند و رابطهٔ تابعی نامیده می‌شود. بدون کاستن از کلیت مسئله و برای سادگی قرار می‌دهیم $L = C = 1$. با بازنویسی متغیرهای $x = i_L$ و $y = v_C$ ، دستگاه معادلات دیفرانسیل (۸) به دستگاه

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = v_L = v_C - f(i_L), \\ C \frac{dv_C}{dt} = i_C = -i_L \end{cases} \quad (8)$$

تبدیل می‌شود که به معادلهٔ لینار معروف است. و در حالت خاص اگر $f(x) = x^3 - x$ در نظر گرفته شود، معادلهٔ واندربیل نامیده می‌شود.

اگر در معادله (۹) تابع $f(x)$ را به صورت کلی $f(x) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + x^4$ تعریف کنیم. با استفاده از برنامه میپل و یا فرمول‌های داده شده در قضیهٔ ۲، صورت بهنجار معادلهٔ لینار بدین صورت است:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\frac{1}{8}a_3(a_1 + a_2)\rho^3 - \frac{1}{1152}a_3((a_1 + a_2)(20a_1^2 + 20a_2^2 + 11a_3^2 - 4a_1a_2) - 120)\rho^5, \\ \dot{\theta} = 1 + \left(-\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{5}{12}a_2^2 - \frac{1}{24}a_3^2 - \frac{5}{12}a_1a_2\right)\rho^2. \end{cases} \quad (10)$$

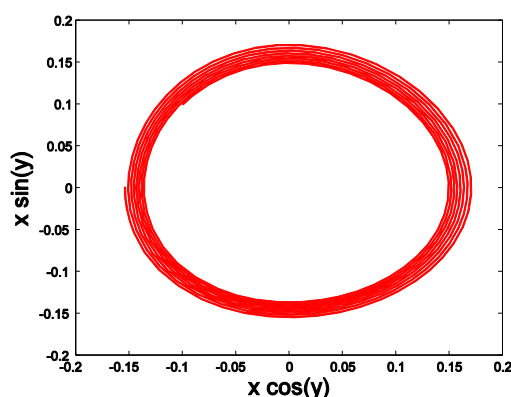
صورت بهنجار بالا با شرط $((a_1 + a_2)^2)(20a_1^2 + 20a_2^2 + 11a_3^2 - 4a_1a_2) - 120(a_1 + a_2) < 0$ دارای یک جواب متناوب حدی با این دامنه است:

$$\rho = 12 \sqrt{\frac{-(a_1 + a_2)}{(a_1 + a_2)(20a_1^2 + 20a_2^2 + 11a_3^2 - 4a_1a_2) - 120}}$$

در غیر این صورت فاقد جواب متناوب حدی خواهد بود. به علاوه اگر $a_3(a_1 + a_2) > 0$ باشد، جواب حدی پایدار و اگر $a_3(a_1 + a_2) < 0$ ناپایدار خواهد بود.

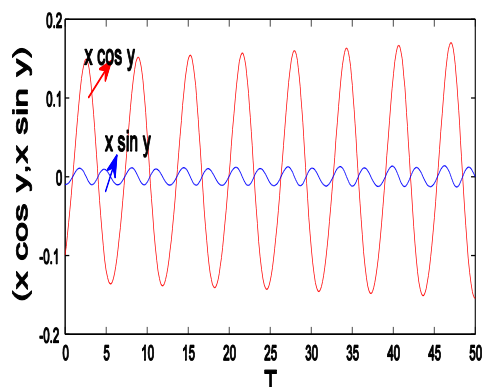
لازم به تذکر است که دینامیک سیستم اصلی با دینامیک صورت بهنجار همیشه هماهنگ نیست. از جمله دلایل موجود برای بعضی ناهماهنگی‌ها بین صورت بهنجار و دستگاه اصلی را می‌توان به همگرا نبودن تغییر متغیرها، انشعابات با هم بعد نامتناهی و یا متناهی تعیین نشده بودن دینامیک موجود در دستگاه اصلی و یا فرم نرمال متناظر با آن نام برد.

از این رو، به‌ازای مقادیر $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1$ و با شرط اولیه $(x = -0.1, y = 0.1)$ به کمک نرم‌افزار متلب، جواب معادله دیفرانسیل (۶) را در دو مختصات متفاوت در شکل‌های ۵ و ۶ رسم کرده‌ایم.



