تقابل توپولوژی با گراف در رنگ‌آمیزی

حمید عرفانیان اورعی‌دهرخی*، محمد ابری، بهزاد صالحیان متی‌کلایی
دانشگاه دامغان، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

دریافت ۹۶/۱۲/۰۵ پذیرش ۹۸/۰۷/۰۳

چکیده

در این پژوهش به تعریف رنگ‌آمیزی گراف‌ها و نگاشت‌های رنگی می‌پردازیم و با تشریح ارکان تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها به توضیح شرایط برقراری آنها برای استفاده در زمینهٔ رنگ‌آمیزی گراف‌ها می‌پردازیم و با بیان قضایا و لم‌های متعدد، نحوهٔ عملکرد آنها روی گراف‌ها را نشان می‌دهیم. هم‌چنین با بیان تعریف چند نوع گراف و عدد رنگی منسوب به آنها، عددرنگی مربوط به هر گراف به‌وسیلهٔ این نگاشت‌ها تبیین و اثبات می‌کنیم. در ادامه نشان می‌داهیم عدد رنگی $n+3$ برای نگاشت‌های رنگ‌پذیر انطباق زیادی با عددرنگی گراف‌ها دارد. هم‌چنین به این سوال پاسخ داده می‌شود، که آیا این نگاشت‌ها توانایی کافی برای رنگ آمیزی هر نوع گراف را دارند؟

واژه‌های کلیدی: نگاشت رنگ‌پذیر، پوشش نقطه ای، رنگ‌آمیزی گراف، عدد رنگی

مقدمه

هدف این پژوهش بررسی رنگ‌آمیزی یک گراف به‌وسیلهٔ نگاشت‌های رنگ‌پذیر و تبیین شرایط و نحوهٔ عملکرد این نگاشت‌ها روی گراف‌های شناخته شده است. در ابتدا با بیان تعریف رنگ‌پذیری گراف‌ها و نگاشت‌های رنگ‌پذیر به تحلیل ارکان آنها پرداخته می‌شود. در ادامه با به‌دست آوردن عدد رنگی گراف‌ها به‌وسیلهٔ این نگاشت‌ها نشان داده می‌شود که هر گراف به‌وسیلهٔ یکی از این نگاشت‌ها با عدد رنگی مشخص رنگ‌آمیزی می‌شود.

تعریف ۱. اگر گراف G یک گراف بی‌طوقه باشد، G را با k-رنگ، رنگ‌پذیر گویند در صورتی که بتوان هر یک از k-رنگ را به یکی از راس‌های آن تخصیص داد، به‌طوری‌که هیچ دو راس مجاور، هم رنگ نباشند.

تعریف ۲. فرض کنید $f : X \to X$ نگاشت بدون نقطه ثابت باشد. f را با k-رنگ، رنگ‌پذیر گویند اگر پوشش بسته $C = \{C_1، C_2 \ldots ، C_K\}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که C_iها شامل جفت $\{f(x)، x\}$ نباشند. یا به‌طور مشابه برای هر $i = 1،2، \ldots ،k$ رابطه $C_i \cap f(C_i) = \emptyset$ برقرار باشد.

با توجه به دو تعریف ۱ و ۲، در رنگ‌آمیزی به‌وسیلهٔ نگاشت‌ها نوع فضا و پوشش معرفی شده روی آنها اهمیت زیادی دارد. از آن‌جاکه در رنگ‌آمیزی گراف‌ها نوع فضایی که گراف روی آن تعریف می‌شود تغییری در روند رنگ‌آمیزی ایجاد نمی‌کند و چون در رنگ‌آمیزی راسی فضاهای هاسدورف کارایی بیش‌تری دارند، از این‌رو، از ابتدا همهٔ فضاها هاسدورف در نظر گرفته می‌شوند. اگر در قضیه‌ای نیاز به استفاده از نوع خاصی از فضای باشد در ابتدای قضیه به آن اشاره می‌شود.

نکته بسیار مهم برای به کار بردن تعریف ۲ در رنگ‌آمیزی یک گراف انتخاب نوع پوشش برای آن است. در توپولوژی پوشش برای سطوح به‌کار می‌رود، حال سوال این است، آیا می‌توان پوشش را برای نقاط هم معرفی کرد؟

تعریف ۳. خانواده $C = \{C_1، C_2 \ldots ، C_k\}$ از همسایگی‌های نقطه x را یک پوشش برای آن گویند هرگاه برای هر همسایگی از x مثل U رابطهٔ $U \subseteq \bigcup C_i$ برای هر $1 \le i \le k$ برقرار باشد.

