یک روش نقطه درونی نشدنی با گام کامل نیوتن اصلاح شده برای مسالۀ مکملی خطی یکنوا

بهروز خیرفام[1]، نظام الدین مهدوی امیری[2*]
۱- دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، گروه ریاضی کاربردی
۲- دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدۀ علوم ریاضی

چکیده

با استفاده از یک جهت جستجوی جدید، یک روش نقطه درونی نشدنی را برای مساله مکملی خطی یکنوا ارائه می‌دهیم . در این الگوریتم، تنها از یک گام شدنی استفاده می‌شود و نشان می‌دهیم که این ویژگی برای به دست آوردن یک روش با زمان چند جمله‌ای کافی است. کران تکرار الگوریتم با بهترین کران تکرار شناخته شده برای مسایل مکملی خطی تطابق دارد. به‌علاوه، نتایج عددی نشان می‌دهند که الگوریتم جدید عملکرد مطلوبی دارد.

واژه‌های کلیدی: مساله مکملی خطی، روش نقطه درونی نشدنی، پیچیدگی چندجمله‌ای

۱- مقدمه

بسیاری از مسایل مهم در اقتصاد، نظریه بازی و کنترل را می‌توان به صورت یک مساله مکملی خطی (LCP)[1] فرمول بندی کرد [۱]. در سال‌های اخیر، تحولات چشم‌گیری در الگوریتم‌های ارایه شده برای حل مسایل بهینه‌سازی رخ داده‌اند که منجر به حل سریع این مسایل شده‌اند و در نتیجه حل مسایلی که پیش‌تر به سال‌ها زمان نیاز داشتند امروزه در مدت زمانی کوتاه ممکن شده است. یکی از عوامل ایجاد این تحول به کار بردن روش‌های نقطه درونی است. دانتزیک[2] در سال ۱۹۴۷ [۲] روش سادک را برای حل مسایل بهینه‌سازی خطی[3] (LO) ارائه داد که با استفاده از آن، فرمول‌بندی مسایل بزرگ و تجزیه و تحلیل آن‌ها امکان پذیر و کارآمد شد. در سال ۱۹۷۲، کلی[4] و منتی[5] با [۱۳] ارائه یک مثال نشان دادند که روش سادک در بدترین حالت پیچیدگی نمایی دارد. از این‌رو، جستجو برای یافتن الگوریتم‌هایی با خواص نظری بهتر آغاز شد. در سال

*نویسندۀ مسئول: nezamm@sharif.edu

[1] Linear complementarity problem
[2] Dantzig
[3] Linear Optimization
[4] Keely
[5] Minty

۱۹۷۹، خاچیان[6] [۴] یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای را برای حل LO ارایه کرد. اگرچه الگوریتم خاچیان به دلیل زمان چندجمله‌ای‌اش از اهمیت خاصی برخوردار بود، ولی در عمل کندتر از روش سادک عمل می‌کرد. در سال ۱۹۸۴، کارمارکار[7] [۳] یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای و کران پیچیدگی بهتر از الگوریتم خاچیان ارایه داد که در عمل هم نسبت به الگوریتم خاچیان کاراتر بود. این روش‌ها اکنون به روش‌های نقطه درونی[8] ($IPMs$) مشهور هستند. برخی از روش هایی IPM برای LO با موفقیت به LCP تعمیم داده شدند [۱۱]. روش‌های نقطه درونی را می‌توان به روش‌های شدنی و نشدنی[9] ($IIPMs$) تقسیم‌بندی کرد. در IPMهای شدنی، الگوریتم با یک نقطه درونی شدنی اکید شروع و شدنی بودن در خلال حل مساله حفظ می‌شود. در IPMهای نشدنی، الگوریتم با یک نقطه مثبت دلخواه شروع و شدنی بودن در حین نزدیک شدن به جواب بهینه ایجاد می‌شود. اولین نتیجه نظری برای $IIPM$ها توسط کوجیما[10] و همکاران [۱۲] که همگرایی سراسری روش اولیه-دوگان را ثابت کردند، به دست آمد. سپس، میزونو[11] [۱۴] نشان داد که الگوریتم کوجیما و همکاران پیچیدگی محاسباتی $O(n^2L)$ را داراست. روس[12] [۱۶] اولین الگوریتم نشدنی با گام کامل نیوتن را برای LO ارائه داد و نشان داد که در صورت وجود یک جواب بهینه، کران پیچیدگی الگوریتم با بهترین کران برای $IIPM$ها تطابق دارد. هر تکرار اصلی در الگوریتم شامل یک گام شدنی و تعدادی گام‌های مرکزی است. از گام شدنی برای به دست آوردن یک نقطه که برای مدل پریشیده‌ای از مسالهٔ داده شده، شدنی اکید است، استفاده می‌شود و گام مرکزی برای برگرداندن نقطه به داخل یک همسایگی کوچک از مسیر مرکزی مساله پریشیده‌ی جدید به کار می‌رود. خیرفام[13] و مهدوی امیری[14] [۶] الگوریتم روس برای LO را به LCP روی مخروط‌های متقارن تعمیم دادند. سپس، گونه‌هایی از الگوریتم روس بر روی مسائل [۵] LCP افقی [۷] و بهینه‌سازی متقارن (SCO) [۸] توسط خیرفام ارائه شدند. ژانگ[15] و همکاران [۱۹] یک $IIPM$ با گام کامل نیوتن را برای LCP بر اساس یک تابع هسته پیشنهاد دادند و ثابت کردند که الگوریتم بهترین پیچیدگی شناخته شده برای $IIPM$ها را داراست. اخیراً روس [۱۸] یک $IIPM$ جدید با گام کامل نیوتن را برای LO ارائه داد که در آن نیازی به گام‌های مرکزی نیست، در حالی که در روش‌هایی که پیش‌تر یاد کردیم، لازم است که در هر تکرار از تعدادی گام مرکزی استفاده کنند. خیرفام [۹،۱۰] الگوریتم اخیر روس را به مسائل $P_*(\kappa)-LCP$ روی حاصل‌ضرب دکارتی مخروط‌های متقارن و LCP افقی $(HLCP)$ تعمیم داد. این‌جا، ما با الهام از پیشرفت‌های اخیر در $IIPM$ها [۹،۱۰،۱۸]

