

تقابل توپولوژی با گراف در رنگ‌آمیزی

حمید عرفانیان اورعی دهرخی*، محمد ابری، بهزاد صالحیان متی‌کلایی
دانشگاه دامغان، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پذیرش ۹۸/۰۷/۰۳

دریافت ۹۶/۱۲/۰۵

چکیده

در این پژوهش به تعریف رنگ‌آمیزی گراف‌ها و نگاشت‌های رنگی می‌پردازیم و با تشریح ارکان تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها به توضیح شرایط برقراری آنها برای استفاده در زمینه رنگ‌آمیزی گراف‌ها می‌پردازیم و با بیان قضایا و لم‌های متعدد، نحوه عملکرد آنها روی گراف‌ها را نشان می‌دهیم. همچنین با بیان تعریف چند نوع گراف و عدد رنگی منسوب به آنها، عدد رنگی مربوط به هر گراف به وسیله این نگاشت‌ها تبیین و اثبات می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم عدد رنگی $n+3$ برای نگاشت‌های رنگ‌پذیر انطباق زیادی با عدد رنگی گراف‌ها دارد. همچنین به این سوال پاسخ داده می‌شود، که آیا این نگاشت‌ها توانایی کافی برای رنگ‌آمیزی هر نوع گراف را دارند؟

واژه‌های کلیدی: نگاشت رنگ‌پذیر، پوشش نقطه ای، رنگ‌آمیزی گراف، عدد رنگی

مقدمه

هدف این پژوهش بررسی رنگ‌آمیزی یک گراف به وسیله نگاشت‌های رنگ‌پذیر و تبیین شرایط و نحوه عملکرد این نگاشت‌ها روی گراف‌های شناخته شده است. در ابتدا با بیان تعریف رنگ‌پذیری گراف‌ها و نگاشت‌های رنگ‌پذیر به تحلیل ارکان آنها پرداخته می‌شود. در ادامه با به دست آوردن عدد رنگی گراف‌ها به وسیله این نگاشت‌ها نشان داده می‌شود که هر گراف به وسیله یکی از این نگاشت‌ها با عدد رنگی مشخص رنگ‌آمیزی می‌شود.

تعریف ۱. اگر گراف G یک گراف بی‌طوقه باشد، G را با k -رنگ، رنگ‌پذیر گویند در صورتی که بتوان هر یک از k -رنگ را به یکی از راس‌های آن تخصیص داد، به طوری که هیچ دو راس مجاور، هم رنگ نباشند.

تعریف ۲. فرض کنید $f: X \rightarrow X$ نگاشت بدون نقطه ثابت باشد. f را با k -رنگ، رنگ‌پذیر گویند اگر پوشش بسته $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ وجود داشته باشد، به طوری که C_i ها شامل جفت $\{f(x, x)\}$ نباشند. یا به طور مشابه برای هر $i = 1, 2, \dots, k$ رابطه $C_i \cap f(C_i) = \emptyset$ برقرار باشد.

با توجه به دو تعریف ۱ و ۲، در رنگ‌آمیزی به وسیله نگاشت‌ها نوع فضا و پوشش معرفی شده روی آنها اهمیت زیادی دارد. از آن جاکه در رنگ‌آمیزی گراف‌ها نوع فضایی که گراف روی آن تعریف می‌شود تغییری در روند رنگ‌آمیزی ایجاد نمی‌کند و چون در رنگ‌آمیزی راسی فضاهای هاسدورف کارایی بیشتری دارند، از این رو، از ابتدا همه فضاهای هاسدورف در نظر گرفته می‌شوند. اگر در قضیه‌ای نیاز به استفاده از نوع خاصی از فضای باشد در ابتدای قضیه به آن اشاره می‌شود.

نکته بسیار مهم برای به کار بردن تعریف ۲ در رنگ‌آمیزی یک گراف انتخاب نوع پوشش برای آن است. در توپولوژی پوشش برای سطوح به کار می‌رود، حال سوال این است، آیا می‌توان پوشش را برای نقاط هم معرفی کرد؟

تعریف ۳. خانواده $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ از همسایگی‌های نقطه x را یک پوشش برای آن گویند هرگاه برای هر همسایگی از x مثل U رابطه $U \subseteq \bigcup C_i$ برای هر $1 \leq i \leq k$ برقرار باشد.

