بررسی وجود و یگانگی جواب نوعی معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مختلط در فضاهای توابع پیوسته هلدر و سوبولف

فاطمه جوینی، مژگان اکبری*
دانشگاه گیلان، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

دریافت ۹۶/۱۰/۲۷ پذیرش ۹۷/۱۱/۰۲

چکیده

در این مقاله به بررسی وجود و یگانگی جواب نوعی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی در فضای مختلط به‌صورت

$$F(z,\bar{z},w,p,q)=0,$$

که در آن

$$z=x+iy,\qquad w=w(z),\qquad p=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right),\qquad q=\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

می‌پردازیم. در ابتدا با تبدیل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی در فضای مختلط به یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبهٔ اول، وجود جواب را نشان می‌دهیم. سپس با به‌کارگیری عملگرهای انتگرالی تکین ضعیف و قوی و ویژگی تابع هولومورفی، هم‌ارزی جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی را با یک دستگاه معادلات انتگرالی تکین نشان می‌دهیم. هم‌چنین، جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مختلط را در فضای توابع پیوسته هلدر یک مرتبه مشتق‌پذیر و فضای سوبولف به‌ترتیب روی ناحیه‌ای کراندار و با مساحت متناهی بررسی می‌کنیم. با بیان شرط لیپ شیتس به‌صورت جداگانه در هر دو فضای توابع پیوسته هلدر یک مرتبهٔ مشتق‌پذیر و فضای سوبولف و با تکیه بر ویژگی تابع انقباض و قضیه نقطه ثابت باناخ، یگانگی جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مختلط مورد نظر در این مقاله اثبات می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی، توابع پیوسته هلدر، فضای سوبولف، قضیه نقطه ثابت باناخ.

مقدمه

یک نگاه عمیق به مفاهیم پیوستگی، مشتق و انتگرال در آنالیز مختلط و رابطهٔ آنها با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، اهمیت ایجاد رابطه بین آنالیز مختلط و نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را مشخص می‌کند. با کنار هم قرار دادن تابع انقباض، قضایای مربوط به فرمول انتگرال گاوس-اترگرادسکی[1] و قضیهٔ نقطه ثابت باناخ در فضای مختلط، روش کلاسیک و جالب وجود و یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی

---

*نویسنده مسئول m_akbari@guilan.ac.ir

1. Gauss-Oatrogradski

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]

هموار می‌شود که اهمیت آنالیز مختلط در شاخه نظریه معادلات دیفرانسیل را به‌خوبی نشان می‌دهد که یکی از اهداف اصلی آنالیز مختلط، کاربرد سیستماتیک آن در شاخه نظریه معادلات دیفرانسیل به‌صورت واضح نمود پیدا می‌کند.

نمونه‌هایی از روش‌های تحلیلی توابع در آنالیز مختلط و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و توابع تحلیلی تعمیم یافته را می‌توان در [۱] و [۲] ملاحظه کرد. در سال‌های اخیر آنالیز مختلط و رابطه آنها با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توجه تعدادی از محققان را به‌خود جلب کرده است که در در ادامه به برخی از مسائل بررسی شده مرتبط با این مقاله اشاره می‌کنیم.

ماموریان، اسرافیلیان و تقی‌زاده [۳]، با تبدیل دستگاه غیرخطی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$\begin{cases} H_j\left(x, y, u_1, \dots, u_{2n}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial u_{2n}}{\partial x}, \dfrac{\partial u_1}{\partial y}, \dots \dfrac{\partial u_{2n}}{\partial y}\right) = 0, \\ j = 1,2, \dots, 2n, \end{cases}$$

به‌صورت

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

به بررسی وجود و یگانگی جواب این معادله در فضای سوبولف با تکیه بر قضیه نقطه ثابت باناخ پرداختند.