*نویسنده مسئول hamiderfanian23@yahoo.com

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.2.8]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.133]

با استفاده از این تعریف مشکل پوشش برای یک نقطه حل می‌شود. برای تعداد نقطه بیش‌تر کافی است که برای هر نقطه همین پوشش را به‌دست آورد و اجتماع آنها را به‌عنوان پوشش همهٔ نقاط در نظر گرفت.

مسئلهٔ بعدی در استفاده از تعریف ۲ برای رنگ‌آمیزی یک گراف، اهمیت تفاوت رنگ‌ها در دو راس مجاور هم است. به‌منظور برطرف کردن این مشکل کافی است برای هر دو راسی که به‌هم متصل هستند نگاشت رنگ‌پذیری تعریف کرد که با دریافت نقطه ابتدایی، نقطه انتهایی را نتیجه دهد و با استناد به رابطهٔ $C_i \cap f(C_i)= \emptyset$ و بدون نقطه ثابت بودن این نگاشت‌ها در تعریف، می‌توان این مهم را به‌راحتی اثبات کرد.

عدد رنگی

نکته قابل توجه در رنگ‌آمیزی یک گراف عدد رنگی منسوب به آن است. با توجه به تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها هر C_i یک‌رنگ است و با توجه به نقطه ثابت بودن نگاشت‌های رنگ‌پذیر حتماً $f(C_i)$ هم‌رنگ است. از رابطهٔ $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ برای هر C_i می‌توان این نتیجه را گرفت که $f^{-1}(x)$ هم یک‌رنگ است، پس عدد رنگی ۳ برای هر نگاشت اثبات می‌شود. قضیهٔ ۴ منسوب به قضیهٔ عدد رنگی در نگاشت‌های رنگ‌پذیر است.

قضیهٔ ۴. فرض X فضای پارافشرده و $\dim X \leq n$ باشد. در نتیجه هر همسانریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش، با $n + 3$ رنگ، رنگ‌پذیر است.

عدد رنگی $n + 3$ همان تعبیر k را در تعریف ۱ برای گراف‌ها دارد. برای اثبات قضیهٔ ۴ نیاز به بیان چند تعریف است که در ابتدا به بیان آنها پرداخته می‌شود.

تعریف ۵. بزرگ‌ترین عنصر در خانواده $C(x)$ از همه فشرده‌سازی‌ها، از یک فضای تیخونوف مثل X را فشرده‌سازی استون- چخ[1] گویند و با βX نشان می‌دهند.

βX در اصل یک فضای هاسدورف فشرده همراه با یک نگاشت پیوسته از X است، با این شرط که هر نگاشت پیوسته مانند $f: X \to K$ زمانی‌که K یک فضای فشرده هاسدورف باشد، تنها به یک صورت منحصر به‌فرد قابل ارتقاء به نگاشت پیوسته $\beta f: \beta X \to K$ باشد. با توجه به تعریف بالا طرح اثبات قضیهٔ ۴ به این صورت می‌شود که فضای X به فضای استون_چخ βX گسترش می‌یابد. هم‌چنین به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که رابطهٔ $\dim X = \dim \beta X$ برقرار است. حال فرض شود $f: X \to X$ یک هم‌سان‌ریختی و X فشرده باشد و اثبات می‌شود این نگاشت با یک نگاشت بدون نقطه ثابت (حتی یک همسانریختی) روی یک فضای متریک فشرده که بعد آن نابیش‌تر از بعد X است، مزدوج است.

فضای Y باید دارای "نمایش والمن[2]" از یک خانواده از صفر-مجموعه‌های X که با دقت انتخاب شده‌اند، باشد. در واقع رنگ‌آمیزی $\{A_1، A_2، ... ، A_{n+3}\}$ از نگاشت ساخته شده روی Y رنگ‌آمیزی $\left\{\mathcal{G}^{-1}(A_1)، \mathcal{G}^{-1}(A_2) ... ، \mathcal{G}^{-1}(A_{n+3})\right\}$ را برای نگاشت f ایجاد می‌کند که این همان عدد $n + 3$ را برای عدد رنگی نگاشت اثبات می‌کند. برای رسیدن به این هدف، نوع فضا و بیان خواص مورد نیاز برای آن اهمیت زیادی دارد. لم ۶ این فضا و خواص مورد نیاز آن را ارائه می‌دهد.

