مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای

سمیه حاجی‌رضایی
دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۱۰/۲۳ پذیرش ۹۷/۱۲/۰۸

چکیده

در این مقاله به بررسی چند ویژگی از مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که هر مدول تقریباً تک‌رشته‌ای با تولید متناهی روی یک حلقه نوتری، تابی و یا فارغ از تاب است. هم‌چنین ساختار یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای تابی را که اولین ایده‌آل فیتینگ ناصفر آن حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های بیشین است، بررسی کرده و مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای و فارغ از تاب را روی یک دامنه صحیح و یک دامنه تجزیه یکتا رده‌بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مدول تقریباً تک‌رشته‌ای، مدول فارغ از تاب، ایده‌آل فیتینگ، دامنه تجزیه یکتا.

مقدمه

در این مقاله، همهٔ حلقه‌ها یکدار و همه مدول‌ها، یکانی هستند. یک حلقه که مجموعه ایده‌آل‌های آن تحت رابطه شمول به‌طور خطی مرتب هستند، یک حلقه تک‌رشته‌ای نامیده می‌شود.

توجه کنید که حلقه‌های تک‌رشته‌ای تعویض‌پذیر، به‌عنوان حلقه‌های ارزیاب نیز شناخته می‌شوند. R-مدول M تک‌رشته‌ای نامیده می‌شود اگر زیرمدول‌های آن تحت رابطه شمول به‌طور خطی مرتب باشند. هم‌چنین یک مدول رشته‌ای نامیده می‌شود، اگر جمع مستقیمی از مدول‌های تک‌رشته‌ای باشد. بنابراین یک حلقه تک‌رشته‌ای حلقه‌ای است که به‌عنوان R-مدول تک‌رشته‌ای است. هم‌چنین یک حلقه رشته‌ای، حلقه‌ای است که به‌عنوان R-مدول رشته‌ای است.

بررسی حلقه‌های رشته‌ای دارای پیشینه طولانی است. شاید اولین سهم در این راستا منسوب به کُته[1] است. کُته نشان داد که هر مدول روی یک حلقه ایده‌آل اصلی آرتینی (که یک مورد خاص از حلقه‌های رشته‌ای است) جمع مستقیمی از زیرمدول‌های دوری است. ناکایاما[2] ثابت کرد که اگر R یک حلقه رشته‌ای آرتینی باشد، آن‌گاه همه R-مدول‌ها جمع مستقیمی از زیرمدول‌های دوری هستند و عکس این مطلب درست نیست [۱۹]. پس از آن کوهن[3] و کاپلانسکی[4] نشان دادند که برای یک حلقه R همه R-مدول‌ها جمع مستقیمی از زیرمدول‌های دوری هستند اگر و تنها اگر R یک حلقه ایده‌آل اصلی آرتینی باشد [۷]. آسانو[5] در[۱] و [۲] ثابت کرد که حلقه R، رشته‌ای آرتینی است اگر و تنها اگر R یک حلقه ایده‌آل اصلی آرتینی باشند.

*نویسنده مسئول s.hajirezaei@vru.ac.ir

1. Kothe
2. Nakayama
3. Cohen
4. Kaplansky
5. Asano

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.1.7]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.27]

از جمله مشارکت کنندگان اصلی در نظریه حلقه‌های رشته‌ای آسانو، کوهن، آیزنباد[۱]، گلدی[۲]، کاپلانسکی، ناکایاما و وارفیلد[۳] هستند [۱]، [۲]، [۷]، [۹]، [۱۲]، [۱۶]، [۱۹]، [۲۰].

حلقه‌ها و مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های تک‌رشته‌ای، به‌وسیلهٔ بهبودی[۴] و رویین تن اصفهانی[۵] در [۴] معرفی شدند. یک حلقه R تقریباً تک‌رشته‌ای نامیده می‌شود اگر هر دو ایده‌آل غیریکریخت ازآن تحت رابطه شمول به‌طور خطی مرتب باشند. یعنی برای هردو ایده‌آل I و J از R داشته باشیم $J \subseteq I$ یا $I \subseteq J$ یا $I \cong J$.

واضح است که هر حلقه تک‌رشته‌ای تقریباً تک‌رشته‌ای است، اما عکس آن در حالت کلی درست نیست. به‌عنوان یک مثال ساده حلقه $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. $2\mathbb{Z}$ و $3\mathbb{Z}$ ایده‌آل‌هایی از $\mathbb{Z}$ هستند که به‌طور خطی مرتب نیستند. اما داریم $2\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}$. هم‌چنین در[۴] مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای به‌عنوان تعمیمی از مدول‌های تک‌رشته‌ای معرفی شده‌اند. R-مدول M را تقریباً تک‌رشته‌ای می‌گوییم هرگاه هر دو زیرمدول غیریکریخت آن تحت رابطه شمول به‌طور خطی مرتب باشند.