تقی‌زاده و اکبری [۴]، وجود و یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی $F\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) = 0$ را در فضای سوبولف بررسی کردند. هم‌چنین تقی زاده و اکبری [۵]، وجود جواب معادله وکوآ[1]

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = A(z)w + B(z)\overline{w} + C(z),$$

همراه با شرایط

$$\begin{cases} Re\ (a + ib)w = \mathrm{g} \ \text{ on } \ \partial \mathrm{D}, \\ g \in W_p^s(\mathrm{D}), \mathrm{s} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{p}}, 2 < p < \infty, \end{cases}$$

که در آن a، b و g توابع حقیقی مقدار اندازه‌پذیر روی ∂D است، را بررسی کردند.

تقی‌زاده و نوروزپور [۶]، جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی غیرخطی در حالت کلی $F\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) = 0$ را با به‌کارگیری قضیه نقطه ثابت باناخ و تابع انقباض در فضای توابع پیوسته هلدر مطرح کرده‌اند.

در این مقاله به بررسی نوعی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی در فضای مختلط به‌صورت

$$F(z, \bar{z}, w, p, q) = 0, \tag{۱}$$

می‌پردازیم که در آن

$$q = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \text{ و } p = \frac{\partial w}{\partial z} \text{ ،} w = w(z) \text{ ،} z = x + iy.$$

وجود و یگانگی جواب معادلهٔ (۱) را در دو فضای توابع پیوسته هلدر و سوبولف با تکیه بر تابع انقباض و قضیه نقطه ثابت باناخ، بررسی می‌کنیم. این مقاله به‌صورت زیر تنظیم شده است. در بخش بعدی برخی تعاریف و مفاهیم مورد نیاز مطرح شده است سپس نتایج اصلی بیان و ثابت می‌شود.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱. تابع f را در ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^n$ پیوسته هلدر با توان α $(0 < \alpha \leq 1)$ گوییم هرگاه

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in D\ (x \neq y)\ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}} \leq K.$$

---

1. Vekua

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]

فضای این دسته از توابع را با نماد $C_\alpha(D)$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۱. اگر $\alpha = 1$، آن‌گاه تابع f را پیوسته لیپ شیتس می‌گوییم.

تعریف ۲. مجموعه توابع پیوسته و مشتق‌پذیر تا مرتبهٔ m را روی ناحیهٔ $D\subseteq\mathbb{R}^n$ با نماد $C^m(D)$ نشان می‌دهیم. با نرم

$$\|f\|_{C^m(D)} = \sup_{0\le s\le m} \{|D^s f(x)|, \qquad f \in C^m(D), \qquad x \in D\},$$

فضای $C^m(D)$ به فضای باناخ تبدیل می‌شود.

تعریف ۳. اگر $D\subseteq\mathbb{R}^n$ و $0 < \alpha \le 1$ در این‌صورت مجموعه توابع پیوسته هلدر که تا مرتبهٔ mام مشتق‌پذیرند را با نماد $C_\alpha^m(D)$ نشان می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$C_\alpha^m(D) = \left\{f \in C^m(D),\ \ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \le K, \qquad K \in \mathbb{R}^+,\ \ x, y \in D, \qquad x \ne y\right\}.$$

به‌ازای هر $f \in C_\alpha^m(D)$ با تعریف نرم

$$\|f\|_{C_\alpha^m(\boldsymbol{D})} = \sup_{0\le s\le m} |D^s f(x)| + \max_{0\le s\le m} \frac{|D^s f(x) - D^s f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \qquad x, y \in D, \qquad x \ne y,$$

فضای $C_\alpha^m(D)$ به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود.

تبصره ۲. به‌طور مشابه تعاریف ۲ و ۳ برای $\overline{D} = \mathrm{D} \cup \partial\mathrm{D}$، نیز برقرار است.

تعریف ۴. اگر $D\subseteq\mathbb{R}^n$ و $1 \le p < \infty$ یک عدد حقیقی باشد و f یک تابع انتگرال‌پذیر لبگ و $|f|^p$ دارای انتگرال لبگ و کراندار باشد، آن‌گاه مجموعهٔ فضای توابع فوق با نماد $L_p(D)$ نشان داده می‌شود.

