(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

ناوردای توپولوژیکی یک سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر روی مخروط واقع در یک میدان پتانسیلی

قربانعلی حقیقت‌دوست*، جعفر اوج‌بگ
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی محض

دریافت ۹۶/۱۲/۰۶ پذیرش ۹۸/۰۲/۱۸

چکیده

در این مقاله توپولوژی رویه‌های هم‌انرژی غیرتکین برای سیستم هامیلتونی با دو درجهٔ آزادی روی مخروط واقع در یک میدان پتانسیلی توصیف شده است. هم‌چنین روش یافتن ناوردای توپولوژیکی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر از حالت فشرده به رویه‌های دوار نافشرده توسیع داده شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های هامیلتونی، رویه‌های هم‌انرژی، ناورداهای فومنکو-زی‌شانگ، میدان‌های پتانسیلی.

مقدمه

در بررسی کیفی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر یک مشخصه مهم، نوع توپولوژیکی رویه‌های هم‌انرژی است. نظریهٔ رده‌بندی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر با دو درجه آزادی، نتیجهٔ تلاش‌های ریاضی‌دان روسی، فومنکو و شاگردان اوست. بر اساس این نظریه به هر سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر با دو درجهٔ آزادی محدود به چندگونا ۳-بعدی رویه هم‌انرژی غیرتکین، یک گراف با اعدادی روی یال‌های آن نسبت داده می‌شود که مولکول مارکدار یا ناوردای فومنکو-زی‌شانگ[1] نامیده می‌شود. مولکول مارکدار توصیف کاملی از برگ‌بندی سیستم مورد نظر (نسبت به هم‌ارزی لیوویلی) به‌دست خواهد داد. ساختن مولکول‌های مارکدار به چندین روش امکان‌پذیر است. در این‌جا یکی از روش‌های ساختن مولکول‌های مارکدار که بر مبنای رسم دیاگرام انشعاب نگاشت ممانی[2] است را در چند گام بیان می‌کنیم.

۱. دیاگرام انشعاب نگاشت ممانی $\phi: M^4 \longrightarrow R^2(h,k)$ برای چندگونا M^4 را رسم می‌کنیم. نقطهٔ x را نقطهٔ تکین ϕ گویند، هرگاه $rank\ d\phi(x) < 2$ باشد. تصویر مجموعه تمام نقاط تکین تحت نگاشت ممانی را دیاگرام انشعاب می‌نامند. در نتیجهٔ رسم دیاگرام انشعاب در صفحهٔ R^2 چندین منحنی با تکینگی داریم و آن را با نماد Σ نشان می‌دهیم.

۲. $\phi^{-1}(\ell)$ پیش‌نگارهٔ خط $\ell = \{H = h = \text{ثابت}\}$ روی صفحهٔ (H,K) که H تابع هامیلتونی و K انتگرال افزوده است، را به‌دست می‌آوریم که چندگونای ۳-بعدی در M است، چندگونای حاصل را با نماد Q_h^3 نشان می‌دهیم.

۳. تمام نقاط ناحیه $\phi^{-1}(\ell) \cap N$ را توصیف می‌کنیم که در آن N مجموعه تمام نقاط تکین و $\Sigma = \phi(N)$ است. هم‌چنین هِسین[3] انتگرال افزوده K برای زیرچندگونای بحرانی متناظر در Q_h^3 را محاسبه می‌کنیم.

---

*نویسنده مسئول gorbanali@azaruniv.ac.ir

1. Fomenko-Zieschang
2. Momentum mapping
3. Hessian

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.4.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.579]

۴. تعداد چنبره‌های لیوویلی و نحوه انشعاب در فضای پیش‌نگاره را مشخص می‌کنیم.

۵. گراف ریب و مشخصه‌های توپولوژیکی را توصیف و سرانجام ناورداهای عددی r_i ,ε_i , n_k را محاسبه می‌کنیم.

