

## تخمین دقیق ضرایب لگاریتمی رده‌ای خاص از توابع تحلیلی

رحیم کارگر

سازمان مرکزی دانشگاه پیام نور، تهران

علی عبادیان

دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه ریاضی

نادر کنزی\*

سازمان مرکزی دانشگاه پیام نور، تهران

پذیرش ۹۷/۱۲/۱۱

دریافت ۹۶/۱۲/۱۳

### چکیده

فرض کنید  $A$  رده همه توابع تحلیلی و نرمال شده در قرص واحد باشد. برای هر تابع  $f$  از خانواده  $A$  ضرایب لگاریتمی

$\gamma_n$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

فرض کنید زیررده  $S_s^*$  از  $A$  بدین صورت تعریف شود:

$$S_s^* := \left\{ f \in A : \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) < \sin z \right\}$$

که در آن " $<$ " رابطه تبعیت است. هدف ما در این مقاله تخمین دقیق نامساوی‌ها شامل ضرایب لگاریتمی برای توابعی

است که به رده  $S_s^*$  تعلق دارند.

**واژه‌های کلیدی:** تابع تک‌ارز، ستاره‌واری، تبعیت، ضرایب لگاریتمی، ضرب پیچشی

### مقدمه

فرض کنید  $\Delta$  قرص واحد در صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  باشد، یعنی:

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

مجموعه همه توابع تحلیلی در قرص واحد را با  $H$  نشان می‌دهیم. هم‌چنین  $A$  را زیررده‌ای از  $H$  در نظر می‌گیریم که

اعضای آن در شرایط نرمال شده  $f(0) = 0 = f'(0) - 1$  صدق می‌کنند و به صورت (۱) است:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \quad (1)$$

فرض کنید تابع  $f$  به صورت (۱) باشد و تابع  $g$  بدین صورت تعریف شده باشد:

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

آنگاه ضرب پیچشی یا ادامارد<sup>۱</sup> دو تابع  $f$  و  $g$  بدین صورت تعریف می‌شود.

\*نویسنده مسئول n.kanzi@pnu.ac.ir

1. Hadamard

$$(f * g)(z) := z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

می‌گوییم تابع  $f$  در قرص واحد تک‌ارز<sup>۱</sup> است هرگاه برای هر  $z_1$  و  $z_2$  متعلق به قرص واحد از  $z_1 \neq z_2$  نتیجه شود  $f(z_1) \neq f(z_2)$ ، در واقع  $f$  یک‌به‌یک باشد. مجموعه همه توابع تک‌ارز در قرص واحد را با  $U$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $\Omega$  یک ناحیه در صفحه مختلط باشد. می‌گوییم  $\Omega$  نسبت به نقطه  $w_0$  ستاره‌وار است هرگاه برای هر  $w \in \Omega$ ، خطی که  $w$  را به  $w_0$  وصل می‌کند کاملاً در  $\Omega$  واقع شود. بنابراین  $f$  ستاره‌وار است هرگاه برد آن یک ناحیه ستاره‌وار باشد. مجموعه همه توابع ستاره‌وار در قرص واحد را با  $S^*$  نشان می‌دهیم. با به‌کارگیری قضیه معروف الکساندر<sup>۲</sup>،  $f$  را در قرص واحد  $\Delta$  محدب می‌گوییم هرگاه  $zf'(z)$  ستاره‌وار باشد. به‌صورت تحلیلی توابع ستاره‌وار و محدب بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$f \in S^* \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \quad (z \in \Delta)$$

و

$$f \in K \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left( 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \quad (z \in \Delta)$$

رده دیگری از توابع تحلیلی که مایل به یادآوری آن هستیم، رده توابع نزدیک‌به‌محدب نام دارد. می‌گوییم تابع  $f \in A$  نزدیک‌به‌محدب است، هرگاه یک تابع محدب مانند  $g$  موجود باشد به‌طوری‌که

$$\operatorname{Re} \left( \frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > 0 \quad (z \in \Delta)$$

این‌رده از توابع را کاپلان<sup>۳</sup> [۵] در سال ۱۹۵۲ معرفی کرد که معمولاً آن را با نماد  $C$  نشان می‌دهند. برای رده‌های معرفی‌شده بالا روابط شمول زیر برقرارند:

$$K \subset S^* \subset C \subset U \subset A \subset H$$

برای جزئیات بیش‌تر می‌توان به کتاب معروف دیورن، [۲] مراجعه کرد.

فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع تحلیلی در قرص واحد باشند. می‌گوییم تابع  $f$  از تابع  $g$  تبعیت می‌کند و می‌نویسیم  $f(z) < g(z)$  یا  $f < g$ ، هرگاه تابعی تحلیلی مانند  $\omega$  با شرایط:

$$\omega(0) = 0 \quad \text{و} \quad |\omega(z)| < 1 \quad (z \in \Delta)$$

موجود باشد به‌طوری‌که برای هر  $z \in \Delta$  این رابطه برقرار باشد:

$$f(z) = g(\omega(z)).$$

در حالت خاص اگر تابع  $g$  تک‌ارز باشد رابطه دو طرفه زیر را داریم:

$$f(z) < g(z) \Leftrightarrow (f(0) = g(0) \quad \text{و} \quad f(\Delta) \subset g(\Delta))$$

با استفاده از تعریف تبعیت و از این‌که تابع

$$h(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

در قرص واحد تک‌ارز است و هم‌چنین

1. Univalent  
2. Alexander  
3. Kaplan

$$h(\Delta) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{w\} > 0\}$$

از این‌رو، تعریف‌های معادل زیر را برای توابع ستاره‌وار و محدب داریم:

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} < \frac{1+z}{1-z} \quad (z \in \Delta)$$

و

$$f \in K \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \frac{1+z}{1-z} \quad (z \in \Delta)$$

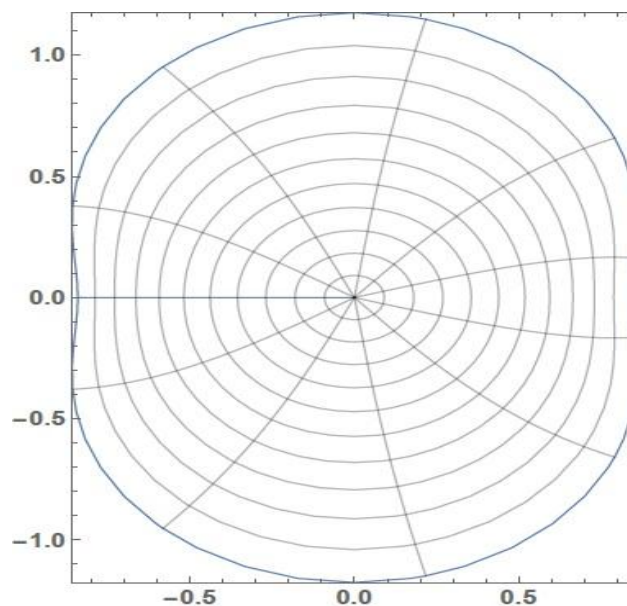
اولین بار تعریف رده توابع تحلیلی با استفاده از مفهوم تبعیت را ما<sup>۱</sup> و میندا<sup>۲</sup> معرفی کرد. اخیراً نیز پژوهش‌گران زیادی، رده‌های خاص و جالبی از توابع تحلیلی را با استفاده از مفهوم تبعیت معرفی کرده‌اند. برای مثال می‌توان به [۶]، [۷]، [۸]، [۹] مراجعه کرد.

هدف ما نیز در این مقاله معرفی یک زیررده خاص از توابع تحلیلی است که در ارتباط با ستاره‌واری و تابع  $\sin z$  است که در زیر به آن اشاره می‌کنیم.

**تعریف ۱.** می‌گوییم تابع  $f \in A$  به رده  $S_s^*$  تعلق دارد هرگاه در این رابطه تبعیت صدق کند:

$$\left( \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) < \sin z \quad (z \in \Delta)$$

ویژگی‌های هندسی  $\sin z$  می‌تواند نتایج جالبی را به ما بدهد. برای مثال برای هر  $z \in \Delta$  این تابع کران‌دار و نسبت به مبدأ مختصات ستاره‌وار است. برای درک بیشتر می‌توان به برد این تابع (شکل ۱) توجه کرد.