[6] Khachiyan
[7] Karmarkar
[8] Interior point methods
[9] Infeasible interior point methods
[10] Kojima
[11] Mizuno
[12] Roos
[13] Kheirfam
[14] Mahdavi-Amiri
[15] Zhang

یک $IIPM$ با گام کامل نیوتن را برای LCP یکنوا بر اساس یک جهت جستجوی جدید ارائه می‌دهیم که در آن تنها از یک گام شدنی در هر تکرار استفاده می‌شود. در این الگوریتم، برای به دست آوردن یک نقطهٔ جدید هیچ نیازی به گام مرکزی نیست و این مزیت الگوریتم ما نسبت به روش‌های موجود (برای مثال، روش‌های آمده در [۵،۱۹]) است. بقیه مطالب ارائه شده به شرح زیر تنظیم شده است. در بخش ۲، ابتدا مسأله پریشیده و جهت‌های جستجو را شرح می‌دهیم. سپس، الگوریتم نقطه درونی نشدنی جدید با گام کامل نیوتن را برای LCP ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، به تجزیه و تحلیل الگوریتم می‌پردازیم و کران تکرار را برای الگوریتم به دست می‌آوریم. نتایج عددی را در بخش ۴ ارائه می‌دهیم. در نهایت، در بخش ۵ نتیجه‌گیری می‌کنیم.

۲- IPM نشدنی با گام کامل نیوتن اصلاح شده

در مساله مکملی خطی یکنوا (LCP)، تعیین یک جفت بردار مانند $(x,s)\in R^{2n}$ مد نظر است به طوری که

$$s = Mx + q,\ \ x, s \geq 0,\ xs = 0, \qquad (P)$$

که در آن، $q \in R^n$ ، $M \in R^{n\times n}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت و xs حاصل‌ضرب هادامارد بردارهای x و s است، یعنی، $xs = (x_1s_1, \dots, x_ns_n)^T$.

بدون کاستن از کلیت، فرض می‌شود که LCP در شرط نقطه درونی (IPC) صدق می‌کند، یعنی یک جفت بردار مانند $(x^0, s^0)\in R^{2n}$ وجود دارد به طوری که

$$s^0 = Mx^0 + q,\ \ x^0, s^0 > 0\,.$$

با توجه به نتایج موجود برای $IIPM$ها، فرض می‌کنیم یک جواب شدنی وجود دارد. هم‌چنین، فرض می‌کنیم که الگوریتم با نقطه‌ای مانند

$$x^0 = \rho_p e,\ s^0 = \rho_d e,\ \mu^0 = \rho_p\rho_d \qquad (۱)$$

شروع می‌شود که در آن، ρ_p و ρ_d چنان هستند که به ازای جواب بهینه‌ای مانند (x^*, s^*) برای (P)، داریم:

$$.\|x^*\|_\infty \leq \rho_p, \{\|s^*\|_\infty, \rho_p\|Me\|_\infty, \|q\|_\infty\} \leq \rho_d. \qquad (۲)$$

بردار باقی‌مانده آغازین را با r^0 نشان می دهیم و به صورت

$$r^0 := s^0 - Mx^0 - q \qquad (۳)$$

تعریف می‌کنیم.

۱.۲- مسالهٔ پریشیده

فرض کنید که الگوریتم با (x^0,s^0) شروع شود. به ازای هر ν، $0<\nu\le 1$، مسأله پریشیدهٔ

$$s-Mx-q=\nu r^0,\ (x,s)\ge 0 \qquad (P_\nu)$$

را در نظر بگیرید که در آن، r^0 با (۳) تعریف شده است. به وضوح، به ازای $\nu=1$، (x^0,s^0) یک جواب شدنی اکید برای مساله (P_ν) است. بنابراین، اگر $\nu=1$، آن‌گاه (P_ν) در شرط IPC صدق می‌کند. در حالت کلی، لم زیر را داریم که اثبات آن مشابه با اثبات لم ۱.۳ در [۱۶] است.

لم ۱.۲ اگر مسأله اصلی (P) شدنی باشد، آن‌گاه به ازای هر $0<\nu\le 1$، مسأله پریشیدهٔ (P_ν) در شرط IPC صدق می‌کند.