با استفاده از این تعریف مشکل پوشش برای یک نقطه حل می‌شود. برای تعداد نقطه بیش‌تر کافی است که برای هر نقطه همین پوشش را به‌دست آورد و اجتماع آنها را به‌عنوان پوشش همه نقاط در نظر گرفت. مسئله بعدی در استفاده از تعریف ۲ برای رنگ‌آمیزی یک گراف، اهمیت تفاوت رنگ‌ها در دو راس مجاور هم است. به‌منظور برطرف کردن این مشکل کافی است برای هر دو راسی که به‌هم متصل هستند نگاشت رنگ‌پذیری تعریف کرد که با دریافت نقطه ابتدایی، نقطه انتهایی را نتیجه دهد و با استاندارد به رابطه $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ و بدون نقطه ثابت بودن این نگاشت‌ها در تعریف، می‌توان این مهم را به‌راحتی اثبات کرد.

عدد رنگی

نکته قابل توجه در رنگ‌آمیزی یک گراف عدد رنگی منسوب به آن است. با توجه به تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها هر C_i یک‌رنگ است و با توجه به نقطه ثابت بودن نگاشت‌های رنگ‌پذیر حتماً $f(C_i)$ هم‌رنگ است. از رابطه $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ برای هر C_i می‌توان این نتیجه را گرفت که $f^{-1}(x)$ هم یک‌رنگ است، پس عدد رنگی ۳ برای هر نگاشت اثبات می‌شود. قضیه ۴ منسوب به قضیه عدد رنگی در نگاشت‌های رنگ‌پذیر است.

قضیه ۴. فرض فضای پارافشرده و $\dim X \leq n$ باشد. در نتیجه هر همسانریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش، با $n+3$ رنگ، رنگ‌پذیر است.

عدد رنگی $n+3$ همان تعبیر k را در تعریف ۱ برای گراف‌ها دارد. برای اثبات قضیه ۴ نیاز به بیان چند تعریف است که در ابتدا به بیان آنها پرداخته می‌شود.

تعریف ۵. بزرگ‌ترین عنصر در خانواده $C(x)$ از همه فشرده‌سازی‌ها، از یک فضای تیخونوف مثل X را فشرده‌سازی استون-چخ^۱ گویند و با βX نشان می‌دهند.

βX در اصل یک فضای هاسدورف فشرده همراه با یک نگاشت پیوسته از X است، با این شرط که هر نگاشت پیوسته مانند $f: X \rightarrow K$ زمانی که K یک فضای فشرده هاسدورف باشد، تنها به یک صورت منحصر به‌فرد قابل ارتقاء به نگاشت پیوسته $\beta f: \beta X \rightarrow K$ باشد. با توجه به تعریف بالا طرح اثبات قضیه ۴ به این صورت می‌شود که فضای X به فضای استون-چخ βX گسترش می‌یابد. هم‌چنین به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که رابطه $\dim X = \dim \beta X$ برقرار است. حال فرض شود $f: X \rightarrow X$ یک هم‌سانریختی و X فشرده باشد و اثبات می‌شود این نگاشت با یک نگاشت بدون نقطه ثابت (حتی یک همسانریختی) روی یک فضای متریک فشرده که بعد آن نابیش‌تر از بعد X است، مزدوج است.

فضای Y باید دارای "تمایش‌والمن"^۲ از یک خانواده از صفر-مجموعه‌های X که با دقت انتخاب شده‌اند، باشد. در واقع رنگ‌آمیزی $\{A_1, A_2, \dots, A_{n+3}\}$ از نگاشت ساخته شده روی Y رنگ‌آمیزی $\{\emptyset^{-1}(A_1), \emptyset^{-1}(A_2), \dots, \emptyset^{-1}(A_{n+3})\}$ را برای نگاشت f ایجاد می‌کند که این همان عدد $n+3$ را برای عدد رنگی نگاشت اثبات می‌کند. برای رسیدن به این هدف، نوع فضا و بیان خواص مورد نیاز برای آن اهمیت زیادی دارد. لم ۶ این فضا و خواص مورد نیاز آن را ارائه می‌دهد.

لم ۶. فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده باشد، در این صورت این احکام برقرارند:
۱. $\dim X \leq n$.