در این مقاله ابتدا به بیان برخی از ویژگی‌های مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای می‌پردازیم و سپس به بررسی ساختار یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای تابی، زمانی که اولین ایده‌آل فیتینگ ناصفر آن حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های بیشین است، می‌پردازیم.

مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای

فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. عنصر $q \in R$ را یک عنصر منظم می‌گوییم هرگاه q یک مقسوم‌علیه صفر نباشد. یعنی اگر به‌ازای عنصر $r \in R$ای داشته باشیم $rq = 0$، آن‌گاه بتوان نتیجه گرفت $r = 0$.

زیرمدول تابی M را با $T(M)$ نمایش داده و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$R\ T(M) = \{m \in M \mid qm = o;\ \text{برای یک عنصر منظم } q \text{ از}\}.$$

هر عنصر $m \in T(M)$ را یک عنصر تابی از M می‌گوییم.

اگر $M = T(M)$، M را یک مدول تابی و اگر $T(M) = 0$، M را یک مدول فارغ از تاب می‌گوییم [۵].

مثال۱ . $\mathbb{Z}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$-مدول فارغ از تاب است اما $\mathbb{Z}_4$ یک $\mathbb{Z}$-مدول تابی است، زیرا برای هر $m \in \mathbb{Z}_4$ داریم $4m = 0$.

مثال۲. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$ را به‌عنوان $\mathbb{Z}$-مدول در نظر بگیرید. داریم $T(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4$. بنابراین $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$-مدول نه تابی است و نه فارغ از تاب.

تعریف. ایده‌آل I ازحلقه R را منظم می‌گوییم هرگاه I شامل یک عنصر منظم باشد.

تعریف. R-مدول M را تقریباً تک‌رشته‌ای می‌گوییم هرگاه هر دو زیرمدول غیریکریخت M تحت رابطه شمول به‌طور خطی مرتب باشند. حلقه R تقریباً تک‌رشته‌ای است هرگاه یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای باشد.

مثال۳. هر دامنهٔ ایده‌آل اصلی (PID) یک حلقه تقریباً تک‌رشته‌ای است. زیرا هر دو ایده‌آل ناصفر Rبه‌صورت Ra و Rb، به‌ازای $0 \neq a,b \in R$ هستند. به‌راحتی دیده می‌شود که $Ra \cong Rb$.

1. Eisenbud
2. Goldie
3. Warfield
4. Behboodi
5. Roointan-Isfahani

[DOI: 10.52547/mmr.7.1.27]

از حکم ۱ در اثبات قضایای اصلی مقاله، استفاده می‌کنیم.

حکم ۱. فرض کنید M یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای با تولید متناهی باشد. دراین صورت هر زیرمدول M حداکثر با دو عنصر تولید می‌شود.

اثبات. به حکم ۲-۱ از [۴] مراجعه شود.

قضیهٔ ۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی تقریباً تک‌رشته‌ای باشد. در این صورت M یک R-مدول تابی و یا یک R-مدول فارغ از تاب است.

اثبات. طبق حکم۱، $T(M)$ حداکثر به‌وسیلهٔ دو عضو تولید می‌شود. اگر M فارغ از تاب نباشد، آن‌گاه $T(M)\neq 0$. فرض کنید $\{x_1,x_2\}$ مجموعه مولدی برای $T(M)$ باشد. بنابراین عناصر منظم q_i، $i=1,2$، وجود دارند به‌طوری که $q_i x_i=0$ برای هر $i=1,2$. قرار دهید $q=q_1q_2$. بنابراین $q\in Ann(T(M))$.

حال همریختی $f:\dfrac{M}{T(M)}\to qM$ را به‌صورت $f(x+T(M))=qx$، تعریف می‌کنیم. چون $q\in Ann(T(M))$، بنابراین f خوش تعریف است. به‌راحتی دیده می‌شود که f یک همریختی پوشا است. هم‌چنین اگر $qx=0$، از آن‌جاکه q یک عنصر منظم از R است، نتیجه می‌شود که $x\in T(M)$. بنابراین f یک به یک است. از این‌رو، $\dfrac{M}{T(M)}\cong qM$. پس qM یک R-مدول فارغ از تاب است. حال دو زیرمدول qM و $T(M)$ از M را در نظر بگیرید. چون qM فارغ از تاب و $T(M)$ تابی است، بنابراین qM و $T(M)$ یکریخت نیستند. هم‌چنین $T(M)\not\subseteq qM$، زیرا $T(M)\neq 0$ و qM شامل هیچ عنصر تابی ناصفری نیست. بنابراین $qM\subseteq T(M)$. چون qM فارغ از تاب است، پس $qM=0$. بنابراین $\dfrac{M}{T(M)}=0$. لذا $M=T(M)$. یعنی M یک R-مدول تابی است.