رده‌بندی توپولوژیکی سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر نسبت به هم‌ارزی لیوویلی در میدان‌های پتانسیلی روی رویه‌های دوار برای حالتی که چندگونای M دیفئومورف با S^2 باشد در برگیرندهٔ ردهٔ وسیعی از سیستم‌های مکانیکی است که حرکت ذره جرم‌دار روی کره ۲-بعدی با متریک دوار را توصیف می‌کند، که در [۴] بررسی شده است. استفاده از تابع پتانسیل مؤثر برای رده‌بندی سیستم‌های مورد نظر از نکات قابل توجه مقاله ایشان است. در این مقاله توصیف توپولوژیکی حرکت ذرهٔ جرم‌دار روی مخروط را بررسی می‌کنیم. برای روش ساخت دیاگرام انشعاب از [۱] و مفاهیم و تعاریف مقدماتی از [۲] استفاده شده است.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱. یک ساختار همتافته بر چندگونای هموار M یک ۲-فرم دیفرانسیل ω صادق در این شرایط است:

الف) فرم ω بسته باشد، یعنی $d\omega = 0$،

ب) فرم ω در هر نقطه چندگونا ناتبهگون باشد یعنی، در مختصات موضعی $d(\omega_{ij}(x)) \neq 0$ که در آن $\omega_{ij}(x)$ ماتریس فرم ω در نقطه x است.

چندگونای M همراه با یک ساختار همتافته، چندگونای همتافته نامیده می‌شود.

برای دو تابع هموار H و K روی چندگونای هموار M کروشه $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$: $\{\, ,\}$ با ضابطهٔ $\left\{K\, ,H\right\} = \omega(v, sgrad\ H)$ را کروشه پواسن گویند. کروشه پواسن پادمتقارن است و در شرط ژاکوبی و قاعده لایب‌نیتز صدق می‌کند.

تعریف ۲. فرض کنیم H یک تابع هموار بر چندگونای همتافته M باشد. میدان برداری پادگرادیان $sgrad\ H$ را برای این تابع چنین تعریف می‌کنیم:

$$\omega(v, sgrad\ H) = v(H)$$

که در آن v یک بردار مماس بر چندگونای M است. سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = sgrad\ H(x)$$

روی چندگونای همتافته M را یک سیستم هامیلتونی با تابع هامیلتونی H می‌نامند. در یک مختصات موضعی $(p_i\ , q_i)$، میدان برداری هامیلتونی به فرم$\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\ , -\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)$ درمی‌آید.

تعریف ۳. سیستم هامیلتونی را انتگرال‌پذیر به مفهوم لیوویل گویند هرگاه نگاشت‌های هموار H و K انتگرال‌های اول سیستم دینامیکی v موجود بوده و به‌طور تابعی مستقل باشند، هم‌چنین $\left\{H\, , K\right\} = 0$ و میدان‌های پادگرادیان آنها کامل باشند.

تعریف ۴. لایه‌بندی[۱] چندگونای M^4 به مؤلفه‌های هم‌بندی از رویه‌های تراز مشترک انتگرال‌های $H\, , K$ ، برگ‌بندی لیوویلی متناظر با دستگاه انتگرال‌پذیر $\upsilon = sgrad\ H$ نامیده می‌شود.

قضیهٔ لیوویل [۲] ساختار برگ‌بندی لیوویلی نزدیک برگ‌های منظم را توصیف می‌کند. در این قضیه T_ξ را تراز منظم مشترک توابع H, K در نظر می‌گیریم ، یعنی $T_\xi = \{x \in M | H(x){=}h\ , \mathrm{K}(x){=}\mathrm{k}\}$.

1. Foliation

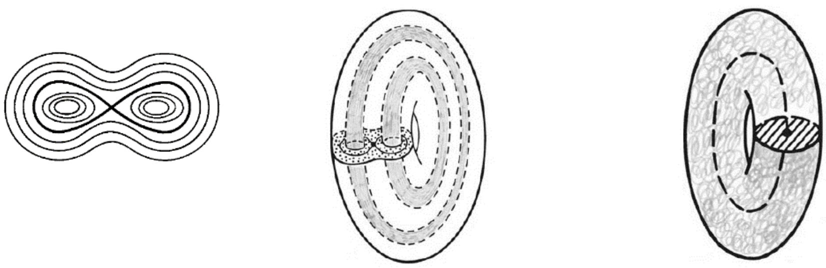
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.4.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.579]

حالت اول: اگر T_ξ هم‌بند و فشرده باشد آن‌گاه T_ξ دیفئومورف با چنبره ۲-بعدی است. اگر T_ξ فشرده ولی ناهم‌بند باشد آن‌گاه T_ξ اجتماعی از چنبره‌های لیوویلی است. در این حالت دو برگ را هم‌ارز لیوویلی گوییم اگر دیفئومورفیسمی از برگ اولی به دومی وجود داشته باشد که برگ‌ها را به هم‌دیگر بنگارد و جهت روی چندگوناهای ۳-بعدی Q_h^3 و $Q_{h'}^3$ و نیز جهت دایره‌های بحرانی شارهای هامیلتونی را حفظ کند.