فرض کنید که (x,s) یک جواب شدنی برای مسأله پریشیدهٔ (P_ν) است. بر طبق لم ۱.۲، به ازای $0<\nu\le 1$، (P_ν) در شرط IPC صدق می‌کند. این بدان معنی است که دستگاه

$$\begin{aligned} s-Mx-q=\nu r^0,\ x,s\ge 0,\\ xs=\mu e \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن، e بردار با درایه‌ها برابر با یک است، به ازای هر $\mu>0$، دارای جواب یکتاست که آن را μ- مرکز مساله (P_ν) می‌نامیم. مجموعه μ- مرکزها مسیر مرکزی نامیده می‌شود. فرض کنید v به صورت

$$v=\sqrt{\frac{xs}{\mu}}$$

تعریف می‌شود. ژانگ و همکاران [۲۰] با استفاده از جای‌گزینی معادله غیرخطی $xs=\mu e$ با $xs=\mu v$، یک IPM شدنی جدید برای LO ارائه دادند. با الهام از کار ژانگ و همکاران [۲۰]، دستگاه (۴) را به صورت

$$s-Mx-q=\nu r^0,\ x,s\ge 0, \qquad (۵)$$

$$xs=\mu v \qquad (۶)$$

می‌نویسیم. با توجه به این که دستگاه‌های (۴) و (۵)-(۶) معادلند و به ازای هر $\mu>0$، دستگاه (۴) جواب یکتا دارد، می‌توان نتیجه گرفت که به ازای $\mu>0$، دستگاه (۵)-(۶) نیز دارای جواب یکتایی مانند $(x(\mu,\nu),s(\mu,\nu))$ است. چون $x^0s^0=\mu^0e$، $\mu^0=\rho_p\rho_d$، پس (x^0,s^0)، μ^0- مرکز مسألهٔ پریشیدهٔ (P_1) است. به عبارت دیگر،

$$(x(\mu^0,1),s(\mu^0,1))=(x^0,s^0).$$

از این پس، فرض می‌کنیم که پارامترهای μ و ν همواره در رابطه $\mu=\nu\mu^0$ صدق می‌کنند.

فرض کنید که (x,s) یک جفت شدنی اکید برای (P_ν) است. با جای‌گذاری $\nu^+=(1-\theta)\nu$، $\theta\in(0,1)$ به جای ν، برای به دست آوردن نقطه شدنی برای (P_{ν^+})، لازم است که جهت‌های جستجوی Δx و Δs به گونه‌ای تعیین شوند که

$$.(s+\Delta s)-M(x+\Delta x)=\upsilon^{+}r^{0},(s+\Delta s,x+\Delta x)>0 .$$

چون (x,s) برای مسأله (p_v) شدنی است، پس Δx و Δs در

$$M\,\Delta x-\Delta s=\theta v r^{0}$$

صدق می‌کنند. بنابراین، Δx و Δs از حل دستگاه

$$\begin{aligned} M\,\Delta x-\Delta s&=\theta v r^{0},\\ s\,\Delta x+x\,\Delta s&=(1-\theta)\mu v-xs \end{aligned} \tag{۷}$$

به دست می‌آید. سپس، نقطه جدید را به صورت

$$x^{+}=x+\Delta x,\quad s^{+}=s+\Delta s \tag{۸}$$

در نظر بگیرید. با استفاده از نمادهای

$$d_x:=\frac{v\,\Delta x}{x},\quad d_s:=\frac{v\,\Delta s}{s} \tag{۹}$$

دستگاه (۷) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} &MS^{-1}Xdx-ds=\theta\upsilon v s^{-1}r^{0},\\ &dx+ds=(1-\theta)e-v. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

نوشت که در آن، $X=diag(x)$ و $S=diag(s)$. به علاوه، از اندازهٔ نزدیکی

$$\delta(v):=\delta(x,s,\mu)=\|e-v\| \tag{۱۱}$$

برای نشان دادن نزدیکی نقاط به مسیر مرکزی استفاده می‌کنیم. اکنون، لم زیر را داریم.

لم ۲.۲ (لم ۴.۲ در [۲۰]). داریم:

$$1-\delta(v)\le v_i\le 1+\delta(v),\quad i=1,\dots,n .$$

۲.۲- یک تکرار از الگوریتم

اندازهٔ نزدیکی به μ- مرکز مسأله پریشیدهٔ (P_v) را با $\delta(v)$ که در (۱۱) تعریف شده است، می‌سنجیم. فرض کنید که به ازای $\mu\in(0,\mu^{0}]$، نقاط x و s را داریم که به ازای $v=\frac{\mu}{\mu^{0}}$ در شرایط شدنی بودن (۵) صدق می‌کنند و رابطهٔ $\delta(x,s;\mu)\le\tau$، $\tau\le 1$، برقرار است. μ را به $\mu^{+}=(1-\theta)\mu$ کاهش می‌دهیم که $\theta\in(0,1)$، و نقاط جدید x^{+} و s^{+} را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که با μ^{+} جای‌گذاری شده به جای μ و $v^{+}=\frac{\mu^{+}}{\mu}$ جای‌گذاری شده به جای v در (۵)

صدق کنند و نیز داشته باشیم $\delta(x^+, s^+; \mu^+) \le \tau$. این روند تا یافتن یک ε-جواب بهینه برای مسالهٔ (P) ادامه می‌یابد.