۲. اگر پایه B از صفر-مجموعه‌ها وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر مجموعه متناهی $\tilde{h} \subseteq B$ به شرط این که $\tilde{h} \cap \tilde{h} = \emptyset$ آن‌گاه مجموعه متناهی $C \subseteq B$ با خواص زیر موجود است:

1. Stone cech
2. Wallman extension

(a) برای هر عنصر $G \in C$ ، وجود دارد $F \in \mathcal{H}$ به طوری که $F \in G$

$$b) \cap C = \emptyset.$$

(c) هر زیرمجموعه از G با بیش تر از $n + 3$ عنصر، پوششی از X است.

اثبات: لازم به ذکر است که اثبات این قضیه در کتاب بعد و گسترش از آرتس و نیشورا^۱ بیان شده است [۲].

لم ۷. [۷]، برای مجموعه شمارای $S \subset Z(X)$ ، مجموعه شمارای $T \subset Z(X)$ وجود دارد، به طوری که رابطه $T \supset S$ که دارای خواص ۶-۱ از لیست (*) است، برقرار است.

لیست (*):

$$1. \{\emptyset, X\}.$$

$$2. \text{ برای } S, T \in \mathcal{T} \text{ داریم } \{S \cap T, S \cup T\} \subset \mathcal{T}.$$

$$3. \text{ برای } T \in \mathcal{T} \text{ رابطه } \{f^{-1}(x), f(x)\} \subset \mathcal{T} \text{ برقرار است.}$$

$$4. \text{ شبکه منظم } \mathcal{T} \text{ نرمال است به طوری که برای هر } S, T \in \mathcal{T} \text{ مجزا، وجود دارد } H, G \text{ متعلق به } \mathcal{T} \text{ به طوری که}$$

$$G \cap S = \emptyset = T \cap H = X.$$

$$5. \text{ برای هر } T \in \mathcal{T} \text{ رابطه } T_n \in \mathcal{T} \text{ به طوری که } \{X \setminus T\} = \bigcup \{T_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ برقرار است.}$$

$$6. \text{ برای هر مجموعه متناهی } \mathcal{H} \subset T \text{ به شرط } \mathcal{H} = \emptyset \text{ مجموعه متناهی } C \subset T \text{ با خواص زیر وجود دارد:}$$

$$a) C = \emptyset.$$

$$b) \text{ هر زیر مجموعه از } C \text{ با بیش تر از } n + 1 \text{ عنصر پوششی از } X \text{ است.}$$

$$c) \text{ برای هر عنصر } G \in C \text{ وجود دارد یک } F \in \mathcal{T} \text{ به طوری که } F \subset \mathcal{H} \text{ برقرار باشد.}$$

$$7. \text{ زیر مجموعه متناهی } \{C_1, C_2, \dots, C_k\} \text{ از } \mathcal{T} \text{ وجود دارد و برای هر } 1 \leq i \leq k \text{ رابطه } f(C_i) \cap C_i = \emptyset \text{ و}$$

$$C_1, C_2, \dots, C_k = X \text{ برقرار خواهد شد. حال با استفاده از لم زیر مجموعه شمارش پذیر } \mathcal{T} \text{ با خواص بالا را می توان}$$

ایجاد کرد.

تعریف ۸. نگاشت $f^*: Y \rightarrow Y$ به طور ضعیف مزدوج گویند اگر نگاشت بدون نقطه ثابت (یا حتی یک همسان ریختی)

مثل $\varphi: X \rightarrow Y$ وجود داشته باشد، به طوری که:

$$\varphi \circ f = f^* \circ \varphi$$

حال کافی است یک مزدوج سازی بین $f^*: Y \rightarrow Y$ و $f: X \rightarrow X$ ساخته شود به طوری که خاصیت (۱) را فراهم آورد.

اثبات قضیه ۴. نگاشت $\varphi: X \rightarrow Y$ با تعریف $\varphi(x) = \{s \in T : x \in S\}$ را در نظر گرفته، واضح است که $\varphi(x) \in Y$

به وسیله X فشرده شده است. همچنین φ پوشا است، بنابراین روابط زیر به سادگی به دست می آیند:

$$\varphi^{-1}(S^*) = S \text{ و } \varphi(S) = S^*.$$

در نهایت تابع پیوسته زیر تعریف می شود:

$$f^*: Y \rightarrow Y$$

$$f^*(\mathcal{H}) = \{f(F) : F \in \mathcal{H}\}.$$

بر این اساس رابطه $f^*(\mathcal{H}) \in Y$ واضح است. حال تساوی های زیر به راحتی قابل اثبات است:

$$f^*(S^*) = (f(S))^* \text{ و } (f^*)^{-1}(S^*) = (f^{-1}(S))^*.$$

به طور بدیهی f^* پیوسته است. به راحتی می توان نشان داد که f^* یک همسان ریختی بدون نقطه ثابت است. در حقیقت

$$f(C_i) \cap C_i = \emptyset \text{ نشان می دهد که این رابطه برقرار است: } Y = C_1^* \cup \dots \cup C_k^*$$

$$(f(C_i))^* \cap C_i^* = \emptyset \text{ و } f^*(C_i^*) \cap C_i^* = \emptyset.$$