حالت دوم: اگر T_ξ هم‌بند و نافشرده باشد آن‌گاه T_ξ دیفئومورف با استوانه است. هم‌ارزی لیوویلی در این حالت نیز مشابه حالت اول تعریف می‌شود.

اکنون به بیان دو نوع ۳-اتم حالت فشرده (حالت اول) از دیدگاه توپولوژی می‌پردازیم. توپولوژی ۳-اتم A یک چنبره توپر برگ‌بندی شده به چنبره‌های هم‌مرکز حول محور است که به‌صورت ضرب ۲-اتم هاشور خورده در شکل ۱ الف با دایره S^1 است.

توپولوژی ۳-اتم B به‌صورت ضرب ۲-اتم نشان داده شده سمت چپ در شکل ۱ ب و دایره S^1 است. برگ‌بندی لیوویلی، القایی از ۲-اتم متناظر است، به‌عبارتی دیگر (۲-اتم متناظر× A , $\mathrm{B} = S^1$). انواع دیگری از ۳-اتم‌ها در [۲] معرفی شده‌اند.



ب الف

شکل ۱.

تبصره ۱. اتم‌های نافشرده یک سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر برگ‌های منظم، استوانه است که آنها را با $\bar{A}$ و $\bar{B}$ نشان می‌دهیم [۶].

تعریف ۵. اگر x یک نقطهٔ بحرانی از رتبهٔ صفر نگاشت ممانی باشد به‌گونه‌ای‌که $dK \neq 0$ در این‌صورت طبق قضیهٔ داربو[1] [۲] مختصات کانونی (p_1,q_1,p_2,q_2) در همسایگی x چنان وجود دارد که $K = p_1$. با توجه به این‌که H و K با هم جابه‌جا می‌شوند یعنی $\{H , K\} = 0$ از این‌رو، H نمی‌تواند به q_1 وابسته باشد، یعنی $H = H(p_1,p_2,q_2)$. از آن‌جاکه x نقطهٔ بحرانی نگاشت ممانی است بنابراین $\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = 0$. نقطه x را ناتبهگون گوییم هرگاه دترمینان زیر غیرصفر باشد

$$|\mathcal{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial q_2} \end{vmatrix}$$

تعریف ۶. تابع $\widehat{F}$ روی Q_h^3 را یک تابع بات[2] گویند هرگاه مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های بحرانی آن یک زیرچندگونای بحرانی ناتبهگون تشکیل دهند. یعنی مجموعهٔ نقطه‌های بحرانی اجتماع از هم جدایی از زیر چندگوناهای هموار باشد که هر یک از آنها ناتبهگون است.

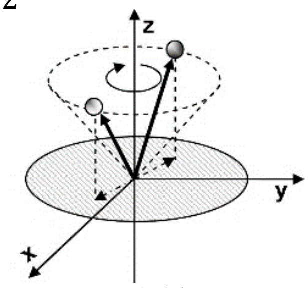
1. Darboux's theorem
2. Bott

تعریف ۷. چندگونای M مجهز به متریک g را چندگونای دوار گویند (با یک متریک دوار)، اگر عمل هموار و مؤثر[1] دایرهٔ S^1 روی چندگونا M به‌وسیلهٔ ایزومتری‌ها مشخص شود. رویه‌های ۲-بعدی دوار در R^3 مثالی از چندگونا‌های دوار هستند.

طرح مسئله و نتایج اصلی

جسمی به جرم m روی مخروطی در R^3 با معادله $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ در نظر می‌گیریم (شکل ۲ را ببینید). در مختصات استوانه‌ای، هامیلتونین که همان انرژی کل است را بدین‌صورت داریم:

$$H = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(1 + a^2) + r^2\dot{\theta}^2\right) + U$$



شکل ۲.