به‌ازای هر $f \in L_{p(D)}$، با تعریف نرم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

فضای $L_p(D)$ به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود.

تعریف ۵. اگر $D\subseteq\mathbb{R}^n$ و $1 \le p < \infty$ یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه فضای سوبولف $W_p^m(D)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$W_p^m(D) = \{f \in L_p(D){:}\ D^s f \in L_p(D),\ \ 0 \le s \le m\}.$$

به‌ازای هر $f \in W_p^m(D)$، با تعریف نرم

$$\|f\|_{W_p^m(D)} = \sum_{0\le s\le m} \left(\int_D |D^s f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

فضای $W_p^m(D)$ به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود.

تعریف ۶. اگر $D\subseteq\mathbb{R}^n$ و n=۲، آن‌گاه دو عملگر انتگرالی تکین ضعیف و قوی به‌صورت

$$T_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\zeta d\eta, \qquad \Pi_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\zeta d\eta\,,$$

تعریف می‌شوند که در آن $z = x + iy$ و $\xi = \zeta + i\eta$.

قضیهٔ ۱. [۱]، اگر f در ناحیهٔ متناهی $D\subseteq\mathbb{R}^n$ کراندار و پیوسته هلدر با توان α $(0 < \alpha \le 1)$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{\partial}{\partial z} T_D f(z) = \Pi_D\, f(z), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} T_D f(z) = f(z).$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]

نتایج اصلی

فرض کنید $w = w(z)$، جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مختلط (۱) باشد.

معادله دیفرانسیل جزئی مختلط دیگری مشابه (۱) را به‌صورت (۲) در نظر بگیرید:

$$G(z, \bar{z}, w, p, q) = 0, \qquad (۲)$$

با مشتق‌گیری جزئی از (۱) و (۲) نسبت به z و $\bar{z}$ داریم:

$$F_z + F_w p + F_p p_z + F_q q_z = 0, \qquad (۳)$$

$$F_{\bar{z}} + F_w q + F_p p_{\bar{z}} + F_q q_{\bar{z}} = 0, \qquad (۴)$$

$$G_z + G_w p + G_p p_z + G_q q_z = 0, \qquad (۵)$$

$$G_{\bar{z}} + G_w q + G_p p_{\bar{z}} + G_q q_{\bar{z}} = 0. \qquad (۶)$$

بنابراین از (۳) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$G_p F_z + F_w p G_p + F_q q_z G_p - F_p G_z - G_w p F_p - F_p G_q q_z = 0. \qquad (۷)$$

هم‌چنین از (۴) و (۶) داریم:

$$G_q F_{\bar{z}} + F_w q G_p + F_p p_{\bar{z}} G_q - F_q G_{\bar{z}} - G_w q F_q - F_q G_p p_{\bar{z}} = 0. \qquad (۸)$$

علاوه‌براین، از آن‌جاکه

$$q_z = \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = p_{\bar{z}}, \qquad (۹)$$

و نیز از (۷) و (۸)، به یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی از مرتبهٔ اول به‌صورت (۱۰) می‌رسیم:

$$G_p(F_z + pF_w) + G_q(F_{\bar{z}} + qF_w) + G_w(-pF_p - qF_q) + G_z(-F_p) + G_{\bar{z}}(-F_q) = 0. \qquad (۱۰)$$

در نتیجه p و q، با به‌کارگیری روش لاگرانژ بدین‌صورت حاصل می‌شوند:

$$\frac{dp}{F_z + pF_w} = \frac{dq}{F_{\bar{z}} + qF_w} = \frac{dw}{-pF_p - qF_q} = \frac{dz}{-F_p} = \frac{d\bar{z}}{-F_q}.$$

بنابراین از جای‌گذاری p و q در $dw = pdz + qd\bar{z}$ ،w به‌دست می‌آید.