همان طور که در بخش ۱.۲ گفتیم، نقاط جدید (x^+, s^+) به ازای $\nu = \nu^+$ در (۵) صدق می‌کنند. بخش اصلی تجزیه و تحلیل، تضمین $x^+ > 0$ و $s^+ > 0$ است و این که این نقاط در شرط $\delta(x^+, s^+; \mu^+) \le \tau$ صدق می‌کنند.

۳.۲- الگوریتم

اکنون، قدم های اساسی از الگوریتم را ارایه می دهیم.

الگوریتم $IIPM$ اصلاح شده

ورودی‌ها:

پارامتر دقت $\varepsilon > 0$،

پارامتر بهنگام‌سازی مانع $0 < \theta < 1$.

شروع

قرار ده $x := \rho_p e,\ s := \rho_d e,\ \mu = \rho_p \rho_d,\ \nu = 1$.

مادام که $\max\{x^T s, \|r^0\|\} > \varepsilon$ انجام ده:

قرار ده $(x,s) := (x,s) + (\Delta x, \Delta s)$.

به‌هنگام‌سازی μ **و** ν:

قرار ده $\mu := (1-\theta)\mu$ و $\nu := (1-\theta)\nu$.

پایانحلقه

پایان.

۳- تحلیل الگوریتم

فرض کنید که x و s نقاط در شروع یک تکرار باشند به طوری که در رابطه $\delta(x, s; \mu) \le \tau$ صدق می‌کنند.

۱.۳- کران بالا برای $\delta(\nu^+)$

همان طور که در بخش ۱.۲ بیان شد، گام کامل نیوتن تضمین می‌کند که نقطه جدید (x^+, s^+)، به جز احتمالا در شرط نامنفی بودن، در شرط شدنی بودن برای (P_{ν^+}) صدق می‌کند. بخش اصلی تحلیل، به تضمین برقراری رابطه $\delta(x^+, s^+; \mu^+) \le \tau$ پس از گام شدنی اختصاص می‌یابد.

با استفاده از (۸)، معادله دوم دستگاه (۷) و (۹)، داریم :

$$x^+ s^+ = xs + (s\Delta x + x\Delta s) + \Delta x \Delta s = (1-\theta)\mu\nu + \Delta x \Delta s = \mu((1-\theta)\nu + d_x d_s) \qquad (۱۲)$$

لم ۱.۳ اگر $(1-\theta)\nu + d_x d_s > 0$، آن‌گاه (x^+, s^+) شدنی اکید است.

اثبات: اثبات مشابه است با اثبات لم II.۴۸ در [۱۷].

نتیجهٔ ۲.۳ اگر $\|d_x d_s\|_\infty \le (1-\theta)(1-\delta(\nu))$، آن‌گاه (x^+, s^+) شدنی اکید است.

اثبات: با توجه به لم۱.۳، اگر نامساوی $(1-\theta)\nu + d_x d_s > 0$ برقرار باشد، آن‌گاه x^+ و s^+ شدنی اکید هستند. پس کافی‌ست داشته باشیم $(1-\theta)\nu_{\min} - \|d_x d_s\|_\infty > 0$. با استفاده از لم۲.۲، نامساوی اخیر برقرار است اگر

$$(1-\theta)(1-\delta(\nu)) - \|d_x d_s\|_\infty > 0,$$

که اثبات را کامل می‌کند.

در ادامه، از نماد $\omega(\nu) := \frac{1}{2}(\|d_x\|^2 + \|d_s\|^2)$ استفاده و فرض می‌کنیم که $\omega(\nu) < (1-\theta)(1-\delta(\nu))$. در این صورت، داریم:

$$\|d_x d_s\|_\infty \le \|d_x d_s\| \le \|d_x\|\|d_s\| \le \frac{1}{2}(\|d_x\|^2 + \|d_s\|^2) = \omega(\nu),$$

و این نتیجه می‌دهد $\|d_x d_s\|_\infty \le (1-\theta)(1-\delta(\nu))$.از این رو، با توجه به نتیجه۲.۳، نامساوی $\omega(\nu) < (1-\theta)(1-\delta(\nu))$ ایجاب می‌کند که جفت نقاط (x^+, s^+) شدنی اکید باشند. حال، می‌خواهیم یک کران بالا را برای $\delta(x^+, s^+; \mu^+)$ به دست آوریم. مشابه با (۱۱)، داریم:

$$.\delta(x^+, s^+; \mu^+) = \|e - \nu^+\|, \nu^+ = \sqrt{\frac{x^+ s^+}{\mu^+}}\ .$$

در ادامه، برای سادگی در نمادگذاری، $\delta(x^+, s^+; \mu^+)$ را با $\delta(\nu^+)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳.۳ فرض کنید $\omega(\nu) < (1-\theta)(1-\delta(\nu))$. در این صورت، داریم:

$$\delta(\nu^+) \le \frac{\delta(\nu) + \frac{\omega(\nu)}{1-\theta}}{1 + \sqrt{1 - \delta(\nu) - \frac{\omega(\nu)}{1-\theta}}}.$$