قرار می‌دهیم:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(1 + a^2) + r^2\dot{\theta}^2\right) \Longrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = P_r = m\dot{r}(1 + a^2) \quad \text{و} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = P_\theta = mr^2\dot{\theta}.$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات جرم ذره را واحد در نظر می‌گیریم. از این‌رو، هامیلتونین در مختصات جدید به‌صورت

$$H = \frac{1}{2(1 + a^2)}{P_r}^2 + \frac{1}{2r^2}{P_\theta}^2 + ar,$$

در می‌آید. حرکت ذره به‌وسیلهٔ تابع هموار $f(r) = \pm r$ روی $[0, +\infty)$ در میدان پتانسیلی $V(r) = ar$ تعریف شده است. نقطهٔ متناظر با $r = 0$ تکینی مخروط است.

تعریف ۸. تابع پتانسیل موثر بدین‌صورت تعریف می‌شود

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

که در آن L ممانی زاویه‌ای، r فاصله بین دو جرم، $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ و $U(r)$ شکل عمومی پتانسیل است.

گزارهٔ ۱. برای زوج $(f(r), V(r))$ داده شده، سیستم با هامیلتونین H روی مخروط انتگرال‌پذیر به مفهوم لیوویل است.

اثبات: ایدهٔ اثبات کاملاً مشابه با اثبات گزاره ۱ hsj [۴]. فضای فاز سیستم از بعد چهار است، زیرا هر نقطهٔ آن به‌وسیلهٔ مختصات $(r, \theta, P_r, P_\theta)$ داده شده که در آن (r, θ) مختصات نقطه و (P_r, P_θ) گشتاورها هستند. سیستم دارای دو انتگرال، انتگرال انرژی به‌صورت

$$H = \frac{1}{2(1 + a^2)}{P_r}^2 + \frac{1}{2r^2}{P_\theta}^2 + ar,$$

و انتگرال افزوده اول به‌صورت $K = P_\theta$ است، زیرا $\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$. حرکت ذره روی مخروط به‌وسیلهٔ این معادله توصیف می‌شود:

---

1. Effective action

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.4.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.579]

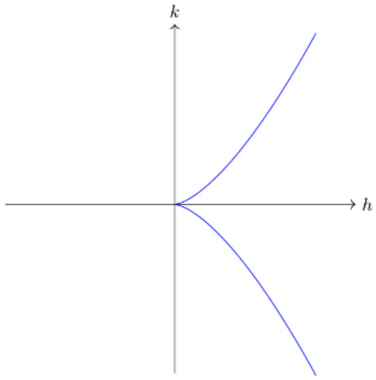
$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}\ , \dot{P}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

با توجه به این‌که دو انتگرال برای سیستم داریم، از این‌رو، از تعریف انتگرال‌پذیری به مفهوم لیوویل اثبات گزاره کامل است.

لم ۱. سیستم دینامیکی تعریف شده روی کلاف هم‌مماسی مخروط دارای خانواده‌ای ۲-پارامتری از نقاط رتبهٔ ۱ به‌صورت $(r,\theta,0,k(r))$ هستند که در آن $k(r) = \pm\sqrt{ar^3}$ است. سیستم دینامیکی هیچ نقطه‌ای از رتبه صفر ندارد. تصویر نقاط تکین از رتبهٔ ۱ تحت نگاشت ممانی بدین‌صورت است:

$$h(r) = \frac{3}{2}ar \quad \text{و} \quad k(r) = \pm\sqrt{ar^3},$$

که r روی $[0, +\infty)$ تعریف شده است. دیاگرام انشعاب نسبت به محور Oh متقارن است. (شکل ۳ را ببینید)



شکل ۳.

اثبات: روش به‌دست آوردن دیاگرام انشعاب در بخش قبل توضیح داده شده و از آوردن محاسبات این‌جا صرف نظر می‌شود.

مولکول رویه‌های هم‌انرژی

با توجه به این‌که نظریه رده‌بندی توپولوژیکی فومنکو-ژی‌شانگ برای رویه‌های هم‌انرژی غیرتکین یک سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر بهکار برده می‌شود، از این‌رو، بررسی غیرتکین بودن رویه‌های هم‌انرژی Q_h^3 یک سیستم هامیلتونی ضروری است، یعنی رویه‌هایی که به‌ازای تمام نقاط آن $dH \neq 0$.