لم ۱. اگر D ناحیهٔ کراندار متعلق به C_α^1 و $0 < \alpha \le 1$ باشد، آن‌گاه $w = w(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$، جوابی از معادله (۱) است اگر و فقط اگر (w, p)، جوابی از (۱۱) باشد.

$$\begin{cases} w(z) = \emptyset(z) + T_D F\left(z, \bar{z}, w, p, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \\ p(z) = \emptyset'(z) + \Pi_D F\left(z, \bar{z}, w, p, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که در آن $\emptyset \in C_\alpha^1(\overline{D})$ یک تابع هولومورفی با شرط $\frac{\partial \emptyset}{\partial \bar{z}} = 0$ است.

برهان. فرض کنید $w = w(z)$ جوابی از معادلهٔ (۱) باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\emptyset(z) = w(z) - T_D F\left(z, \bar{z}, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right). \qquad (۱۲)$$

با مشتق‌گیری جزئی از (۱۲) نسبت به z و $\bar{z}$ و با به‌کارگیری قضیهٔ ۱ داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \emptyset}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial z} - \Pi_D F\left(z, \bar{z}, w, \dfrac{\partial w}{\partial z}, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \\ \dfrac{\partial \emptyset}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} - F\left(z, \bar{z}, w, \dfrac{\partial w}{\partial z}, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) = 0. \end{cases} \qquad (۱۳)$$

از معادلهٔ دوم دستگاه (۱۳) و نیز با به‌کارگیری لم ویل نتیجه می‌گیریم که ϕ یک تابع هولومورفیک در D است.

بنابراین، اگر w جوابی از معادلهٔ (۱) باشد آن‌گاه داریم:

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]

$$w(z) = \emptyset(z) + T_D F\left(z, \bar{z}, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right),$$

که در آن ϕ یک تابع هولومورفیک در D است. هم‌چنین داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \emptyset}{\partial z} + \Pi_D F\left(z, \bar{z}, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right).$$

قرار می‌دهیم $p = \frac{\partial w}{\partial z}$. بنابراین

$$p(z) = \emptyset'(z) + \Pi_D F\left(z, \bar{z}, w, p, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right).$$

در نتیجه (w,p)، جوابی از دستگاه (۱۱) است.

برعکس: فرض کنیم (w,p) جوابی از دستگاه (۱۱) باشد، در این‌صورت اگر از معادلهٔ اول دستگاه (۱۱) نسبت به z و $\bar{z}$ مشتق بگیریم و با به‌کارگیری قضیهٔ ۱ داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial z} = \phi'(z) + \Pi_D F\left(z, \bar{z}, w, \dfrac{\partial w}{\partial z}, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F\left(z, \bar{z}, w, \dfrac{\partial w}{\partial z}, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) = 0. \end{cases}$$

در نتیجه w جوابی از معادلهٔ (۱) است.

لم ۲. اگر $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ و با مساحت متناهی باشد، آن‌گاه $w = w(z) \in W_p^1(D)$ و $1 < p < \infty$ جوابی از (۱) است اگر و فقط اگر (w,p)، جوابی از

$$\begin{cases} w(z) = \emptyset(z) + T_D F\left(z, \bar{z}, w, p, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \\ p(z) = \emptyset'(z) + \Pi_D F\left(z, \bar{z}, w, p, \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \end{cases}$$

باشد که در آن $\emptyset \in W_p^1(D)$ یک تابع هولومورفی با شرط $\frac{\partial \emptyset}{\partial \bar{z}} = 0$ است.

برهان. مشابه لم (۱) اثبات می‌شود.

حال به بررسی منحصربه‌فرد بودن جواب معادله (۱) با تکیه بر قضیه نقطه ثابت باناخ می‌پردازیم.

قضیهٔ ۲. این مفروضات را برای معادلهٔ (۱) در نظر بگیرید:

۱. D ناحیه کراندار متعلق به C_α^1 و $0 < \alpha \leq 1$ است.

۲. تابع $F\left(z, \bar{z}, w, p, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)$ در D پیوسته است.

۳. $w, p \in C_\alpha(\overline{D})$ وجود دارند به‌گونه‌ای‌که $F\left(z, \bar{z}, w, p, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) \in C_\alpha(\overline{D})$.