اثبات. با تقسیم کردن طرفین رابطهٔ (۱۲) بر μ^+، خواهیم داشت:

$$(\nu^+)^2 = \frac{\mu((1-\theta)\nu + d_x d_s)}{\mu^+} = \nu + \frac{d_x d_s}{1-\theta}.$$

بنابراین،

$$(\nu^+)^2{}_{\min} = \min(\nu + \frac{d_x d_s}{1-\theta}) \ge \nu_{\min} - \frac{1}{1-\theta}\|d_x d_s\|_\infty \ge 1 - \delta(\nu) - \frac{\omega(\nu)}{1-\theta}.$$

از این رو، داریم:

$$\begin{aligned}\delta(v^+) &= \left\|e-v^+\right\| \le (e+v^+)^{-1}\left\|e-(v^+)^2\right\| \\ &\le \frac{1}{1+(v^+)_{\min}}\left\|e-v-\frac{d_x d_s}{1-\theta}\right\| \le \frac{1}{1+(v^+)_{\min}}\left(\delta(v)+\frac{\omega(v)}{1-\theta}\right) \\ &\le \frac{\delta(v)+\frac{\omega(v)}{1-\theta}}{1+\sqrt{1-\delta(v)-\frac{\omega(v)}{1-\theta}}}\ ,\end{aligned}$$

و این اثبات لم را کامل می‌کند.

۲.۳- کران بالا برای $\omega(v)$

این بخش را با پیدا کردن یک کران برای جواب یکتای دستگاه خطی (۷) آغاز می‌کنیم.

لم ۴.۳ (نتیجه ۲.۳ در[۱۲]). فرض کنید x، s، a و b بردارهایی n بعدی هستند به طوری که $x>0$ و $s>0$. هم‌چنین، فرض کنید $M\in R^{n\times n}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است. در این صورت، جواب (u,v) برای دستگاه

$$\begin{aligned}Mu-v&=b,\\ Su+Xv&=a,\end{aligned} \tag{۱۳}$$

در نامساوی

$$\left\|Du\right\|^2+\left\|D^{-1}v\right\|^2 \le \left\|\tilde{a}\right\|^2+2\left\|\tilde{b}\right\|\left\|\tilde{c}\right\|$$

صدق می‌کند که در آن، $D=X^{-\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}$، $\tilde{a}=(XS)^{-\frac{1}{2}}a$، $\tilde{b}=D^{-1}b$ و $\tilde{c}=\tilde{a}+\tilde{b}$.
با مقایسه دستگاه‌های (۱۳) و (۷)، و با در نظر گرفتن $(u,v)=(\Delta x,\Delta s)$، $b=\theta v r^0$ و $a=(1-\theta)\mu v-xs$ در دستگاه (۱۳)، داریم:

$$\begin{aligned}\left\|D\Delta x\right\|^2+\left\|D^{-1}\Delta s\right\|^2 &\le \left\|(XS)^{-\frac{1}{2}}((1-\theta)\mu v-xs)\right\|^2 \\ &+2\left\|D^{-1}\theta v r^0\right\|\left\|(XS)^{-\frac{1}{2}}((1-\theta)\mu v-xs)+D^{-1}\theta v r^0\right\|.\end{aligned} \tag{۱۴}$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\begin{aligned}\left\|(XS)^{-\frac{1}{2}}((1-\theta)\mu v-xs)\right\| &= \left\|\frac{(1-\theta)\mu v-xs}{\sqrt{xs}}\right\| = \left\|\frac{(1-\theta)\mu v-\mu v^2}{v\sqrt{\mu}}\right\| \\ &= \sqrt{\mu}\left\|(1-\theta)e-v\right\| \le \sqrt{\mu}(\theta\sqrt{n}+\delta(v)).\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با استفاده از تعریف D، $\mu = \nu\mu^0$ و لم ۲.۲، داریم:

$$\left\|D^{-1}\theta\upsilon r^0\right\| = \theta\upsilon\left\|\sqrt{\frac{x}{s}}r^0\right\| = \theta\upsilon\left\|\frac{xr^0}{\sqrt{xs}}\right\| \le \frac{\theta\sqrt{\mu}}{\mu^0 v_{\min}}\left\|xr^0\right\|_1$$

$$\le \frac{\theta\sqrt{\mu}}{\mu^0 v_{\min}}\left\|(s^0)^{-1}r^0\right\|_\infty\left\|s^0\right\|_\infty\left\|x\right\|_1 \le \frac{3\theta\sqrt{\mu}}{\rho_p(1-\delta(v))}\left\|x\right\|_1, \qquad (۱۶)$$

که نامساوی آخر با استفاده از نامساوی

$$\left\|(s^0)^{-1}r^0\right\|_\infty \le 1+\frac{\rho_p}{\rho_d}\left\|Me\right\|_\infty + \frac{1}{\rho_d}\left\|q\right\|_\infty \le 3, \qquad (۱۷)$$