حکم۲. فرض کنید $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ دنباله‌ای کامل از R-مدول‌ها باشد. اگر B تقریباً تک‌رشته‌ای باشد، آن‌گاه A و C نیز چنین هستند.

اثبات. فرض کنید $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ دنباله‌ای کامل از R-مدول‌ها باشد به‌طوری‌که B یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای است. داریم $A\cong f(A)\leq B$. چون زیرمدول‌های $f(A)$ زیرمدول B نیز هستند، بنابراین $f(A)$ تقریباً تک‌رشته‌ای است. از این‌رو، از یکریختی A و $f(A)$ نتیجه می‌شود، A نیز یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای است. هم‌چنین داریم $\dfrac{B}{\ker g}\cong C$. چون B تقریباً تک‌رشته‌ای است و هر زیرمدول $\dfrac{B}{\ker g}$ به‌صورت $\dfrac{B_1}{\ker g}$، به‌ازای زیرمدول B_1 از B است، بنابراین $\dfrac{B}{\ker g}$ و در نتیجه C، تقریباً تک‌رشته‌ای هستند.

مثال۴. فرض کنید $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ دنباله‌ای کامل از R-مدول‌ها باشد. اگر A و C تقریباً تک‌رشته‌ای باشند، نمی‌توان نتیجه گرفت B تقریباً تک‌رشته‌ای است. به‌عنوان $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ و دنباله کامل $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to 0$ را در نظر بگیرید. بنا به مثال ۳، $\mathbb{Z}$، یک $\mathbb{Z}$-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای است، اما $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ تقریباً تک‌رشته‌ای نیست. زیرا دو زیرمدول $<(2,0),(0,3)>$ و $<(2,2)>$ از $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. به‌راحتی دیده می‌شود که زیرمدول $<(2,0),(0,3)>$ دوری نیست. لذا $<(2,0),(0,3)>$ و $<(2,2)>$ یکریخت نیستند. اگر $<(2,0),(0,3)>\subseteq<(2,2)>$، آن‌گاه اعداد صحیح r و s وجود دارند به‌طوری

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.1.7]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.27]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.1.7]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.27]

که $(2,2)=r(2,0)+s(0,3)$. یعنی $3s=2$ که چنین sای وجود ندارد. از این‌رو، $<(2,2)>$ زیرمجموعه $<(2,0),(0,3)>$ نیست. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که زیرمدول $<(2,0),(0,3)>$ نیز زیرمجموعه $<(2,2)>$ نیست.

ایده‌آل‌های فیتینگ مدول‌های تقریباً تک‌رشته‌ای

فرض کنیم M یک مدول با تولید متناهی روی حلقه تعویض‌پذیر و نوتری R و $\{x_1,\dots,x_n\}$ یک مجموعه مولد کمین برای M باشد (یعنی هیچ زیرمجموعه سره‌ای از $\{x_1,\dots,x_n\}$ نتواند M را تولید کند). R-مدول آزاد $G=\bigoplus_{i=1}^{n}R$ و نگاشت $\psi:G\to M$ را به‌صورت $\psi(e_j)=x_j$، $1\le j\le n$، تعریف می‌کنیم که در آن $\{e_1,\dots,e_n\}$پایه‌ای برای G است. حال فرض کنید $\{y_1,\dots,y_m\}$ یک مجموعه مولد کمین برای $\ker\psi$ باشد، قرار دهید $F=\bigoplus_{i=1}^{m}R$ و نگاشت $\varphi:F\to\ker\psi$ را به‌صورت $\varphi(f_i)=y_i$، $1\le i\le m$، تعریف می‌کنیم که در آن $\{f_1,\dots,f_m\}$ پایه‌ای برای R-مدول آزاد F است. به‌وضوح دنبالهٔ $F\xrightarrow{\varphi}G\xrightarrow{\psi}M\longrightarrow 0$، یک دنبالهٔ دقیق از R-مدول‌ها است، که به آن نمایش آزاد M می‌گوییم. حال فرض کنید $F'\xrightarrow{\varphi'}G'\xrightarrow{\psi'}M\longrightarrow 0$ نمایش آزاد دیگری برای M باشد که در آن G' و F'، R-مدول‌های آزاد از رتبه‌های n' و m' هستند. فرض کنید $A=(a_{ij})_{n\times m}$ و $A'=(a_{ij}')_{n'\times m'}$ به‌ترتیب دو نمایش ماتریسی برای φ و φ' باشند. برای هر $i>0$، منظور از $I_i(\varphi)$، ایده‌آل تولید شده به‌وسیلهٔ کهادهای مرتبهٔ i، از ماتریس A است. هم‌چنین برای $i\le 0$، $I_i(\varphi)$ را R تعریف می‌کنیم. طبق [نتیجه و تعریف ۲۰-۴، ۸] داریم $I_{n-i}(\varphi)=I_{n'-i}(\varphi')$. از این‌رو، i-امین ایده‌آل فیتینگ M را به‌صورت $\mathrm{Fitt}_i(M)=I_{n-i}(\varphi)$ تعریف می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\mathrm{Fitt}_0(M)\subseteq \mathrm{Fitt}_1(M)\subseteq\dots\subseteq\mathrm{Fitt}_n(M)=R.$$