شکل ۵. نمای فاز دستگاه (۹) به‌ازای شرط اولیه $(x = -0.1, y = 0.1)$

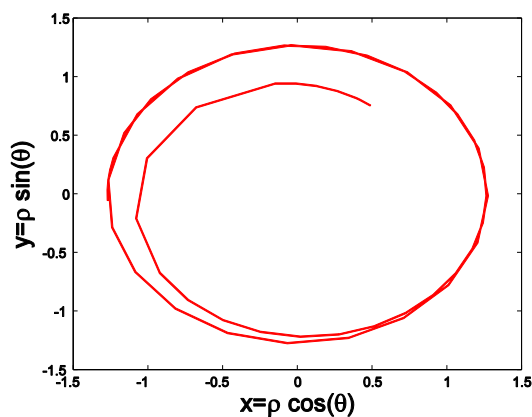
در شکل ۵ به کمک نرم‌افزار متلب رفتار دستگاه (۹) به‌ازای شرط اولیه $(x = -0.1, y = 0.1)$ رسم شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود یک دور حدی با شعاع تقریباً 0.17 در دستگاه اتفاق می‌افتد.



شکل ۶. نمای فاز جواب‌های دستگاه (۹) بر حسب زمان به‌ازای شرط اولیه $(x = -0.1, y = 0.1)$

در شکل ۶ جواب‌های دستگاه (۹) را بر حسب زمان رسم شده‌اند. چنان‌که مشاهده می‌کنید جواب‌ها با دامنه تقریباً ۰/۱۷ رفتار تناوبی دارند.

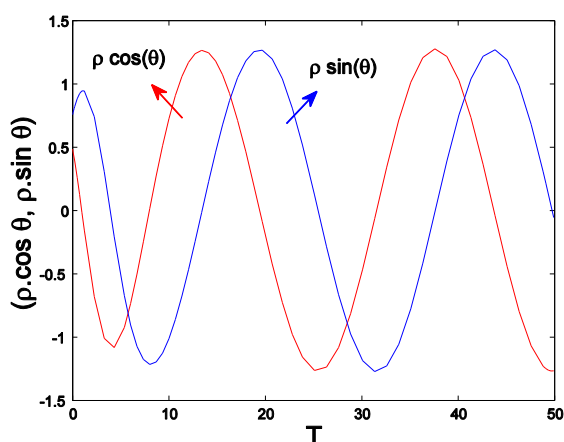
از سوی دیگر دینامیک صورت بهنجار متناظر با دستگاه (۹) را که در معادله (۱۰) داده شده است به‌ازای همان مقادیر $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1$ و با شرط اولیه $(\rho = 0.9, \theta = 1)$ در شکل‌های ۷ و ۸ بررسی می‌کنیم.



شکل ۷. نمای فاز دستگاه (۱۰) به‌ازای

شرط اولیه $(\rho = 0.9, \theta = 1)$

در شکل ۷ به‌کمک نرم‌افزار متلب نمای فاز صورت بهنجار (۱۰) به‌ازای شرط اولیه $(x = -0.1, y = 0.1)$ رسم شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود یک دور حدی با شعاع تقریباً ۱/۲ در دستگاه اتفاق می‌افتد. که این نتیجه با صورت بهنجار به‌دست آمده در معادله (۱۰) مطابقت دارد.



شکل ۸. نمای فاز جواب‌های دستگاه (۱۰) بر حسب زمان

به‌ازای شرط اولیه $(\rho = 0.9, \theta = 1)$

در شکل ۸ نیز رفتار تناوبی جواب‌های دستگاه (۱۰) با دامنه حدوداً ۱/۲ را می‌توان مشاهده کرد. با مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ با شکل‌های ۷ و ۸ می‌توان نتیجه گرفت که نتایج به‌دست آمده در قسمت قبل با شبیه‌سازی‌های عددی مطابقت دارند. و دینامیک صورت بهنجار و دستگاه اصلی در راستای جواب متناوب حدی پایدار و هماهنگ هستند.