شکل ۱. تصویر قرص واحد تحت تابع  $\sin z$

از این‌رو، با توجه به این که تابع  $\sin z$  در قرص واحد تک‌ارز است و مقدار  $\sin z$  و  $1 - \frac{zf'(z)}{f(z)}$  در صفر برابر صفر است، از این‌رو، اگر  $f \in S_s^*$ ، آن‌گاه  $1 - \frac{zf'(z)}{f(z)}$  در ناحیه شکل ۱ قرار می‌گیرد. هم‌چنین داریم:

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$$

که در آن

$$\alpha_1 = 1 \text{ و } \alpha_3 = -\frac{1}{3!} \text{ و } \alpha_5 = \frac{1}{5!} \dots$$

و

$$\alpha_{2n} = 0.$$

انگیزه اصلی ما در این مقاله بررسی ضرایب لگاریتمی اعضای  $S_S^*$  است و عمده دلیل آن نیز اهمیت ضرایب لگاریتمی در نظریه توابع هندسی است. لازم به ذکر است که دوپرانژ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۵ با استفاده از مفهوم ضرایب لگاریتمی توانست حدس معروف بیبرباخ<sup>۲</sup> را ثابت کند [۱]. ضروری است در ادامه به توضیح مختصری از ضرایب لگاریتمی بپردازیم.

برای هر  $f \in A$ ، ضرایب لگاریتمی  $\gamma_n := \gamma_n(f)$  بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n \quad (z \in \Delta)$$

به دست آوردن ضرایب لگاریتمی یک تابع در حالت کلی کاری نسبتاً آسان است. به عنوان مثال، یکی از مهم‌ترین توابع در نظریه توابع هندسی تابع معروف کوبه<sup>۳</sup> است که بدین صورت تعریف شده است.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots$$

این تابع برای خیلی از مسائل یک تابع اکسترمال است که مهم‌ترین آن‌ها در حدس بیبرباخ است. این حدس بیان می‌کند برای هر تابع  $f \in U$  ضرایب آن در نامساوی  $|a_n| \leq n$  صدق می‌کنند و تساوی برای ضرایب تابع کوبه برقرار است. از این‌رو، داریم:

$$\log\left(\frac{k(z)}{z}\right) = -2 \log(1-z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n.$$

بنابراین ضرایب لگاریتمی تابع کوبه برابر است با:

$$\gamma_n(k) = \frac{1}{n}, \quad (n \geq 1).$$

سوالی که احتمالاً به ذهن خواننده خطور می‌کند این است که آیا رده‌ای از توابع تحلیلی وجود دارد که تساوی برای ضرایب لگاریتمی تابع کوبه برقرار باشد؟ جواب مثبت است. در واقع اگر  $f$  یک تابع ستاره‌وار باشد، آن‌گاه  $|\gamma_n(f)| \leq \frac{1}{n}$  و تساوی برای ضرایب لگاریتمی تابع کوبه رخ می‌دهد. اما برآورد ضرایب لگاریتمی برای رده توابع تک‌ارز  $U$  در حالت کلی برقرار نیست. در واقع اگر  $f$  تابعی تک‌ارز و به صورت (۱) باشد داریم:

$$\gamma_1 = \frac{a_2}{2} \text{ و } \gamma_2 = \frac{1}{2} \left( a_3 - \frac{a_2^2}{2} \right).$$

با استفاده از قضیه دوپرانژ (حدس بیبرباخ) و نامساوی فکته-ژگو<sup>۴</sup> [۳]، برآوردهای دقیق زیر را داریم:

1. De Branges  
2. Bieberbach  
3. Koebe  
4. Fekete-Szegő inequality

$$|\gamma_1| \leq 1 \text{ و } |\gamma_2| \leq \frac{1}{2}(1 + 2e^{-2}) \approx 0.635$$

برآورد دقیق  $\gamma_3$  از توابع تکارز به همین آسانی نیست و این یکی از مسائل باز و مهم در نظریه توابع هندسی است. البته در این زمینه نیز تلاش‌هایی نیز صورت گرفته که تاکنون بی‌نتیجه مانده است. لازم است به این موضوع نیز اشاره کنیم که ضرایب لگاریتمی توابع نزدیک به محدب در این نامساوی دقیق صدق می‌کنند:

$$|\gamma_n| \leq \frac{A \log n}{n}$$

که در آن  $A$  یک ثابت است. این برآورد دقیق به وسیله  $^1$  ثابت شده است [۱۵].