به‌ازای نقطه شروع $(x^0,s^0)=(\rho_p e,\rho_d e)$، بدست می‌آید. با استفاده از $D\Delta x = \sqrt{\mu}d_x$ و $D^{-1}\Delta s = \sqrt{\mu}d_s$ و هم‌چنین با جای‌گذاری کران‌های(۱۵) و (۱۶) در (۱۴) داریم:

$$\omega(v) \le \frac{1}{2}(\theta\sqrt{n}+\delta(v))^2 + \frac{3\theta}{\rho_p(1-\delta(v))}((\theta\sqrt{n}+\delta(v)) + \frac{3\theta}{\rho_p(1-\delta(v))}\left\|x\right\|_1)\left\|x\right\|_1. \qquad (۱۸)$$

فرض کنید که (x,s) یک جواب شدنی برای (P_ν) است و (x^0,s^0) مطابق با (۱) تعریف شده است. به ازای هر جواب بهینه (x^*,s^*) برای (P)، داریم:

$$\nu s^0 + (1-\nu)s^* - s = M\,(\nu x^0 + (1-\nu)x^* - x).$$

با توجه به این که M نیمه‌معین مثبت است، داریم:

$$\begin{aligned}0 &\le (\nu x^0 + (1-\nu)x^* - x)^T(\nu s^0 + (1-\nu)s^* - s)\\ &= \nu^2(x^0)^T s^0 + \nu(1-\nu)((x^0)^T s^* + (s^0)^T x^*)\\ &\quad -\nu(s^T x^0 + x^T s^0) + (1-\nu)^2(x^*)^T s^* - (1-\nu)(s^T x^* + x^T s^*) + x^T s. \qquad (۱۹)\end{aligned}$$

با توجه به $(x^*)^T s^* = 0$ و از این که x، s، x^*، s^* و $x^T s^* + s^T x^*$ نامنفی هستند، نامساوی (۱۹) ایجاب می‌کند:

$$x^T s^0 + s^T x^0 \le \nu(x^0)^T s^0 + \frac{x^T s}{\nu} + (1-\nu)((x^0)^T s^* + (s^0)^T x^*).$$

با استفاده از (۱) و (۲)، از نامساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$x^T s^0 + s^T x^0 \le 2n\rho_p\rho_d + \frac{x^T s}{\nu} - \nu n\rho_p\rho_d \le 2n\rho_p\rho_d + \frac{x^T s}{\nu}$$

$$= 2n\rho_p\rho_d + \frac{\mu e^T v^2}{v} \le n\rho_p\rho_d(2+(1+\delta(v))^2)$$

که نامساوی آخر با استفاده از $\mu = v\rho_p\rho_d$ و لم ۲.۲ به دست می‌آید. با توجه به $(x^0, s^0) = (\rho_p, \rho_d)$، داریم:

$$x^T s^0 + s^T x^0 = \rho_p \|x\|_1 + \rho_d \|s\|_1.$$

بنابراین،

$$\|x\|_1 \le n\rho_p(2+(1+\delta(v))^2). \qquad (۲۰)$$

با جای‌گذاری این کران در (۱۸)، نتیجه می‌گیریم:

$$\omega(v) \le \frac{(\theta\sqrt{n}+\delta(v))^2}{2} + \frac{3\theta n\left(\theta\sqrt{n}+\delta(v)+\frac{3\theta n(2+(1+\delta(v))^2)}{1-\delta(v)}\right)}{1-\delta(v)}(2+(1+\delta(v))^2) \qquad (۲۱)$$

۳.۳- مقدارها برای θ و τ

می‌خواهیم مقدار τ را به گونه‌ای تعیین کنیم که اگر نامساوی $\delta(v) \le \tau$ برقرار باشد، آن‌گاه داشته باشیم $\delta(v^+) \le \tau$ با استفاده از لم ۳.۳ ، اگر نامساوی‌های

$$\omega(v) < (1-\theta)(1-\delta(v)) \qquad (۲۲)$$

و

$$\frac{\delta(v)+\frac{\omega(v)}{1-\theta}}{1+\sqrt{1-\delta(v)-\frac{\omega(v)}{1-\theta}}} \le \tau \qquad (۲۳)$$

برقرار باشند، آن‌گاه داریم $\delta(v^+) \le \tau$. با استفاده از (۲۱)، نامساوی (۲۲) برقرار است اگر

$$\frac{(\theta\sqrt{n}+\delta(v))^2}{2} + \frac{3\theta n\left(\theta\sqrt{n}+\delta(v)+\frac{3\theta n(2+(1+\delta(v))^2)}{1-\delta(v)}\right)}{1-\delta(v)}(2+(1+\delta(v))^2) < (1-\theta)(1-\delta(v)). \qquad (۲۴)$$

بنابراین، با فرض $\delta(v) \le \tau$، لازم است τ را چنان بیابیم که به ازای θ به اندازهٔ کافی بزرگ، نامساوی (۲۴) برقرار باشد. چون سمت چپ و راست نامساوی (۲۴) نسبت به $\delta(v)$ به ترتیب به طور یکنوا افزایشی و به طور یکنوا کاهشی هستند، پس کافی‌ست داشته باشیم:

$$\frac{(\theta\sqrt{n}+\tau)^2}{2}+\frac{3\theta n(\theta\sqrt{n}+\tau+\frac{3\theta n(2+(1+\tau)^2)}{1-\tau})}{1-\tau}(2+(1+\tau)^2)<(1-\theta)(1-\tau). \qquad (۲۵)$$