توجه: در مثال فوق وقوع انشعاب هوف با به‌کارگیری معیار روث-هورویتس نیز قابل اثبات است. که به‌طور خلاصه به آن اشاره می‌کنیم:

معیار روث-هورویتز: دستگاه $\dot{x} = f(x, \mu)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید چندجمله‌ای مشخصه آن بدین‌صورت باشد:

$$P_n(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \dots + a_{n-1}\mu + a_n.$$

شاخص‌های اصلی روث-هورویتس با تعریف $\Delta_i, i = 1, 2, 3, \dots$ مشخص می‌شوند که در آن:

$$\Delta_1 = a_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

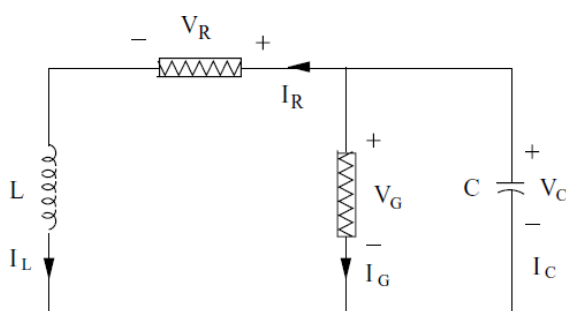
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix},$$

قضیه ۵. شرط لازم و کافی برای آن که دستگاه دینامیکی $\dot{X} = f(X, \mu)$ دارای یک انشعاب هوف باشد آن است که $\Delta_{n-1} = 0$ [17].

حال با توجه با این که در مثال مذکور، چندجمله‌ای مشخصه در نقطه تعادل مبدأ به صورت $\lambda^2 + 1$ است، داریم $\Delta_1 = a_1 = 0$ در این صورت بنا بر قضیه ۵ در دستگاه انشعاب هوف رخ می‌دهد.

به عنوان مثالی دیگر می‌توان به مدار غیرخطی که در شکل ۹ آمده است، اشاره کرد. که شامل مقاومت (L) ، خازن (C) و دو القاگر (V_R, V_G) است [12].



شکل ۹. مدار الکتریکی غیرخطی

مدار مذکور به صورت (۸) فرمول بندی می‌شود:

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = V_C - V_R, \\ C \frac{dV_C}{dt} = -I_L - I_C. \end{cases} \quad (۸)$$

که

$$\begin{cases} V_R = \eta_1 I_R + \beta_1 I_R^2, \\ I_C = -\eta_2 V_C. \end{cases} \quad (۱۱)$$

به طوری که η_i نمایانگر پارامتر انشعاب و β_i ها متغیرهای مثبت هستند. بدون کاستن از کلیت مسئله پارامترهای L و C را یک در نظر گرفته و با بازنویسی متغیرهای $I_L = w_1$ و $V_C = w_2$ ، دستگاه (۱۱) به دستگاه (۱۲) تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = \frac{1}{L} (-\eta_1 w_1 + w_2 - \beta_1 w_1^2 + \beta_2 w_1^3), \\ \frac{dw_2}{dt} = \frac{1}{C} (-w_1 + \eta_2 w_2 - \beta_3 w_2^3). \end{cases} \quad (۱۲)$$

حال با فرض

$$\eta_1 = \frac{4}{5} + \mu_1, \quad \eta_2 = \frac{4}{5} + \mu_2,$$

و با مقداردهی پارامترهای $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\beta_1 = \frac{1}{4}$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$ و اعمال تغییرمغیرهای $w_2 = 5x_2$ و $w_1 = 3x_1 + 4x_2$ دستگاه (۱۲) بدین صورت تبدیل می‌شود:

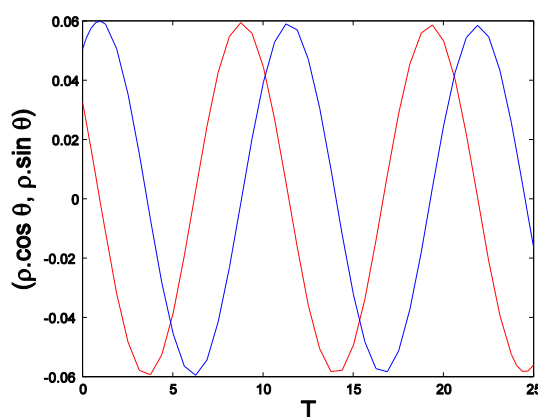
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{12}(3x_1 + 4x_2)^2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{3}{5}x_1. \end{cases}$$