لم ۲. رویه هم‌انرژی Q_h^3 به‌ازای $a = 0$ غیرتکین است اگر $h \neq 0$ برای $a \neq 0$ هامیلتونین نقطه بحرانی ندارد، یعنی تمام h مقادیر منظم هامیلتونین H است.

اثبات: با محاسبهٔ مشتق هامیلتونین به آسانی دیده می‌شود برای حالتی که $a = 0$ است، نقاط بحرانی آن به‌صورت $(r,\theta,0,0)$ است. با جای‌گذاری آن در تابع هامیلتونین داریم:

$$H(r,\theta,0,0) = ar \xrightarrow{a=0} H(r,\theta,0,0) = 0.$$

بنابراین اگر $a \neq 0$ باشد انتخاب $h \neq 0$ نقاط منظم را به‌دست می‌دهد. در نتیجه نقاط منظم، نقاطی هستند که در این معادله صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{2}{P_r}^2 + \frac{1}{2r^2}{P_\theta}^2 = h.$$

برای حالتی که $a \neq 0$ باشد، همواره $dH \neq 0$.

تقریباً تمام انتگرال‌های سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر ظاهر شده در فیزیک و مکانیک توابع بات هستند. یک سیستم انتگرال‌پذیر را ناتبهگون گویند، هرگاه دارای یک انتگرال بات باشد. برای هر سیستم هاملیتونی انتگرال‌پذیر

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.4.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.579]

تحلیلی $v= sgrad\ H$ روی رویه هم‌انرژی Q_h^3 با یک اختلال هموار کوچک می‌توان یک سیستم انتگرال‌پذیر هموار ناتبهگون به‌دست آورد. هر رویه بسته فشرده جهت‌پذیر ۳-بعدی را می‌توان به‌عنوان رویه ۳-بعدی هم‌انرژی سیستم هامیلتونی در نظر گرفت که به‌کمک یک انتگرال بات حاصل می‌شود، به‌عبارتی ساده‌تر به‌کمک انتگرال بات می‌توان ساختار توپولوژیکی رویه هم‌انرژی را به‌دست آورد (گزارهٔ ۳-۶ از [۷] را ببینید).

تابع پتانسیل $U_k(r) = \frac{1}{2r^2}k^2 + ar$ را در نظر می‌گیریم، آن‌گاه در هر نقطه $(r,\theta,0,k)$ که $r,k \neq 0$ داریم:

$$U_k''(r) = -\frac{3}{r^4}k^2 \neq 0.$$

بنابراین تحدید تابع K به رویهٔ هم‌انرژی غیرتکین Q_h^3 تابع بات است.

لم ۳. فرض کنید $Q \subseteq Q_h^3$ یک مؤلفهٔ هم‌بندی از رویهٔ غیرتکین باشد که $K|_{Q_h^3}$ تابع بات است. در این‌صورت اتم‌های سیستم از نوع $\overline{A}$ می‌باشند.

اثبات: مولکول سیستم را در دو حالت بررسی می‌کنیم. حالت اول برای $a = 0$: مجموعه نقاط صادق در معادلهٔ

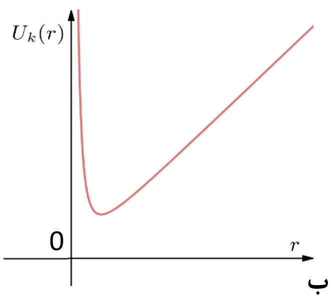
$$\frac{1}{2}{P_r}^2 + \frac{1}{2r^2}{P_\theta}^2 = h,$$

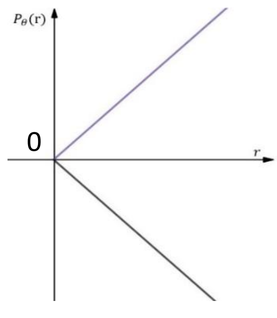
را در نظر می‌گیریم. حال معادله فوق را برحسب P_r بدین‌صورت داریم:

$$P_\theta(r) = \pm r\sqrt{2h - {P_r}^2}.$$

عبارت زیر رادیکال همان تابع پتانسل مؤثر برای حالتی است که $a = 0$. با توجه به مثبت بودن عبارت زیر رادیکال نتیجه می‌شود تابع پتانسیل همواره مثبت است و هم‌چنین دارای یک نقطه کمینهٔ سراسری است. نمودار $P_\theta(r)$ برای مقادیر مختلف r با تغییرات h و P_r همواره دو خط متقاطع گذرنده از مبدأ نشان داده شده در شکل ۴ الف است. به‌ازای $h = 2$ دو خط نمودار منطبق بر محور r و زمانی که $h \to \infty$ میل می‌کند بر محور قایم منطبق می‌شوند.