فرض کنید:

$$\tau=\frac{1}{8},\quad \theta=\frac{1}{45n}. \qquad (۲۶)$$

یک کران بالا برای سمت چپ (۲۵)، 0.1094 است، در حالی که یک کران پایین برای سمت راست (۲۵)، 0.8556 است. این بدان معنی است که نامساوی (۱۹) برقرار است و در نتیجه (x^+,s^+) شدنی اکید است. با توجه به (۲۱)، تابع

$$h(n,\tau)=\frac{(\frac{1}{45\sqrt{n}}+\tau)^2}{2}+\frac{\frac{1}{45\sqrt{n}}+\tau+\frac{(2+(1+\tau)^2)}{15(1-\tau)}}{15(1-\tau)}(2+(1+\tau)^2), \qquad (۲۷)$$

یک کران بالا برای $\omega(v)$ به دست می‌دهد. به علاوه، داریم $h(n,\tau)\le h(1,\tau)=0.1094$. بنابراین، از لم ۳.۳ نتیجه می‌گیریم:

$$\delta(v^+)\le\frac{\delta(v)+\frac{\omega(v)}{1-\theta}}{1+\sqrt{1-\delta(v)-\frac{\omega(v)}{1-\theta}}}\le\frac{\tau+\frac{45nh(1,\tau)}{45n-1}}{1+\sqrt{1-\tau-\frac{45nh(1,\tau)}{45n-1}}} \qquad (۲۸)$$

$$\le\frac{\frac{1}{8}+\frac{45n(0.1094)}{45n-1}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{8}-\frac{45n(0.1094)}{45n-1}}}\le 0.1249\le\tau.$$

بدین ترتیب، خاصیت $\delta(x,s;\mu)\le\tau$ در همه تکرارها حفظ می‌شود و الگوریتم خوش تعریف است.

۴.۳- تحلیل پیچیدگی

چنان که در بخش‌های پیشین دیدیم، اگر در شروع یک تکرار، با τ و θ تعریف شده در (۲۶)، داشته باشیم $\delta(x,s;\mu)\le\tau$، پس از گام کامل نیوتن نقطه جدید شدنی اکید است و در رابطه $\delta(x^+,s^+;\mu^+)\le\tau$ صدق می‌کند. این بدان معنی است که الگوریتم خوش تعریف است. در هر تکرار، شکاف دوگانی x^Ts و نرم بردار باقی‌مانده با عامل $(1-\theta)$ کاهش می‌یابند. از این رو، تعداد کل تکرارهای اصلی از بالا به

$$\frac{1}{\theta}\log\frac{\max\{(x^0)^Ts^0,\|r^0\|\}}{\varepsilon}$$

کران دار است. حال، نتیجه اصلی را در قضیهٔ زیر بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۳ فرض کنید (P) شدنی است و اعداد مثبت ρ_p و ρ_d چنان هستند که به ازای یک جواب بهینه مانند (x^*, s^*) از (P) داریم $\|x^*\|_\infty \le \rho_p$ و $\|s^*\|_\infty \le \rho_d$. در این صورت، پس از حداکثر

$$45n \log \frac{\max\{(x^0)^T s^0, \|r^0\|\}}{\varepsilon}$$

تکرار، الگوریتم به یک ε-جواب بهینه برای (P) دست می‌یابد.

۴- نتایج عددی

این جا، پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم در [۱۹] را روی تعدادی از مسائل LCP اجرا می‌کنیم. ماتریس‌های M و بردارهای q به طور تصادفی با استفاده از تابع "*rand*" در MATLAB به صورت

$$A = rand(j, n), 1 \le j \le n, q = -rand(n,1), M = A^T A$$

انتخاب می‌شوند. الگوریتم‌ها در محیط نرم‌افزاری متلب نسخه (R2009a) پیاده‌سازی و برنامه‌های مربوط در کامپیوتر شخصی با $2\,GB\ \ RAM$ در ویندوز XP اجرا شده‌اند. در بررسی نتایج عددی به دست آمده، داده‌های اولیه را به صورت $\rho_p = 20$، $\rho_d = 15$ و $\varepsilon = 10^{-4}$ انتخاب کردیم. هم‌چنین، پارامترهای τ و θ را به صورت $\tau = 0.0005$ و $\theta = 0.5$ در نظر گرفتیم. در جدول ۱ تعداد تکرارها با $Iter$ و زمان CPU برای محاسبات (بر حسب ثانیه) با $time$ و در جدول ۲ تعداد تکرارهای حلقه بیرونی با $OutIter$ ومیانگین تعداد تکرارهای حلقه داخلی پس از ۱۰ بار اجرا برای هر یک از مسایل با $InnerIter$ مشخص شده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی عملکرد مطلوبی دارد.

جدول ۱: نتایج به دست آمده از اجرای برنامهٔ پیشنهادی.