با استفاده از نتایج ذکر شده در بالا صورت بهنجار برای این مدار در مختصات (ρ, θ) به صورت دستگاه (۱۳) می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\frac{15}{48}\rho^3 - \frac{121875}{124416}\rho^5, \\ \dot{\theta} = \frac{3}{5} - \frac{753}{864}\rho^2. \end{cases} \quad (13)$$

که با توجه به این که ضریب ρ^3 در معادله $\dot{\rho}$ منفی است، انشعاب هوپف فوق بحرانی اتفاق خواهد افتد. نمای فاز جواب‌های صورت بهنجار فوق بر حسب زمان را می‌توانید به‌ازای شرط اولیه $(\rho = 0.06, \theta = 1)$ در شکل ۱۱ مشاهده کرد.

توجه داشته باشید که اگر در دستگاه (۱۲)، $\beta_2 = \beta_3 + \frac{40}{27}\beta_1^2$ باشد، در این صورت انشعاب هوپف تباهیده رخ می‌دهد. به این معنا که ضریب ρ^3 در معادله $\dot{\rho}$ صفر می‌شود. به این ترتیب در بررسی انشعابات، ضریب ρ^5 نقش اصلی را دارد. که این مسئله اهمیت نتایج به‌دست آمده در این مقاله را هرچه بیش‌تر نشان می‌دهد.



شکل ۱۱. نمای فاز جواب‌های دستگاه (۱۳) بر حسب زمان به‌ازای شرط اولیه $(\rho = 0.06, \theta = 1)$

منابع

1. Algaba A., Freire E., Gamero E., "Hypernormal Forms for Equilibria of Vector Fields, Codimension One Linear Degeneracies", Rocky Mountain J. Math, 29 (1999) 13-45.
2. Baider A., Churchill R. C., "Unique normal forms for planar vector fields", Math. Z. 199 (1988) 303-310.
3. Chow S. N., Li C., Wang D., "Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields, Cambridge University Press, Cambridge. UK) 1994).

4. Gazor M., Mokhtari F., "Volume-Preserving normal forms of Hopf-Zero singularity", *Nonlinearity*, 26 (2013) 2809-2832.
 5. Gazor M., Yu P., "Spectral Sequences and Parametric normal forms", *J. Differential Equations*, 252 (2012) 1003-1031.
 6. Gazor M., Yu P., "Formal decomposition method and parametric normal forms", *Internat. J. Bifur, Chaos*, 20 (2010) 3487-3515.
 7. Gazor M., Yu P., "Infinite order parametric normal form of Hopf Singularity", *Int. J. Bifurcation chaos*, 11 (2008) 18-45.
 8. Gazor M., Sadri N., "Bifurcation control and universal unfolding for Hopf-zero singularities with leading solenoidal terms", *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 15 (2016) 870-903.
 9. Golubitsky M., Langford W. F., "Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcation", *J. Differential Equations*, 41 (1981) 375-415.
 10. Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D. G., "Singularities and Groups in Bifurcation Theory", Vol I and II, Springer, New York (1985 and 1988).
 11. Govaerts W., KhoshsiarGhaziani R., Kuznetsov Y., Meijer H., "Numerical methods for two-parameter local bifurcation analysis of maps", *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29 (2007) 2644-2667.
 12. Hamzi B., KangW., Barbot J. P., "Analysis and control of Hopf bifurcations", *SIAM J. Control and Optimization*, 42 (2004) 2200-2220.
 13. Murdock J., "Hypernormal form theory: foundations and algorithms", *J. Differential Equations*, 205 (2004) 424-465.
 14. Murdock J., "Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems", Springer-Verlag, New York (2003).
 15. Nafeh A. H., "The method of normal forms", John-Wiley (2011).
 16. Sadri N., "Computation of the Normal form and its Applications in Dynamics Analysis of an HIV model", Master Thesis, Isfahan University of Technology, September (2014).
 17. Yu P., "Closed-Form Condition Of Bifurcation Points For General Differential Equation", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4 (2005) 1467-1483.
 18. YuP., Guanrong C., "The simplest parametrized normal forms ofHopf and generalized Hopf bifurcations", *Int. J. Bifurcation chaos*, 50 (2007) 297-313.
 19. Yu P., Leung A. Y. T., "The simplest normal form of Hopf bifurcation", *Nonlinearity*, 16 (2003) 277-300.
- longitudinal data. Oxford University Press.