۴. تابع $F\left(z, \bar{z}, w, p, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)$ در شرط لیپ شیتس بدین‌صورت صدق می‌کند:

$$\left\| F\left(z, \bar{z}, w, p, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) - F\left(z, \bar{z}, \widetilde{w}, \widetilde{p}, \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right) \right\|_{\alpha,D} \leq l \|(w,p) - (\widetilde{w}, \widetilde{p})\|_{\alpha,D}.$$

آن‌گاه معادلهٔ (۱) در فضای توابع پیوسته هلدر دارای جواب منحصر به‌فرد است.

برهان. بنا به لم ۱، هرگاه $w = w(z)$ جوابی از معادلهٔ (۱) باشد، آن‌گاه (w,p) جوابی از دستگاه (۱۱) است و برعکس قرار می‌دهیم:

$$\Gamma_\alpha(\overline{D}) = \{(w,p) |\, w, p \in C_\alpha(\overline{D}), \qquad 0 < \alpha \leq 1\}.$$

در مجموعه $\Gamma_\alpha(\overline{D})$ نرم (w,p) با این ضابطه تعریف می‌شود:

$$\forall (w,p) \in \Gamma_\alpha(\overline{D}) \quad \|(w,p)\|_{\alpha,D} = max(\|w\|_{\alpha,D}, \|p\|_{\alpha,D}).$$

با این نرم $\Gamma_\alpha(\overline{D})$ به فضای باناخ تبدیل می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]

[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]

هم‌چنین عملگر L را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$L: \Gamma_\alpha(\overline{D}) \to \Gamma_\alpha(\overline{D}),$$
$$\forall (w,p) \in \Gamma_\alpha(\overline{D}) \quad L(w,p) = (W,P),$$

که در آن

$$\begin{cases} W(z) = \emptyset(z) + T_D F\left(z,\bar{z},w,p,\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \\ P(z) = \emptyset'(z) + \Pi_D F\left(z,\bar{z},w,p,\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right). \end{cases}$$

اکنون نشان می‌دهیم که L یک تابع انقباض است. فرض کنیم $(\widetilde{w},\widetilde{p})$ یک عضو دلخواه دیگری در $\Gamma_\alpha(\overline{D})$ باشد، به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \widetilde{W}(z) = \emptyset(z) + T_D F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\widetilde{p},\dfrac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right), \\ \widetilde{P}(z) = \emptyset'(z) + \Pi_D F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\widetilde{p},\dfrac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right). \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\left\|W - \widetilde{W}\right\|_{\alpha,D} = \left\|T_D F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) - T_D F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\widetilde{p},\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right)\right\|_{\alpha,D}.$$

با توجه به کرانداری $T_D(F)$،

$$\|T_D(F)\|_{\alpha,D} \le k_1(\alpha,D)\|F\|_{\alpha,D},$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \left\|W - \widetilde{W}\right\|_{\alpha,D} &\le k_1(\alpha,D)\left\|F\left(z,\bar{z},w,p,\tfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) - F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\widetilde{p},\tfrac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right)\right\|_{\alpha,D} \\ &\le k_1(\alpha,D) l \|(w,p) - (\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{\alpha,D}. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

به طریق مشابه داریم

$$\left\|P - \widetilde{P}\right\|_{\alpha,D} \le k_2(\alpha,D) l \|(w,p),(\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{\alpha,D}. \tag{۱۵}$$

بنابر روابط (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \left\|(W,P) - (\widetilde{W},\widetilde{P})\right\|_{\alpha,D} &= max\left\|(W - \widetilde{W}),(P - \widetilde{P})\right\|_{\alpha,D} \\ &\le max\left(k_1(\alpha,D) l \|(w,p) - (\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{\alpha,D}, k_2(\alpha,D) l \|(w,p) - (\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{\alpha,D}\right) \\ &= l\, max\left(k_1(\alpha,D), k_2(\alpha,D)\right) \|(w,p) - (\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{\alpha,D}. \end{aligned}$$

با فرض این‌که

$$0 < l \max\left(k_1(\alpha,D), k_2(\alpha,D)\right) < 1,$$

تابع L یک تابع انقباض است. از این‌رو، طبق قضیهٔ نقطه ثابت باناخ داریم:

$$\exists (w,p) \in \Gamma_\alpha(\overline{D}); \;\; L(w,p) = (w,p).$$

بنابراین $w = w(z)$ جواب معادلهٔ (۱) است.