لم ۶. فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده باشد، در این صورت این احکام برقرارند:

۱. $\dim X \leq n$.

۲. اگر پایه B از صفر-مجموعه‌ها وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر مجموعه متناهی $\hbar \subseteq B$ به شرط این‌که $\cap \hbar = \emptyset$ آن‌گاه مجموعه متناهی $C \subset B$ با خواص زیر موجود است:

1. Stone cech
2. Wallman extension

a) برای هر عنصر $G \in C$، وجود دارد $F \in \hbar$ به‌طوری‌که $F \in G$

b) $\cap C = \emptyset$.

c) هر زیرمجموعه از G با بیش‌تر از $n + 3$ عنصر، پوششی از X است.

اثبات: لازم به ذکر است که اثبات این قضیه در کتاب بعد و گسترش از آرتس و نیشورا[۱] بیان شده است [۲].

لم ۷. [۷]، برای مجموعه شمارای $S \subset Z(X)$، مجموعه شمارای $T \subset Z(X)$ وجود دارد، به‌طوری‌که رابطهٔ $S \subset Ʈ$ که دارای خواص ۶-۱ از لیست(❋) است، برقرار است.

لیست(❋):

۱. $\{\emptyset, X\}$.

۲. برای $S, T \in Ʈ$ داریم $\{S \cap T, S \cup T\} \subset Ʈ$.

۳. برای $T \in Ʈ$ رابطه $\{f^{-1}(x), f(x)\} \subset Ʈ$ برقرار است.

۴. شبکه منظم Ʈ نرمال است به‌طوری‌که برای هر S، $T \in T$ مجزا، وجود دارد H، G متعلق به Ʈ به طوری‌که

$$G \cap S = \emptyset = T \cap H = X.$$

۵. برای هر $T \in Ʈ$ رابطهٔ $T_n \in Ʈ$ به طوری‌که $\{X \setminus T\} = \cup \{ T_n : n \in N\}$ برقرار است.

۶. برای هر مجموعه متناهی $\hbar \subset T$ به شرط $\hbar = \emptyset$ مجموعه متناهی $C \subset T$ با خواص زیر وجود دارد:

a) $C = \emptyset$.

b) هر زیر مجموعه از C با بیش‌تر از $n + 1$ عنصر پوششی از X است.

c) برای هر عنصر $G \in C$ وجود دارد یک F در Ʈ به‌طوری‌که $F \subset \hbar$ برقرار باشد.

۷. زیر مجموعه متناهی $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ از Ʈ وجود دارد و برای هر $1 \le i \le k$ رابطهٔ $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ و $C_1, C_2, \dots, C_k = X$ برقرارخواهد شد. حال با استفاده از لم زیر مجموعه شمارش‌پذیر Ʈ با خواص بالا را می‌توان ایجاد کرد.

تعریف ۸. نگاشت $f^*: Y \to Y$ به‌طور ضعیف مزدوج گویند اگر نگاشت بدون نقطه ثابت (یا حتی یک هم‌سان‌ریختی) مثل $\varphi: X \to Y$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که:

$$o\varphi f = f^* o\varphi$$

حال کافی است یک مزدوج‌سازی بین $f : X \to X$ و $f^* : Y \to Y$ ساخته شود به‌طوری‌که خاصیت (۱) را فراهم آورد.

اثبات قضیهٔ ۴. نگاشت $\varphi: X \to Y$ با تعریف $\varphi(x) = \{s \in T: x \in S\}$ را در نظر گرفته، واضح است که $\varphi(x) \in Y$ به‌وسیلهٔ X فشرده شده است. هم‌چنین φ پوشا است، بنابراین روابط زیر به‌سادگی به‌دست می‌آیند:

$$\varphi^{-1}(S^*) = S \text{ و } \varphi(S) = S^*.$$

در نهایت تابع پیوسته زیر تعریف می‌شود:

$$f^*: Y \to Y$$
$$f^*(\hbar) = \{f(F) : F \in \hbar\}.$$

بر این اساس رابطهٔ $f^*(\hbar) \in Y$ واضح است. حال تساوی‌های زیر به‌راحتی قابل اثبات است:

$$f^*(S^*) = (f(S))^* \text{ و } (f^*)^{-1}(S^*) = (f^{-1}(S))^*.$$

به‌طور بدیهی f^* پیوسته است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که f^* یک هم‌سان‌ریختی بدون نقطه ثابت است. در حقیقت $Y = C_1^* \cup \dots \cup C_k^*$است و $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ نشان می‌دهد که این رابطه برقرار است:

1. Arts & Nishiura

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.2.8]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.133]

$$(f(C_i))^* \cap C_i^* = \emptyset \text{ و } f^*(C_i^*) \cap C_i^* = \emptyset.$$

در نهایت اگر برای نگاشت های تعریف شده φ و f^* در بالا نشان داده شود که:

$$o\varphi f = f^* o\varphi.$$

اثبات قضیه به پایان می‌رسد که این امر به سادگی انجام‌پذیر است.

سوالی که این‌جا به ذهن می‌رسد این است که آیا این قضیه می‌تواند عددهای رنگی مختلف مورد بحث در گراف‌ها را نتیجه بدهد؟

در پاسخ به این سوال باید چند مثال بیان کرد تا کارایی این قضیه در مورد گراف‌های مختلف درک شود.

تعریف ۹. گراف تهی گرافی است که با دارا بودن n راس هیچ یالی ندارد. عدد رنگی این گراف عدد ۱ است.

در مورد این گراف خاص که هیچ یالی ندارد نمی‌توان نگاشت رنگ‌پذیر تعریف کرد، چون از شرایط تعریف یک نگاشت رنگ‌پذیر، بدون نقطه ثابت بودن آنها است که با بدون یال بودن این گراف‌ها تناقض دارد. از این‌رو، این عدد رنگی توسط قضیه عدد رنگی به‌دست نمی‌آید.

مثال بعد عدد رنگی معروف ۳ برای گراف‌های مثلثی است. که با توجه به مطالب ابتدای بحث به‌راحتی می‌توان به آن رسید. به‌همین منظور لازم به‌ذکر است که قضیهٔ عدد رنگی، پایه اصلی نگاشت‌های رنگ‌پذیر است و انعطاف‌پذیری بسیار زیادی در تغییر نوع فضا و نوع نگاشت دارد. به‌عنوان مثال برای تحقق عدد رنگی ۳ همین قضیه بدین‌صورت تغییر ماهیت می‌دهد.

قضیهٔ ۱۰. [۲]، نگاشت بدون نقطه ثابت $\varphi : D \to D$ روی فضای توپولوژیک گسسته با ۳ رنگ، رنگ‌پذیر است.

یعنی تغییر در نوع توپولوژی هدف را میسر کرد.

تعریف ۱۱. به گرافی کامل گفته می‌شود که هر دو راس متمایز آن به‌وسیلهٔ یک یال به هم متصل باشد. عدد رنگی این نوع گراف‌ها ۲ است.

برای به‌دست آوردن این عدد رنگی به‌وسیلهٔ نگاشت‌های رنگ‌پذیر ابتدا باید نگاشتی معرفی کرد که در این نوع گراف‌ها کارایی داشته باشد. به‌نظر می‌رسد نگاشت متقابل قطری از کره n-بعدی S^nکه با α_n نمایش داده می‌شود، انتخاب مناسبی باشد. حال با استفاده از قضیهٔ ۱۲که منسوب به لیوسترنیک و اسچنیرل‌من[1] است، می‌توان برای این نوع گراف‌ها عدد رنگی متناسب را به‌دست آورد.

قضیهٔ ۱۲. [۲]، نگاشت متقابل قطری $\alpha : S^n \to S^n$ روی کره n -بعدی S^n نیاز به حداقل $n+2$ رنگ دارد.

تعریف ۱۳. گرافی را همبند گویند که نتوان آن را به‌صورت اجتماع دو گراف مجزا در نظر گرفت.

قضیهٔ ۱۴. [۷] (بروک ۱۹۹۴)، اگر G یک گراف ساده و همبند و غیرکامل باشد و اگر بزرگ‌ترین درجه راس‌های آن ρ (≤ 3) باشد، آن‌گاه G ،ρ -رنگ‌پذیر است.

رفع مشکل رنگ‌آمیزی گراف‌های که دارای چندین یال متصل به یک راس هستند در استفاده از نگاشت‌های رنگ‌پذیر به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۱۶ مرتفع می‌شود لازم به توضیح است که در استفاده از تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها محدودیتی برای اتصال چند x به یک $f(x)$ وجود ندارد.