ایده‌آل‌های فیتینگ ابزاری قوی، برای رده‌بندی مدول‌ها و شناسایی برخی از ویژگی‌های آن‌ها هستند. در بین ایده‌آل‌های فیتینگ یک مدول، اولین ایده‌آل فیتینگ ناصفر، اهمیت بیش‌تری دارد. این ایده‌آل را با $I(M)$ نمایش می‌دهیم. لم لیپمن[1] [۱۸] بیان می‌کند که اگر R یک حلقه موضعی و K زیرمدولی از R^n باشد و $M=\frac{R^n}{K}$، آن‌گاه $I(M)$ یک ایده‌آل اصلی منظم از R است اگر و تنها اگر K یک R-مدول آزاد با تولید متناهی و $\frac{M}{T(M)}$ یک R-مدول آزاد باشد.

هم‌چنین بوخسباوم[2] و آیزنباد در[۶] نشان داده‌اند که M یک R-مدول تصویری از رتبه ثابت است اگر و تنها اگر $I(M)=R$.

حاجی‌رضایی و هدایت [۱۳]، نشان دادند که اگر R یک دامنه تجزیه یکتای (UFD) نوتری و Q ایده‌آل بیشینی از R و Mیک R-مدول با تولید متناهی باشد به‌طوری‌که $T(M)\neq 0$، در این صورت $I(M)=Q$ اگر و تنها اگر $M\cong\frac{R}{Q}\oplus N$، برای یک R-مدول تصویری N از رتبه ثابت و $Q\in Ass(M)$.

1. Lipman
2. Buchsbaum

هم‌چنین آنها در [۱۴] نشان دادند که اگر R حلقه‌ای نوتری، Q یک ایده‌آل بیشین منظم و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد به‌طوری‌که $T(M) \nsubseteq QM$، آن‌گاه $I(M)=Q$ اگر و تنها اگر $M \cong \frac{R}{Q} \oplus N$، برای یک R-مدول تصویری N از رتبه ثابت.

در این بخش به بررسی ساختار یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای تابی، زمانی که اولین ایده‌آل فیتینگ ناصفر آن حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های بیشین است، می‌پردازیم. ابتدا مسئله را در حالت موضعی بررسی می‌کنیم.

از لم ۱ در اثبات قضایای ۲ و ۳، استفاده می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت:

۱) $\mathrm{Fitt}_0(M) \subseteq Ann(M)$.

۲) اگر M بتواند به‌وسیلهٔ n عنصر تولید شود، آن‌گاه $(Ann(M))^n \subseteq \mathrm{Fitt}_0(M)$.

اثبات. به حکم ۲۰-۷ از [۸] مراجعه شود.

قضیهٔ ۲. فرض کنید (R,P) یک حلقه موضعی، تعویض‌پذیر و نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی تقریباً تک‌رشته‌ای باشد که $I(M)=P^{\alpha}$، به‌ازای یک عدد طبیعی α. اگر M تابی باشد، آن‌گاه $M \cong \frac{R}{P^{\alpha}}$ یا $M \cong \frac{R}{P} \oplus \frac{R}{P}$ و یا $P^nM \cong (\frac{R}{P})^k$، $\exists k=1,2$، برای یک عدد طبیعی $n \leq \alpha-1$.