در نهایت اگر برای نگاشت‌های تعریف شده φ و f^* در بالا نشان داده شود که:

$$\varphi \circ f = f^* \circ \varphi.$$

اثبات قضیه به پایان می‌رسد که این امر به سادگی انجام‌پذیر است.

سوالاتی که این‌جا به ذهن می‌رسد این است که آیا این قضیه می‌تواند عددهای رنگی مختلف مورد بحث در گراف‌ها را نتیجه بدهد؟

در پاسخ به این سوال باید چند مثال بیان کرد تا کارایی این قضیه در مورد گراف‌های مختلف درک شود.

تعریف ۹. گراف تهی گرافی است که با دارا بودن n راس هیچ یالی ندارد. عدد رنگی این گراف عدد ۱ است.

در مورد این گراف خاص که هیچ یالی ندارد نمی‌توان نگاشت رنگ‌پذیر تعریف کرد، چون از شرایط تعریف یک نگاشت رنگ‌پذیر، بدون نقطه ثابت بودن آنها است که با بدون یال بودن این گراف‌ها تناقض دارد. از این‌رو، این عدد رنگی توسط قضیه عدد رنگی به‌دست نمی‌آید.

مثال بعد عدد رنگی معروف ۳ برای گراف‌های مثلثی است. که با توجه به مطالب ابتدای بحث به‌راحتی می‌توان به آن رسید. به‌همین منظور لازم به‌ذکر است که قضیه عدد رنگی، پایه اصلی نگاشت‌های رنگ‌پذیر است و انعطاف‌پذیری بسیار زیادی در تغییر نوع فضا و نوع نگاشت دارد. به‌عنوان مثال برای تحقق عدد رنگی ۳ همین قضیه بدین‌صورت تغییر ماهیت می‌دهد.

قضیه ۱۰. [۲]، نگاشت بدون نقطه ثابت $\varphi: D \rightarrow D$ روی فضای توپولوژیک گسسته با ۳ رنگ، رنگ‌پذیر است.

یعنی تغییر در نوع توپولوژی هدف را میسر کرد.

تعریف ۱۱. به گرافی کامل گفته می‌شود که هر دو راس متمایز آن به‌وسیله یک یال به هم متصل باشد. عدد رنگی این نوع گراف‌ها ۲ است.

برای به‌دست آوردن این عدد رنگی به‌وسیله نگاشت‌های رنگ‌پذیر ابتدا باید نگاشتی معرفی کرد که در این نوع گراف‌ها کارایی داشته باشد. به‌نظر می‌رسد نگاشت متقابل قطری از کره n -بعدی S^n که با α_n نمایش داده می‌شود، انتخاب مناسبی باشد. حال با استفاده از قضیه ۱۲ که منسوب به لیوسترنیک و اسپنیرل من^۱ است، می‌توان برای این نوع گراف‌ها عدد رنگی متناسب را به‌دست آورد.

قضیه ۱۲. [۲]، نگاشت متقابل قطری $\alpha: S^n \rightarrow S^n$ روی کره n -بعدی S^n نیاز به حداقل $n+2$ رنگ دارد.

تعریف ۱۳. گرافی را همبند گویند که نتوان آن را به‌صورت اجتماع دو گراف مجزا در نظر گرفت.

قضیه ۱۴. [۷] (بروک ۱۹۹۴)، اگر G یک گراف ساده و همبند و غیرکامل باشد و اگر بزرگ‌ترین درجه راس‌های آن ρ ($3 \leq \rho$) باشد، آن‌گاه G, ρ -رنگ‌پذیر است.

رفع مشکل رنگ‌آمیزی گراف‌های که دارای چندین یال متصل به یک راس هستند در استفاده از نگاشت‌های رنگ‌پذیر به‌وسیله قضیه ۱۶ مرتفع می‌شود لازم به توضیح است که در استفاده از تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها محدودیتی برای اتصال چند x به یک $f(x)$ وجود ندارد.