با توجه به این‌که فقط مقادیر مثبت r مورد نظر است، از این‌رو، با در نظر گرفتن نمودار شکل ۴ الف و ضرب آن در دایره S^1 (با توجه به این‌که $\theta \in R\backslash 2\pi Z$) ۳-اتم مورد از نظر توپولوژیکی استوانه با کمربند میانی است. از منظر توپولوژیکی می‌توان به‌صورت ۲-اتم A ضرب در R^1 در نظر گرفت، این ۳-اتم‌ها را با نماد $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. از طرفی به‌دلیل مثبت بودن عبارت زیر رادیکال به‌ازای هر r تصویر وارون نقطه (h,k) اجتماع دو استوانه متناظر با علامت بیرون از رادیکال است





شکل ۴.

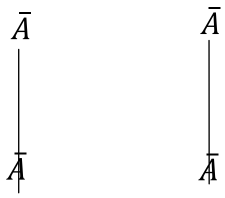
برای حالت $a \neq 0$ که همواره $dH \neq 0$ با توجه به معادله هامیلتونین داریم:

$$P_\theta(r) = \frac{\pm r}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{2(1+a^2)(h-ar) - {P_r}^2}.$$

حالت‌های مختلف ۲-اتم در جدول ۱ رسم شده است. در حالت‌های مختلف با ضرب ۲-اتم‌های متناظر در دایره S^1 با توجه به این‌که $\theta \in R\backslash 2\pi Z$، ۳-اتم مورد نظر از نظر توپولوژیکی استوانه است. با بررسی تمام حالت‌های ممکن مشاهده می‌شود همواره ۳-اتم از نوع $\bar{A}$ است و این اثبات را کامل می‌کند.

در بخش ۶ [۴] تحلیل تابع پتانسیل، الگوریتم شمارش مؤلفه‌های همبندی رویهٔ هم‌انرژی غیرتکین را بدین‌صورت مشخص می‌کند:

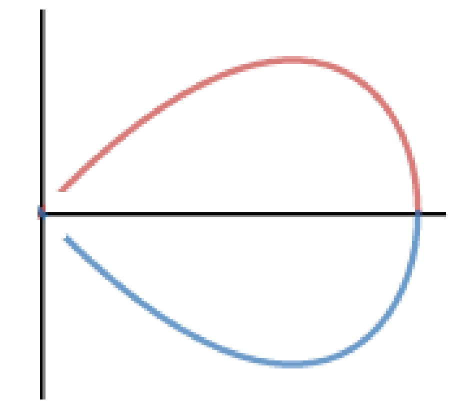
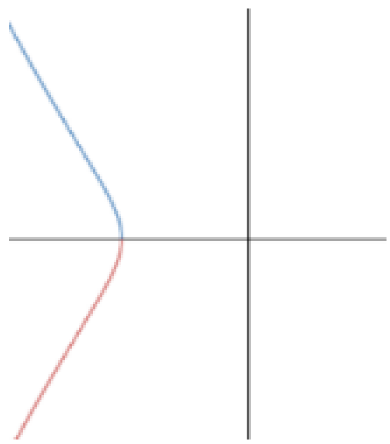
روی نمودار تابع پتانسیل (شکل ۴ ب) موازی با محور افق خطوط متقاطع با نمودار را در نظر می‌گیریم. برای مقادیر مختلف h شمارش قطعه‌های افقی از خط که اکیداً زیر نمودار $U_k(r)$ هستند تعداد مؤلفه‌های همبندی را به‌دست می‌دهد، به‌جز حالتی که برای هر r تابع $U_k(r)$ مثبت باشد. در این حالت هر قطعه که زیر کمینه سراسری تابع باشد متناظر با دو استوانه است. با توجه به شکل تعداد مؤلفه‌ها دو تا است. با در نظر گرفتن تقارن دیاگرام انشعاب مولکول مورد نظر سیستم بدین‌صورت به‌دست می‌آید:



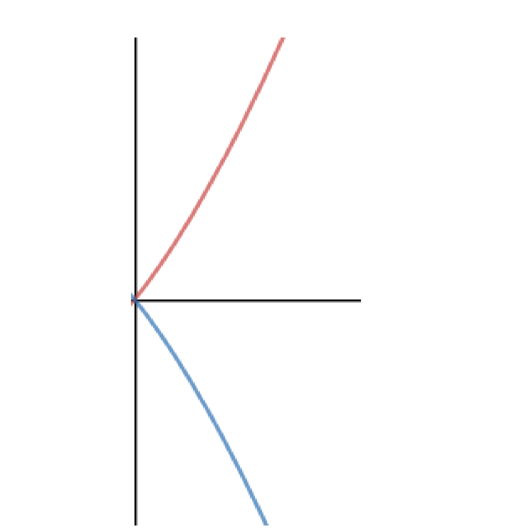
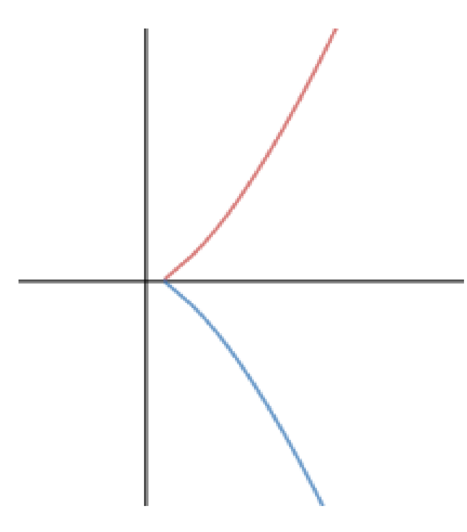
شکل ۵.

محاسبه ناورداهای r_i ,ε_i , n_k در مقاله‌ای دیگر بررسی می‌شود.

جدول ۱. نمودار تابع $P_\theta(r)$ برای حالت‌های مختلف a و h (محور افقی r و محور عمودی $P_\theta(r)$ است)

	$h > 0$	$h < 0$
$a > 0$		

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.4.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.579]

$\boldsymbol{a} < 0$		

نتیجه‌گیری

نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که توپولوژی رویه‌های هم‌انرژی غیرتکین برای سیستم هامیلتونی با دو درجه آزادی روی مخروط به‌عنوان رویه دوار غیرفشرده، اتم‌های نافشرده یک سیستم هامیلتونی انتگرال‌پذیر برگ‌های منظم، استوانه است. با اعمال روش بیان شده در لم ۳، می‌توان توپولوژی رویه‌های هم‌انرژی غیرتکین رویه‌های دوار فشرده را به‌دست آورد. هم‌چنین به‌کمک تابع پتانسیل، می‌توان تعداد مولفه‌های هم‌بندی رویهٔ هم‌انرژی غیرتکین مربوط به مخروط را مشخص کرد. در مورد سایر رویه‌های دوار غیرفشرده نیز روش‌های بیان شده در این مقاله را می‌توان به‌کار گرفت.

منابع

1. Haghighatdoost Gh. , Oshemkov A., "The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra so (4)", Sbornik Mathematics ,Vol. 200, 6 (2009) 899-921.
2. Haghighatdoost Gh., "The topology of isoenergetic surfaces for the Sokolov integrable case in the Lie algebra so (4) ",Doklady. Mathematics, Vol. 71, 2 (2005) 256-259.
3. Bolsinov A.V., Anatoly Fomenko, "Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification", Taylor & Francis (2004) 752 pages.
4. Fomenko A. T., Konyaev A.Yu., "New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems", Topology Appl. 159, 7 (2012) 1964-1975.
5. Fomenko A. T., Kantonistova E. O., "Topological classification of geodesic flows on revolution 2-surfaces with potential", Springer, Vol. 30 (2015) 11-27.
6. Nikolaenko S., "Topological Classification of the Goryachev Integrable Systems in the Rigid Body Dynamics: Non-Compact Case. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 38, No. 6 (2017) 1050-1060.