اثبات. از آن‌جاکه $M=T(M)$، بنابراین عنصر منظم $q \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $q \in Ann(M)$. هم‌چنین طبق حکم ۱، M حداکثر با ۲ عضو تولید می‌شود. پس بنا به لم ۱، $(Ann(M))^2 \subseteq \mathrm{Fitt}_0(M)$، از این‌رو، $0 \neq q^2 \in \mathrm{Fitt}_0(M)$. پس $I(M)=\mathrm{Fitt}_0(M)=\mathrm{P}^{\alpha}$. اگر M دوری باشد، آن‌گاه واضح است که $Ann(M)=\mathrm{Fitt}_0(M)=P^{\alpha}$. پس $M \cong \frac{R}{P^{\alpha}}$. حال فرض کنید M دوری نباشد. بنا به لم ۱، $\sqrt{\mathrm{Fitt}_0(M)}=\sqrt{Ann(M)}=P$. پس $\sqrt{Ann(M)}=P=\bigcap_{Ann(M)\subseteq Q\in Ass(M)} Q$. از آن‌جاکه P یک ایده‌آل بیشین است، از این‌رو، $Ass(M)=\{P\}$. پس عنصر ناصفر x در M وجود دارد به‌طوری‌که $P=Ann(x)$. اگر $x \notin PM$، آن‌گاه می‌توان $\{x\}$ را به یک مجموعه مولد مینیمال مانند $\{x,y\}$ برای M، گسترش داد. پس $<x> \cong <y>$. از این‌رو، $Ann(x)=Ann(y)=P$. بنابراین $M=<x>\oplus<y> \cong \frac{R}{P} \oplus \frac{R}{P}$. حال فرض کنید $x \in PM$. طبق قضیهٔ اشتراکی کرول عدد طبیعی n موجود است به‌طوری‌که $x \in P^nM \setminus P^{n+1}M$. اگر P^nM دوری باشد، آن‌گاه $P^nM \cong \frac{R}{(P^{\alpha}:P^n)}$ و اگر P^nM دوری نباشد، آن‌گاه می‌توان $\{x\}$ را به یک مجموعهٔ مولد مینیمال مانند $\{x,y\}$ برای P^nM، گسترش داد. مانند قسمت قبل داریم $Ann(x)=Ann(y)=P$. بنابراین $P^nM \cong \frac{R}{P} \oplus \frac{R}{P}$. چون $\mathrm{Fitt}_0(M)=P^{\alpha} \subseteq Ann(M)$، واضح است که $n \leq \alpha-1$.

حال قضیهٔ ۲ را به حالت سرتاسری تعمیم می‌دهیم.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.1.7]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.27]

قضیهٔ ۳. فرض کنید P_1،...، P_m، ایده‌آل‌های بیشین متمایزی از حلقه تعویض‌پذیر و نوتری R و M یک R-مدول با تولید متناهی تقریباً تک‌رشته‌ای باشد که $I(M)=P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}$. اگر M تابی باشد، آن‌گاه $m=1$ و $M\cong \frac{R}{P_1^{\alpha_1}}$ یا $M\cong \frac{R}{P_1}\oplus\frac{R}{P_1}$ و یا $P_1^nM\cong(\frac{R}{P_1})^k$، $\exists k=1,2$، به‌ازای یک عدد طبیعی n.

اثبات. مشابه اثبات قضیهٔ ۲، داریم $I(M)=\mathrm{Fitt}_0(M)$. ادعا می‌کنیم $m=1$. فرض کنید $m\geq 2$. نشان می‌دهیم

$$M=\{x\in M|P_1^{\alpha_1}x=0\}\oplus...\oplus\{x\in M|P_m{}^{\alpha_m}x=0\}.$$

چون $\{P_i{}^{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ ایده‌آل‌های متباینی هستند از این‌رو، $\sum_{i=1}^m\prod_{j\neq i}P_j{}^{\alpha_j}=R$. لذا عناصر $a_i\in\prod_{j\neq i}P_j{}^{\alpha_j}$، $1\leq i\leq m$، وجود دارند به‌طوری‌که $a_1+...+a_m=1$.

حال فرض کنید y عنصر دلخواهی از M باشد. داریم

$$y=a_1y+...+a_my.$$

بنا به لم ۱، $\mathrm{Fitt}_0(M)\subseteq Ann(M)$، بنابراین $P_1^{\alpha_1}...P_m{}^{\alpha_m}y=0$. از آن‌جاکه $a_i\in\prod_{j\neq i}P_j{}^{\alpha_j}$، از این‌رو، $P_i{}^{\alpha_i}a_iy=0$ به ازای $i=1,\dots,m$.

بنابراین

$$M=\{x\in M|P_1^{\alpha_1}x=0\}+...+\{x\in M|P_m{}^{\alpha_m}x=0\}.$$

حال فرض کنید i، $1\leq i\leq m$، دلخواه و ثابت باشد و

$$x\in\{x\in M|P_i{}^{\alpha_i}x=0\}\bigcap\sum_{i\neq j=1}^m\{x\in M|P_j{}^{\alpha_j}x=0\}.$$

بنابراین $x=x_1+...+\hat{x}_i+...+x_m$، که در آن $x_j\in\{x\in M|P_j{}^{\alpha_j}x=0\}$، $1\leq j\leq m$، $j\neq i$. از این رو $\prod_{j\neq i}P_j{}^{\alpha_j}x=0$. از طرفی $x\in\{x\in M|P_i{}^{\alpha_i}x=0\}$. پس $P_i{}^{\alpha_i}x=0$. لذا $(P_i{}^{\alpha_i}+\prod_{j\neq i}P_j{}^{\alpha_j})x=0$.