مسأله نمونه	$\|x^*\|_\infty \le \rho_p$	$\|s^*\|_\infty \le \rho_d$	(j,n)	$Iter$	$time$
$M_{5\times5}$	15.0284	2.9775	(2, 5)	24	0.054910
$M_{7\times7}$	9.0738	1.5322	(5, 7)	25	0.015665
$M_{20\times20}$	18.6202	2.0073	(15, 20)	26	0.032187
$M_{20\times20}$	12.3732	1.6701	(20, 20)	26	0.020834
$M_{20\times20}$	17.5006	2.1747	(18, 20)	27	0.063047

جدول ۲: نتایج به دست آمده از اجرای برنامه در [19].

مسأله نمونه	$\|x^*\|_\infty \le \rho_p$	$\|s^*\|_\infty \le \rho_d$	(j,n)	$OutIter$	$InnerIter$	$time$
$M_{5\times5}$	13.7555	3.5921	(2, 5)	24	38.6	0.024452
$M_{7\times7}$	15.5318	1.8101	(5, 7)	25	46.2	0.031325
$M_{20\times20}$	17.4724	1.3543	(15, 20)	26	53.8	0.055060
$M_{20\times20}$	13.2220	1.4425	(20, 20)	26	47.0	0.048955
$M_{20\times20}$	15.6724	1.6716	(18, 20)	27	57.8	0.117488

۵- نتیجه‌گیری

یک الگوریتم نقطه درونی نشدنی با گام کامل نیوتن اصلاح شده و جهت جستجوی جدید را برای مسایل مکملی خطی یکنوا ارایه دادیم و نتایج پیچیدگی را به دست آوردیم. در این الگوریتم تنها از یک گام شدنی استفاده کردیم و نیازی به گام مرکزی نداشتیم. الگوریتم به ازای مقادیر انتخاب شده برای θ و τ خوش تعریف است، بدین معنی که خاصیت $\delta(x,s;\mu)\le\tau$ در همه تکرارها حفظ می‌شود. نتایج عددی به دست آمده موید عملکرد مطلوب الگوریتم پیشنهادی است.

References

1. Cottle, R. W., Pang, J. S. and Stone, R. E. *The Linear Complementarity problem*, Academic Press, San Diego, CA. 1992.

2. Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J. , 1963.

3. Karmarkar, N. New polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinattorica*, **4**, (1984) 373-395.

4. Khachiyan, L.G., A polynomial algorithm in linear programming, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **244**(5), (1979) 1093-1096.

5. Kheirfam, B. A full-Newton step infeasible interior-point algorithm for linear complementarity problems based on a kernel function, *Algorithmic Operations Research* , **7**, (2013) 103-110.

6. Kheirfam, B. and Mahdavi-Amiri, N. A full Nesterov-Todd step infeasible interior-point algorithm for symmetric cone linear complementarity problem, *Bulletin of Iranian Mathematical Society*, **40**(3), (2014) 541-564.

7. Kheirfam, B. A new complexity analysis for full-Newton step infeasible interior-point algorithm for $P_*(\kappa)$ -horizontal linear complementarity problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **161**(3), (2014) 853-869.

8. Kheirfam, B. A new infeasible interior-point method based on Darvay's technique for symmetric optimization, *Annals of Operations Research*, **211**(1), (2013) 209-224.

9. Kheirfam, B. A full step infeasible interior-point method for Cartesian $P_*(\kappa)-SCLCP$, *Optimization Letters*, **10**(3), (2016) 591-603.

10. Kheirfam, B. An improved full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point method for horizontal linear complementarity problem, *Numerical Algorithms*, **71**(3), (2016) 491-503.

11. Kojima, M., Megiddo, N. and Noma, T. *A Unified Approach To Interior Point Algorithms For Linear Complementarity Problems*, Lecture Notes in Computer and Science, Springer, 538, 1991.

12. Kojima, M., Megiddo, N. and Mizuno, S. A primal-dual infeasible-interiorpoint algorithm for linear programming, *Mathematical Programming*, **61**, (1993) 263-280.

13. Klee, V., Minty, J., *How good is the simplex algorithm? In Inequalities*, III (Proc. Third Sympos., Univ. California, Los Angeles, calif., 1969; dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin), pp. 159-175. Academic Press, New York, 1972.

14. Mizuno, S. Polynomiality of the Kojima-Megiddo-Mizuno infeasible interior point algorithm for linear programming, *Mathematical Programming*, **67**(1), (1994) 109-120.

15. Potra, F.A. An $O(nL)$ infeasible-interior-point algorithm for LCP with quadratic convergence, *Annals of Operations Research*, **62**, (1996) 81-102.

16. Roos, C. A full-Newton step $O(nL)$ infeasible interior-point algorithm for linear optimization,

SIAM Journal on Optimization, **16**(4), (2006) 1110-1136.

17. Roos, C., Terlaky, T. and Vial, J.-Ph. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior-Point Approach*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1997, 2nd Ed., Springer, 2006.

18. Roos, C. An improved and simplified full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point method for linear optimization, *SIAM Journal on Optimization*, **265**(1), (2015) 102-114.

19. Zhang, L., Bai, Y. and Xu, Y. A full-Newton step infeasible interior-point algorithm for monotone LCP based on a locally-kernel function, *Numerical Algorithms*, **61**(1), (2012) 57-81.

20. Zhang, L. and Xu, Y. A full-Newton step interior-point algorithm based on modified Newton direction, *Operations Research Letters*, **39**, (2011) 318-322.