قضیهٔ ۳. این مفروضات را برای معادلهٔ (۱) در نظر بگیرید:

۱. D یک ناحیه با مساحت متناهی در $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$ است.

۲. تابع $F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)$ در D پیوسته است.

۳. $w,p \in L_p(D)$ و $1 < p < \infty$ وجود دارند به‌گونه‌ای‌که $F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) \in L_p(D)$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]

۴. تابع $F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)$ در شرط لیپ شیتس بدین‌صورت صدق می‌کند:

$$\left\|F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)-F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\tilde{p},\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right)\right\|_{p,D} \le l_1\|w-\widetilde{w}\|_{p,D}+l_2\|p-\tilde{p}\|_{p,D},$$

که در آن $L_1 > 0$ و $0 < L_2 < 1$.

آن‌گاه معادلهٔ (۱) در فضای سوبولف دارای جواب منحصر به‌فرد است.

برهان. بنا به لم ۲، هرگاه $w = w(z)$ جوابی از معادلهٔ (۱) باشد، آن‌گاه (w,p) جوابی از دستگاه (۱۱) است و برعکس. قرار می‌دهیم:

$$P_D = \{(w,p)|\ w,p \in L_p(D),\ 1<p<\infty\}.$$

در مجموعه P_D نرم (w,p) با ضابطهٔ (۱۶) تعریف می‌شود

$$\forall (w,p)\in P_D\ \ \|(w,p)\|_{p,D} = max\ \left(\lambda\|w\|_{p,D},\|p\|_{p,D}\right),\ \lambda>0, \tag{۱۶}$$

با این نرم P_D به فضای باناخ تبدیل می‌شود. با تعریف

$$M: P_D \to P_D,$$
$$\forall (w,p)\in P_D \quad M(w,p) = (W,P),$$

که در آن

$$\begin{cases} W(z) = \emptyset(z) + T_D F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right), \\ P(z) = \emptyset'(z) + \Pi_D F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right). \end{cases}$$

اکنون نشان می‌دهیم که M یک تابع انقباض است. فرض کنیم $(\widetilde{w},\tilde{p})$ یک عضو دلخواه دیگری در P_D باشد، به طوری‌که داشته باشیم

$$\begin{cases} \widetilde{W}(z) = \emptyset(z) + T_D F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\tilde{p},\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right), \\ \tilde{P}(z) = \emptyset'(z) + \Pi_D F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\tilde{p},\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right). \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\lambda\left\|W-\widetilde{W}\right\|_{p,D} = \boldsymbol{\lambda}\left\|T_D F\left(z,\bar{z},w,p,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) - T_D F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\tilde{p},\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right)\right\|_{p,D}.$$

با توجه به کرانداری $T_D(F)$،

$$\|T_D(F)\|_{p,D} \le A(D)\|F\|_{p,D},$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \lambda\left\|W-\widetilde{W}\right\|_{p,D} &\le \lambda A(D)\left\|F\left(z,\bar{z},w,p,\tfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)-F\left(z,\bar{z},\widetilde{w},\tilde{p},\tfrac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{z}}\right)\right\|_{p,D} \\ &\le \lambda A(D)\left(l_1\|w-\widetilde{w}\|_{p,D}+l_{2\|p-\tilde{p}\|_{p,D}}\right) \\ &\le A(D)(l_1+\lambda l_2)\|(w,p)-(\widetilde{w},\tilde{p})\|_{p,D}. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