از آن‌جاکه $P_i{}^{\alpha_i}+\prod_{j\neq i}P_j{}^{\alpha_j}=R$، پس $x=0$. بنابراین

$$M=\{x\in M|P_1^{\alpha_1}x=0\}\oplus...\oplus\{x\in M|P_m{}^{\alpha_m}x=0\}.$$

قرار دهید $M_1=\{x\in M|P_1^{\alpha_1}x=0\}$ و $M_2=\{x\in M|P_2^{\alpha_2}x=0\}\oplus...\oplus\{x\in M|P_m{}^{\alpha_m}x=0\}$.

اگر $M_1=0$، آن‌گاه

$$M=\{x\in M|P_2^{\alpha 2}x=0\}\oplus...\oplus\{x\in M|P_m{}^{\alpha_m}x=0\}.$$

بنابراین $P_2^{\alpha_2}...P_m{}^{\alpha_m}\subseteq Ann(M)$. پس بنا به لم ۱،

$$P_2{}^{2\alpha_2}...P_m{}^{2\alpha_m}\subseteq\mathrm{Fitt}_0(M)=P_1^{\alpha_1}...P_m{}^{\alpha_m}\subseteq P_1^{\alpha_1}.$$

پس $2\leq i\leq m$ وجود دارد به‌طوری‌که $P_i=P_1$، که این با فرض متمایز بودن P_iها در تناقض است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $M_2\neq 0$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.1.7]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.27]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.1.7]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.27]

از آن‌جاکه M تقریباً تک‌رشته‌ای است و $M_1 \cap M_2 = 0$، بنابراین هر زیرمدول ناصفر M_1 یکریخت با M_2 و هر زیرمدول ناصفر M_2 یکریخت با M_1 است. حال فرض کنید N زیرمدول سره‌ای از M_1 باشد. بنابراین $N \oplus M_2$ با M_1 قابل مقایسه نیست. از این‌رو، $N \oplus M_2 \cong M_1 \cong M_2$. از آن‌جاکه M و در نتیجه M_2 نوتری است، پس $N = 0$. از این‌رو، M_1 یک زیرمدول ساده از M است. بنابراین ایده‌آل بیشین Q_1 از R موجود است به‌طوری‌که $M_1 \cong \frac{R}{Q_1}$. از طرفی داریم $P_1^{\alpha_1} \subseteq Ann(M_1) = Q_1$. پس $P_1 = Q_1$. از این‌رو، $M_1 \cong \frac{R}{P_1}$. چون $M_1 \cong M_2$، پس $M_2 \cong \frac{R}{P_1}$. از طرفی $P_2^{\alpha_2}...P_m^{\alpha_m} \subseteq Ann(M_2) = P_1$. لذا $i \in \{1,\dots,m\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $P_i = P_1$ که با فرض متمایز بودن P_iها در تناقض است. بنابراین $m = 1$ و $\mathrm{Fitt}_0(M) = P_1^{\alpha_1}$. حال طبق قضیهٔ ۲، داریم $M_{P_1} \cong \frac{R_{P_1}}{P_1^{\alpha_1} R_{P1}}$ یا $M_{P_1} \cong \frac{R_{P_1}}{P_1 R_{P_1}} \oplus \frac{R_{P_1}}{P_1 R_{P_1}}$ و یا $P_1^n M_{P_1} \cong \frac{R_{P_1}}{P_1 R_{P_1}} \oplus \frac{R_{P_1}}{P_1 R_{P_1}}$ و یا $P_1^n M_{P_1} \cong \frac{R_{P_1}}{P_1 R_{P_1}}$. فرض کنید $M_{P_1} \cong \frac{R_{P_1}}{P_1^{\alpha_1} R_{P1}}$. برای هر ایده‌آل اول $Q \neq P_1$ از R داریم $\mathrm{Fitt}_0(M_Q) = \mathrm{Fitt}_0(M)_Q = R_Q$. از این‌رو، طبق [لم ۱ از مرجع ۶]، M_Q یک R_Q-مدول آزاد است. از طرفی چون $M = T(M)$ پس $M_Q = 0$. بنابراین طبق [لم ۲-۴ از مرجع ۱۵]، داریم $M \cong \frac{R}{P_1^{\alpha_1}}$. در بقیهٔ موارد نیز به‌طور مشابه اثبات میشود $M \cong \frac{R}{P_1} \oplus \frac{R}{P_1}$ و یا $P_1^n M \cong (\frac{R}{P_1})^k$، $\exists k = 1,2$، به‌ازای یک عدد طبیعی n.