برای این منظور ابتدا باید تعریف رنگ‌پذیری نگاشت‌ها به‌گونه‌ای تغییر یابد که متناسب با طرح مسئله باشد.

تعریف ۱۵. فرض برای $j = 1, 2, \dots, l$ نگاشت‌های بدون نقطه ثابت $f_j : X \rightarrow X$ موجود باشند، آنها را با k رنگ، رنگ‌پذیر گویند، اگر پوشش بسته $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ موجود و شرط $f_j(c_i) \cap c_i = \emptyset$ برای $j \leq l$ و $i \leq k$ برقرار باشد، آن‌گاه عناصر C را رنگ و خود آن را رنگ‌آمیزی برای $f_1, f_2, \dots, f_l$ گویند.

با توجه به تعریف ۱۵ قضیه ۱۶ به بیان عدد رنگی این نوع نگاشت‌ها می‌پردازد.

قضیه ۱۶. [۵] فرض کنید X یک فضای پارافشرده با $\dim X \leq n$ باشد و $f_i : X \rightarrow X$ برای $1 \leq i \leq l$ هم‌سان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X باشد و فرض $g_j : X \rightarrow X$ برای $1 \leq j \leq k$ نگاشت بدون نقطه ثابت از X به روی خودش باشد، پس $\{f_1, f_2, \dots, f_l, g_1, g_2, \dots, g_k\}$ به وسیله $n + 2l + k + 1$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود. عدد رنگی $n + 2l + k + 1$ در قضیه ۱۶ همان عدد ρ در قضیه ۱۴ است.

مثال‌های بالا نشان می‌دهد که نگاشت‌های رنگ‌پذیر توانایی کافی برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها دارند حتی در شرایطی بهتر از رنگ‌آمیزی گراف‌ها عمل کرده و برای تعداد راس‌های بالا جواب گویی بهتری دارند.

شناسایی خواص n

در نگاه اول به قضیه عدد رنگی آن‌چه مورد توجه قرار می‌گیرد مشخصات n است. متناهی یا نامتناهی بودن n اهمیت زیادی دارد. قضیه ۱۷ نشان می‌دهد که این عدد می‌تواند متناهی باشد اگر تغییراتی در نوع فضا و نگاشت اعمال شود.

اولین بار فان داوون^۱ [۴] اثبات کرد اگر X فضای متناهی‌البعد و پارافشرده باشد، آن‌گاه هر نگاشت بدون نقطه ثابت بسته $f : X \rightarrow X$ که برای مقدار $n < \omega$ و هر $x \in X$ دارای خاصیت $|f^{-1}(x)| \leq n$ باشد، به صورت متناهی رنگ‌پذیر است [۱].

قضیه ۱۷ نشان می‌دهد که $n+3$ می‌تواند متناهی باشد.

قضیه ۱۷. فرض کنید X متناهی‌البعد و پارافشرده باشد پس هر خودسان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش متناهی‌رنگ‌پذیر است.

لم ۱۸ در اثبات این قضیه اهمیت زیادی دارد.

لم ۱۸. فرض کنید X فضای نرمال با $\dim X \leq n$ باشد و $f : X \rightarrow X$ یک هم‌سان‌ریختی باشد. حال فرض $\tilde{h}$ مجموعه‌ای مجزا از زیرمجموعه‌های بسته از X باشد به طوری که برای هر $F \in \tilde{h}$ رابطه $F \cap f(F) = \emptyset$ برقرار باشد. در نتیجه زیرمجموعه‌های بسته $A_1, A_2, \dots, A_{2n+3}$ از X وجود دارد به طوری که:

$$(a). \text{ برای هر } i \leq 2n+3, f(A_i) \cap A_i = \emptyset,$$

$$(b). U \tilde{h} \subseteq \bigcup_{i=1}^{2n+3} A_i$$

اثبات قضیه ۱۷: فرض $f : X \rightarrow X$ خودسان‌ریختی بدون نقطه ثابت باشد. باید نشان داده شود که f با $(n+1) * (2n+3)$ رنگ، رنگ‌پذیر است، در حالی که $\dim X = n$ است. بنابراین f بدون نقطه ثابت و پارافشرده و n -بعدی است. حال پوشش باز موضعاً متناهی $U = \{U_s\}_{s \in S}$ از X وجود دارد به طوری که رابطه $\text{ord}(U) \leq n$ برای آن برقرار باشد، علاوه بر این برای هر $s \in S$ رابطه $f(U_s) \cap U_s = \emptyset$ نیز برقرار است، پوشش باز V از X وجود دارد به طوری که مبین اجتماع $n+1$ خانواده از $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ است و $V_i = \{V_{i,s}\}_{s \in S}$ ها جفت به جفت مجزا هستند و برای $s \in S$ و $i \leq n+1$ رابطه $V_{i,s} \subseteq U_s$ برقرار است. قضیه ۴.۲.۳ در پژوهشی که ون‌دان [۴] انجام داده تشریح شده است. فرض کنید $\tilde{h}$ تحدید بسته از V باشد. با استفاده از قضیه ۱۸.۵.۱ در پژوهش والمن [۶] می‌توان به سادگی

نشان داد که $\tilde{h}$ اجتماع $n+1$ خانواده‌ای از $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ و $V_i = \{F_{i,s}\}_{s \in S}$ است. به‌طوری‌که برای $s \in S$ و $i \leq n+1$ رابطه $F_{i,s} \subseteq V_{i,s}$ برقرار است. در نتیجه برای هر $i \leq n+1$ ، $\tilde{h}_i$ ‌هایی وجود دارند که مجزا هستند. بنابراین U موضعاً متناهی است. به‌راحتی می‌توان نشان داد برای هر $F \in \tilde{h}$ رابطه $f(F) \cap F = \emptyset$ برقرار است. این نشان می‌دهد برای هر i ، رابطه $f \upharpoonright U V_i$ به‌وسیله $2n+3$ رنگ، رنگ‌پذیر است و با استفاده از لم ۱۸ می‌توان نتیجه گرفت که f به‌وسیله $(2n+3) * (n+1)$ رنگ، رنگ‌پذیر است.

نتایج

این پژوهش نشان داد که اگرچه نگاشت‌های رنگ‌پذیر توانایی کافی برای رنگ‌آمیزی گراف‌ها را دارند اما در مواردی خاص مثل گراف تهی چون قابل تعریف نیستند نمی‌توان از آنها استفاده کرد. با استفاده از نگاشت‌های رنگ‌پذیر که در ابتدای بخش ۲ به آن اشاره شد عدد رنگی ۳ برای گراف‌های مثلثی به‌راحتی اثبات شد و اهمیت زیاد آن در راحتی یافتن آن بود و با بیان قضیه‌ای نشان داده شد یک تغییر ساده در نوع توپولوژی روی فضا این مشکل را به‌راحتی برطرف می‌کند. در ادامه با بیان قضیه‌ای ساده که در بخش ۲ به آن اشاره شد با استفاده از این نگاشت‌ها، عدد رنگی گراف‌های کامل به‌دست آمد، که خیلی دقیق‌تر و برای تعداد راس‌های بالا هم جواب گویی مناسبی داشت. همچنین مهم‌ترین عدد رنگی، که همان عدد رنگی برای گراف‌های بسته است را توانست با تغییر ساده‌ای در نوع تعریف نگاشت و فضای پوششی آن به‌وسیله نگاشت‌های رنگ‌پذیر به‌سهولت اثبات کند. در نهایت اصلی‌ترین مشکل رنگ‌آمیزی گراف‌ها که تعداد راس زیاد است با اثبات یک قضیه در بخش ۳ که نشان داد n می‌تواند متناهی باشد به‌راحتی مرتفع شد.

منابع

1. Arts J. M., Nishiura T., "book. Dimension and extensions", (Vol. 48). Elsevier (1993) 5-23.
2. Blaszczczyk A., Vermeer J., "Some Old and Some New Results on Combinatorial Properties of Fixed-point Free Maps", Annals of the New York Academy of Sciences, 767(1) (1995) 1-16.
3. Engelking R., "General topology, Heldermann, Berlin", Sigma series in pure mathematics, Vol. 6 (1989).
4. Van Douwen E. K., " βX and fixed-point free maps", Topology and its Applications, 51 (2) (1993) 191-195.
5. Van Hartkamp M. A., Vermeer J., "On colorings of maps", Topology and its Applications, 73(2) (1996) 181-190.
6. Wallman H., "Lattices and topological spaces", Annals of Mathematics, (1938) 112-126.
7. Wilson R. J., "An introduction to graph theory", Pearson Education India (1970).