برای این منظور ابتدا باید تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها به‌گونه‌ای تغییر یابد که متناسب با طرح مسئله باشد.

1 . Leustronick and Schnierelman

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.2.8]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.133]

تعریف ۱۵. فرض برای $j = 1,2 ,\ldots , l$ نگاشت‌های بدون نقطه ثابت $f_j : X \to X$ موجود باشند، آنها را با k رنگ، رنگ‌پذیر گویند، اگرپوشش بسته $C = \{c_1, c_2 , \ldots , c_k\}$ موجود و شرط $f_j(c_i) \cap c_i = \emptyset$ برای $i \le k$ و $j \le l$ برقرار باشد، آن‌گاه عناصر C را رنگ و خود آن را رنگ‌آمیزی برای $f_1, f_2 , \ldots , f_l$ گویند.

با توجه به تعریف ۱۵ قضیهٔ ۱۶ به بیان عدد رنگی این نوع نگاشت‌ها می‌پردازد.

قضیهٔ ۱۶. [۵] فرض کنید X یک فضای پارافشرده با $\dim X \le n$ باشد و $f_i : X \to X$ برای $1 \le i \le l$ هم‌سان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X باشد و فرض $g_j : X \to X$ برای $1 \le j \le k$ نگاشت بدون نقطه ثابت از X به روی خودش باشد، پس $\{f_1, f_2 , \ldots , f_l, g_1, g_2 , \ldots , g_k\}$ به‌وسیلهٔ $n + 2l + k + 1$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود.

عدد رنگی $n + 2l + k + 1$ در قضیهٔ ۱۶ همان عدد ρ در قضیهٔ ۱۴ است.

مثال‌های بالا نشان می‌دهد که نگاشت‌های رنگ‌پذیر توانایی کافی برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها دارند حتی در شرایطی بهتر از رنگ‌آمیزی گراف‌ها عمل کرده و برای تعداد راس‌های بالا جواب گویی بهتری دارند.

شناسایی خواص n

در نگاه اول به قضیهٔ عدد رنگی آن‌چه مورد توجه قرار می‌گیرد مشخصات n است. متناهی یا نامتناهی بودن n اهمیت زیادی دارد. قضیهٔ ۱۷ نشان می‌دهد که این عدد می‌تواند متناهی باشد اگر تغییراتی در نوع فضا و نگاشت اعمال شود.

اولین بار فان داون[۱] [۴] اثبات کرد اگر X فضای متناهی‌البعد و پارافشرده باشد، آن‌گاه هر نگاشت بدون نقطه ثابت بسته $f: X \to X$ که برای مقدار $n < \omega$ و هر $x \in X$ دارای خاصیت $|f^{-1}(x)| \le n$ باشد، به‌صورت متناهی رنگ‌پذیر است [۱].

قضیهٔ ۱۷ نشان می‌دهد که $n+3$ می‌تواند متناهی باشد.

قضیهٔ ۱۷. فرض کنید X متناهی البعد و پارافشرده باشد پس هر خودسان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش متناهیا رنگ‌پذیر است.

لم ۱۸ در اثبات این قضیه اهمیت زیادی دارد.

لم ۱۸. فرض کنید X فضای نرمال با $\dim X \le n$ باشد و $f : X \to X$ یک هم‌سان‌ریختی باشد. حال فرض $\hbar$ مجموعه‌ای مجزا از زیرمجموعه‌های بسته از X باشد به‌طوری‌که برای هر $F \in \hbar$ رابطهٔ $f(F) \cap F = \emptyset$ برقرار باشد. در نتیجه زیرمجموعه‌های بسته $A_1, A_2 , \ldots , A_{2n+3}$ از X وجود دارد به‌طوری‌که:

a). برای هر $i \le 2n + 3$ ، $f(A_i) \cap A_i = \emptyset$

b). $\cup\, \hbar \subseteq \cup_{i=1}^{2n+3} A_i$

اثبات قضیهٔ ۱۷: فرض $f: X \to X$ خودسانریختی بدون نقطه ثابت باشد. باید نشان داده شود که f با $(n + 1) * (2n + 3)$ رنگ، رنگ‌پذیراست، در حالی که $\dim X= n$ است. بنابراین f بدون نقطه ثابت و X پارافشرده و n-بعدی است. حال پوشش باز موضعاً متناهی $U = \{U_s\}_{s\in S}$ از X وجود دارد به‌طوری‌که رابطهٔ $ord\ (U) \le n$ برای آن برقرار باشد، علاوه بر این برای هر $s \in S$ رابطهٔ $f(U_s) \cap U_s = \emptyset$ نیز برقرار است، پوشش باز V از X وجود دارد به‌طوری‌که مبین اجتماع $n + 1$ خانواده از $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$ است و $V_i = \{V_{i,s}\}_{s\in S}$ها جفت به جفت مجزا هستند و برای $s \in S$ و $i \le n + 1$ رابطه $V_{i,s} \subseteq U_s$ برقرار است. قضیهٔ ۴.۲.۳ در پژوهشی که ون‌دان [۴] انجام داده تشریح شده است. فرض کنید $\hbar$ تحدید بسته از V باشد. با استفاده از قضیهٔ ۱۸.۵.۱ در پژوهش والمن [۶] می‌توان به سادگی

1. Van Douwen

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.2.8]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.133]

نشان داد که $\hbar$ اجتماع n+1 خانواده‌ای از $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$ و $V_i = \{F_{i,s}\}_{s\in S}$ است. به‌طوری‌که برای $s \in S$ و $i \leq n+1$ رابطهٔ $F_{i,s} \subseteq V_{i,s}$ برقرار است. در نتیجه برای هر $i \leq n+1$ ، $\hbar_i$هایی وجود دارند که مجزا هستند. بنابراین U موضعاً متناهی است. به‌راحتی می‌توان نشان داد برای هر $F \in \hbar$ رابطهٔ $f(F) \cap F = \emptyset$ برقرار است.
این نشان می‌دهد برای هر i، رابطهٔ $f \restriction \bigcup V_i$ به‌وسیلهٔ $2n+3$ رنگ، رنگ‌پذیر است و با استفاده از لم ۱۸ می‌توان نتیجه گرفت که f به‌وسیلهٔ $(n+1) * (2n+3)$ رنگ، رنگ‌پذیر است.

نتایج

این پژوهش نشان داد که اگرچه نگاشت‌های رنگ‌پذیر توانایی کافی برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها را دارند اما در مواردی خاص مثل گراف تهی چون قابل تعریف نیستند نمی‌توان از آنها استفاده کرد. با استفاده از نگاشت‌های رنگ‌پذیر که در ابتدای بخش ۲ به آن اشاره شد عدد رنگی ۳ برای گراف‌های مثلثی به‌راحتی اثبات شد و اهمیت زیاد آن در راحتی یافتن آن بود و با بیان قضیه‌ای نشان داده شد یک تغییر ساده در نوع توپولوژی روی فضا این مشکل را به‌راحتی برطرف می‌کند. در ادامه با بیان قضیه‌ای ساده که در بخش ۲ به آن اشاره شد با استفاده از این نگاشت‌ها، عدد رنگی گراف‌های کامل به‌دست آمد، که خیلی دقیق‌تر و برای تعداد راس‌های بالا هم جواب گویی مناسبی داشت. هم‌چنین مهم‌ترین عدد رنگی، که همان عدد رنگی برای گراف‌های بسته است را توانست با تغییر ساده‌ای در نوع تعریف نگاشت و فضای پوششی آن به‌وسیلهٔ نگاشت‌های رنگ‌پذیر به‌سهولت اثبات کند. در نهایت اصلی‌ترین مشکل رنگ‌آمیزی گراف‌ها که تعداد راس زیاد است با اثبات یک قضیه در بخش ۳ که نشان داد n می‌تواند متناهی باشد به‌راحتی مرتفع شد.

منابع

1. Arts J. M., Nishiura T., "book. Dimension and extensions", (Vol. 48). Elsevier (1993) 5-23.
2. Blsaszczyk A., Vermeer J., "Some Old and Some New Results on Combinatorial Properties of Fixed-point Free Maps", Annals of the NewYork Academy of Sciences, 767(1) (1995) 1-16.
3. Engelking R., "General topology, Heldermann, Berlin", Sigma series in pure mathematics, Vol. 6 (1989).
4. Van Douwen E. K., "βX and fixed-point free maps", Topology and its Applications, 51 (2) (1993) 191-195.
5. Van Hartskamp M. A., Vermeer J., "On colorings of maps", Topology and its Applications، 73(2) (1996) 181-190.
6. Wallman H., "Lattices and topological spaces", Annals of Mathematics, (1938) 112-126.
7. Wilson R. J., "An introduction to graph theory", Pearson Education India (1970).