قضیهٔ ۴. فرض کنید R یک دامنه صحیح نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی تقریباً تک‌رشته‌ای فارغ از تاب باشد. در این صورت $M \cong \frac{R^2}{<\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}>}$ یا $M \cong \frac{R^2}{\left\langle \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\rangle}$، برای برخی $a,b,c,d \in R$ که در حالت دوم $ad = bc$.

اثبات. طبق حکم ۱، M حداکثر با دو عضو تولید می‌شود. اگر M دوری باشد، آن‌گاه $M \cong \frac{R}{Ann(M)}$. از آن‌جاکه M فارغ از تاب است پس $Ann(M) = 0$. از این‌رو، $M \cong R \cong \frac{R^2}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$. حال فرض کنید M به‌وسیلهٔ دو عضو y, x تولید شود و M دوری نباشد. دنبالهٔ دقیق (کامل) کوتاه $0 \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{i} R^2 \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ را در نظر می‌گیریم، جای‌که i نگاشت شمول بوده است و φ به‌طور طبیعی تعریف می‌شود. طبق حکم ۱، زیرمدول $Rx \cap Ry$ از M حداکثر به‌وسیلهٔ دو عضو تولید می‌شود. از این‌رو، دو حالت داریم:

حالت اول: $Rx \cap Ry$ دوری باشد. پس $a', b' \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $Rx \cap Ry = Ra'x = Rb'y$. پس $s' \in R$ موجود است که $a'x = s'b'y$. گیریم $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \ker\varphi$. از این‌رو، $rx + sy = 0$ و در نتیجه داریم $rx = -sy \in Rx \cap Ry$. پس $t \in R$ یافت می‌شود به‌قسمی که $rx = -sy = ta'x = ts'b'y$. از این‌رو، از فارغ

از تاب بودن M نتیجه می‌گیریم که $r=ta'$ و $s=-ts'b'$. پس $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} a' \\ -s'b' \end{pmatrix}$. بنابراین $\ker\varphi=\langle\begin{pmatrix} a' \\ -s'b' \end{pmatrix}\rangle$ و در نتیجه $M\cong\frac{R^2}{\langle\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle}$ جائی‌که $a=a'$ و $b=-s'b'$.

حالت دوم: $Rx\bigcap Ry$ به‌وسیلهٔ دو عضو تولید شود. پس عناصر $a',b',c',d'\in R$ یافت می‌شوند به‌طوری‌که $Rx\bigcap Ry=Ra'x+Rc'x$ و $a'x=b'y$ و $c'x=d'y$. گیریم $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\in\ker\varphi$. از این‌رو، $rx+sy=0$ و در نتیجه داریم $rx=-sy\in Rx\bigcap Ry$. پس $t,u\in R$ یافت می‌شوند به‌قسمی که $rx=ta'x+uc'x$ و لذا $-sy=tb'y+ud'y$. از آنجاکه M فارغ از تاب است، پس نتیجه می‌گیریم که $r=ta'+uc'$ و $-s=tb'+ud'$. از این‌رو، $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} a' \\ -b' \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} c' \\ -d' \end{pmatrix}$. بنابراین $\ker(\varphi)=\langle\begin{pmatrix} a' & c' \\ -b' & -d' \end{pmatrix}\rangle$ و در نتیجه $M\cong\frac{R^2}{\langle\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\rangle}$ جایی‌که $a=a'$، $b=-b'$، $c=c'$ و $d=-d'$. از آنجا که $\mathrm{Fitt}_0(M)=0$، از این‌رو، $ad=bc$ و اثبات کامل است.

دامنهٔ صحیح R یک دامنهٔ تجزیه یکتا (UFD) نامیده میشود هرگاه بتوان هر عضو ناصفر و غیریکه آن را به‌طور یکتایی به‌صورت حاصل‌ضرب عناصر تحویل‌ناپذیر نوشت. توجه کنید که در یک دامنهٔ تجزیه یکتا همیشه بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عنصر a و b وجود دارد که آن را با $GCD(a,b)$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه. فرض کنید R یک دامنهٔ تجزیه یکتای (UFD) نوتری و M یک R-مدول تقریباً تک‌رشته‌ای باشد. اگر M فارغ از تاب باشد، آن‌گاه $M\cong\frac{R^2}{\langle\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle}$، به‌ازای برخی $a,b\in R$.