برای اثبات این مطلب، توجه می‌کنیم که با استفاده از (۱۶) داریم:

$$\|(w,p)-(\widetilde{w},\tilde{p})\|_{p,D} = \|(w-\widetilde{w}),(p-\tilde{p})\|_{p,D} = max\ (\lambda\|w-\widetilde{w}\|_{p,D},\|p-\tilde{p}\|_{p,D}).$$

بنابراین اگر فرض کنیم $\lambda\|w-\widetilde{w}\|_{p,D} \ge \|p-\tilde{p}\|_{p,D}$، آن‌گاه

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]

$$\begin{aligned}\lambda\left\|W-\widetilde{W}\right\|_{p,D} &\le \lambda A(D)\big(l_1\|w-\widetilde{w}\|_{p,D}+l_2\|p-\widetilde{p}\|_{p,D}\big)\\ &\le \lambda A(D)\big(l_1\|w-\widetilde{w}\|_{p,D}+\lambda l_2\|w-\widetilde{w}\|_{p,D}\big)\\ &= \lambda A(D)(l_1+\lambda l_2)\|w-\widetilde{w}\|\\ &= A(D)(l_1+\lambda l_2)\|(w,p)-(\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{p,D}.\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $\|p-\widetilde{p}\|_{p,D} \le \lambda\|w-\widetilde{w}\|_{p,D}$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}\lambda\left\|W-\widetilde{W}\right\|_{p,D} &\le \lambda A(D)\big(l_1\|w-\widetilde{w}\|_{p,D}+l_2\|p-\widetilde{p}\|_{p,D}\big)\\ &\le \lambda A(D)\big(l_1\|p-\widetilde{p}\|_{p,D}+\lambda l_2\|p-\widetilde{p}\|_{p,D}\big)\\ &= \lambda A(D)(l_1+\lambda l_2)\|p-\widetilde{p}\|\\ &= A(D)(l_1+\lambda l_2)\|(w,p)-(\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{p,D}.\end{aligned}$$

به طریق مشابه داریم:

$$\left\|P-\widetilde{P}\right\|_{p,D} \le B(D)\left(\frac{1}{\lambda}l_1+l_2\right)\|(w,p)-(\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{p,D}. \qquad (۱۸)$$

بنابر روابط (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\left\|(W,P)-\big(\widetilde{W},\widetilde{P}\big)\right\|_{p,D} \le max\left(A(D),\frac{1}{\lambda}B(D)\right)(l_1+\lambda l_2)\|(w,p)-(\widetilde{w},\widetilde{p})\|_{p,D}.$$

با فرض این‌که

$$0 < max\left(A(D),\frac{1}{\lambda}B(D)\right)(l_1+\lambda l_2) < 1,$$

تابع M یک تابع انقباض است. از این‌رو، طبق قضیهٔ نقطه ثابت باناخ داریم

$$\exists (w,p)\in P_D;\ \ M(w,p)=(w,p).$$

بنابراین $w=w(z)$ جواب معادلهٔ (۱) است.

منابع

1. Mshimba A. S. A., Tutschke W., "Functional analytic methods in complex analysis and application to partial differential equations", ICTP, Trieste, Italy (1988).
2. Vekua I. N., "Generalized analytic functions", 2nd ed, Nauka, Moscow, (in Rus-sian) (1988).
3. Mamourian A., Esrafilian E., Taghizadeh N., "On the existence of general solution of first order elliptic systems by fixed-point theorem", Nonlinear Analysis theory and Application, 30 (1) (1997) 5351-5356.
4. Taghizadeh N., Akbari M., "The existence and uniqueness of the solution of nonlinear partial differential equations by fixed-point theorem in the Sobolev space", Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), 43 (1) (2010) 137-144.
5. Taghizadeh N., Akbari M., "On the solution of Vekua equation with the boundary value condition in the Sobolev space", JP Journal of fixed point theory and applycations, 4 (2) (2009) 137-145.
6. Taghizadeh N., Norozpour S., "The existence of general solution of nonlinear partial differential equation in general case in complex space", Res. J. Recent Sci., 3 (5) (2014) 83-85.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.8.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.183]