یکی دیگر از موضوعات مهم، نامساوی‌های دقیق شامل مجموع ضرایب لگاریتمی است. برای هر تابع تکارز  $f$  ضرایب لگاریتمی آن در این نامساوی صدق می‌کند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 \leq \frac{\pi^2}{6}$$

و تساوی برای تابع کوبه برقرار است. همچنین برای هر  $f \in U$  داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |\gamma_n|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2 - 12}{3}.$$

یکی دیگر از این نامساوی‌های مهم به قضیهٔ بازیلویچ  $^2$  معروف است که بیان می‌کند برای هر  $f \in U$  داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \gamma_n - \frac{1}{n} e^{-in\theta_0} \right|^2 \leq \frac{1}{2} \log \frac{1}{\kappa}$$

که در آن

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow 1^-} (1-r)^2 |f(r)| \quad (0 < r < 1)$$

ثابت هایمن  $^3$  است. درواقع همواره  $0 \leq \kappa \leq 1$  که  $\kappa = 1$  وقتی برقرار است که  $f$  دورانی از تابع کوبه باشد [۴].

لم زیر (منبع [14] را ببینید) به منظور اثبات نتایج اصلی مفید است.

لم ۲. فرض کنید  $F$  و  $G$  دو تابع تحلیلی و محدب تکارز در قرص واحد باشند. اگر  $f < F$  و  $g < G$ ، آن‌گاه

$$f * g < F * G$$

در بخش بعدی با استفاده از مفهوم تبعیت، ابتدا قضیه‌ای در رابطه با اعضای  $S_S^*$  می‌آوریم. سپس با استفاده از این قضیه نامساوی شامل مجموع ضرایب لگاریتمی را به دست می‌آوریم. در آخر ضرایب لگاریتمی اعضای  $S_S^*$  را تخمین می‌زنیم.

## نتایج اصلی

اولین نتیجه بدین صورت است.

قضیه ۳. فرض کنید  $f$  تابع تحلیلی و نرمال شده در قرص واحد  $\Delta$  باشد. اگر  $f \in S_S^*$ ، آن‌گاه

$$\log \left( \frac{f(z)}{z} \right) < \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \quad (z \in \Delta) \quad (2)$$

همچنین

1. Ye  
2. Bazilevich  
3. Hayman

$$\widehat{S}(z) := \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$$

محدب تکرارز است.

**اثبات:** فرض می‌کنیم  $f \in A$ . در این صورت تابع  $p(z) = \frac{f(z)}{z}$  در قرص واحد تحلیلی است و  $p(0) = 1$ . از این که  $f$  به  $S_S^*$  تعلق دارد داریم:

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 < \sin z \quad (z \in \Delta) \quad (3)$$

از طرفی، چون تابع  $\widehat{h}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  محدب تکرارز است ([12])، از این رو، برای هر تابع تحلیلی  $\psi$  این تساوی برقرار است:

$$\psi(z) * \widehat{h}(z) = \int_0^z \frac{\psi(t)}{t} dt.$$

بنابراین با استفاده از لم ۲ و رابطه (۳) داریم:

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} * \widehat{h}(z) < \sin z * \widehat{h}(z),$$

یا به‌طور هم ارز

$$\int_0^z \frac{p'(t)}{p(t)} dt < \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt.$$

و این رابطه تبعیت (۲) را نتیجه می‌دهد.

تحدب و تکرارزی  $\widehat{S}(z)$  ساده است. در واقع چون  $\sin z$  و  $\widehat{h}(z)$  محدب و تکرارز هستند با استفاده از حدس پولیا – شوئنبرگ<sup>۱</sup> (این حدس در سال ۱۹۷۳ به وسیله راشوویه و شیل – اسمال<sup>۲</sup> ثابت شد، [۱۳]) حکم به دست می‌آید. این حدس بیان می‌کند که توابع محدب تکرارز تحت ضرب پیچشی پایا هستند. چون  $\widehat{S}(z)$  محدب تکرارز است از این رو، می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد. **نتیجه ۴.** اگر  $f \in S_S^*$  باشد، آنگاه:

$$\frac{f(z)}{z} < \exp \widehat{S}(z).$$

در ادامه با به کارگیری قضیه ۴ به برآورد دقیق مجموع مربعات ضرایب لگاریتمی اعضای  $S_S^*$  می‌پردازیم.