اثبات. بنا به قضیهٔ ۴، $M\cong\frac{R^2}{\langle\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle}$ یا $M\cong\frac{R^2}{\langle\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\rangle}$، برای برخی $a,b,c,d\in R$ که در حالت دوم $ad=bc$. اگر $M\cong\frac{R^2}{\langle\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle}$، که نتیجه اثبات شده است. فرض کنید $M\cong\frac{R^2}{\langle\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\rangle}$. واضح است a,b هم‌زمان صفر نیستند. فرض کنید $a\neq 0$. بنابراین $x_0=GCD(a,b)\neq 0$. داریم $x_0(\frac{a}{x_0}x+\frac{b}{x_0}y)=0$، جایی‌که x و y همان مولدهای M در اثبات قضیه ۴ هستند. از آن‌جاکه M فارغ از تاب است، بنابراین $(\frac{a}{x_0}x+\frac{b}{x_0}y)=0$. پس با جای‌گزین کردن $\begin{pmatrix} \frac{a}{x_0} \\ \frac{b}{x_0} \end{pmatrix}$ با $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ می‌توان فرض کرد $GCD(a,b)=1$. داریم

$ad=bc$. از این‌رو، $a|bc$. چون $GCD(a,b)=1$، لذا $a|c$. بنابراین عنصر $t\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $c=at$. هم‌چنین چون $b|ad$ و $GCD(a,b)=1$، از این‌رو، $b|d$. بنابراین عنصر $t'\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $d=t'b$. از رابطهٔ $ad=bc$ نتیجه می‌شود که $at'b=bat$. اگر $b\neq 0$، آن‌گاه $t=t'$. پس $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. این یعنی $M\cong\frac{R^2}{<\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}>}$. اگر $b=0$، آن‌گاه $ad=bc=0$. لذا $d=0$ و چون $GCD(a,b)=1$ پس a یکه است. از این‌رو، $<\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}>=<\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}>$. بنابراین $M\cong\frac{R^2}{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}$ و اثبات کامل است.

منابع

1. Asano K., "Uber Hauptidealringe mit Kettensatz", Osaka J. Math., 1 (1949) 52-61.
2. Asano K., "Uber Verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit hyperkomplexem operatorenring und ihre Anwendungen", Jpn. J. Math., 15 (1939) 231-253.
3. Behboodi M., Ghorbani A., Moradzadeh-Dehkordi A., Shojaee S. H., "On left Kothe rings and a generalization of a Kothe-Cohen-Kaplansky Theorem", Proc. Amer. Math. Soc., 142 (2014) 2625-2631.
4. Behboodi M., Roointan-Isfahani S., "Almost uniserial rings and modules", J. Algebra, 446 (2016) 176-187.
5. Brown W. C., "Matrices Over Commutative Rings", Pure Appl. Math. 169, Marcel Dekker Inc., New York (1993).
6. Buchsbaum, D. A., Eisenbud, D., "What makes a complex exact?", J. Algebra, 25 (1973) 259-268.
7. Cohen I. S., Kaplansky I., "Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules", Math. Z., 54 (1951) 97-101.
8. Eisenbud D., "Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry", Springer-verlag, New York (1995).
9. Eisenbud D., Griffith P., "The structure of serial rings", Pacific J. Math., 36 (1971), 109-121.
10. Facchini A., "Krull-Schmidt fails for serial modules", Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996) 4561-4575.
11. Fuchs L., Salce L., "Uniserial modules over valuation rings", J. Algebra 85 (1983) 14-31.
12. Goldie A. W., "Non-commutative principal ideal rings", Arch. Math. 13 (1962) 213-221.

13. Hadjirezaei S., Hedayat S., "On the first nonzero Fitting ideal of a module over a UFD", Commun. Algebra, 41 (2013) 361-366.
14. Hadjirezaei S., Hedayat S., "On finitely generated module whose first nonzero Fitting ideal is maximal", Commun. Algebra, 46(2) (2018) 610-614.
15. Hadjirezaei S., Karimzadeh S., "On the order of a module", Bull. Iranian Math. Soc., 42(4) (2016) 923-931
16. Kaplansky I., "Elementary divisors and modules", Trans. Amer. Math. Soc., 66 (1949) 464-491.
17. Kothe G., "Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring", Math. Z., 39 (1935) 31-44.
18. Lipman J., "On the Jacobian ideal of the module of differentials", Proc. Amer. Math. Soc., 21 (1969) 423-426.
19. Nakayama T., "On Frobeniusean algebras II", Ann. of Math., (2) 42 (1941), 1-21.
20. Warfield Jr. R. B, "Serial rings and finitely presented modules", J. Algebra, 37 (1975) 187-222.