**قضیه ۵.** فرض کنید ضرایب لگاریتمی تابع  $f$  متعلق به رده  $S_S^*$  باشد. نامساوی دقیق برقرار است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 \leq \frac{1}{2} (J_0(2) + I_0(2)) - \frac{5}{4}, \quad (4)$$

که

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^n}{(n!)^2},$$

تابع بسل اصلاح شده<sup>۳</sup> نوع اول و

1. Polya-Schoenberg conjecture  
2. Ruscheweyh and Sheil-Small  
3. Modified Bessel

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^n}{(n!)^2},$$

تابع بسل نوع اول است.

اثبات: از قضیه ۴ استفاده می‌کنیم. چون  $f$  متعلق به رده  $S_S^*$  است از این‌رو،

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) < \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt.$$

با جای‌گذاری سری تیلور در رابطه تبعیت اخیر داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\gamma_n z^n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} z^n.$$

حال با به‌کارگیری نامساوی روجوسینسکی<sup>۱</sup> [۱۰]، و رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned} 4 \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |\alpha_n|^2 \\ &= |\alpha_1|^2 + \frac{1}{3^2} |\alpha_3|^2 + \frac{1}{5^2} |\alpha_5|^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n+1)(2n+1)!} \right)^2 \\ &= 2(J_0(2) + I_0(2)) - 5. \end{aligned}$$

که  $I_0(2)$  و  $J_0(2)$  در بالا تعریف شده‌اند. بنابراین نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. با یک محاسبه ساده می‌توان نشان

داد تساوی در نامساوی (۴) برای ضرایب لگاریتمی تابع

$$F(z) = z \exp \hat{S}(z).$$

برقرار است.

قضیه ۶. فرض کنید  $f \in S_S^*$ . آن‌گاه ضرایب لگاریتمی تابع  $f$  در این نامساوی دقیق صدق می‌کنند:

$$|\gamma_n| \leq \frac{1}{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

اثبات: فرض کنیم تابع  $f$  به رده توابع  $S_S^*$  تعلق داشته باشد. از این‌رو، با استفاده از تعریف ۱ داریم:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 < \sin z$$

یا به‌طور هم‌ارز

$$z \left( \log \frac{f(z)}{z} \right)' < \sin z$$

با جای‌گذاری بسط تیلور در رابطه تبعیت اخیر داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n\gamma_n z^n < \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$$

حال با استفاده از قضیه روجوسینسکی<sup>۲</sup> برای توابع محدب داریم:

1. Rogosinski  
2. Rogosinski

$$2n|\gamma_n| \leq |\alpha_1| = 1.$$

بنابراین

$$|\gamma_n| \leq \frac{1}{2n}.$$

در این جا اثبات به پایان می‌رسد.

## منابع

1. De Branges L., "A proof of the Bieberbach conjecture", Acta Math. 154 (1985) 137-152.
2. Duren P.L., "Univalent functions", Springer-Verlag (1983).
3. Fekete M., Szego G., "Eine Bemerkung uber ungerade schlichte Funktionen", J. London Math. Soc. 8 (1933) 85-89.
4. Hayman W. K., "The asymptotic behaviour of p-valent functions", Proc. London Math. Soc. 5(1955) 257-284.
5. Kaplan W., "Close-to-convex schlicht functions", Michigan Math. J. 1(1952) 169-185.
6. Kargar R., Ebadian A., Sokol J., "On Booth lemniscate and starlike functions", Anal. Math. Phys. (2017). <https://doi.org/10.1007/s13324-017-0187-3>.
7. Kargar R., Ebadian A., Sokol J., "On subordination of some analytic functions", Sib. Math. J. 57(2016) 599-605.
8. Kargar R., Ebadian A., Sokol J., "Radius problems for some subclasses of analytic functions", Complex Anal. Oper. Theory 11(2017) 1639-1649.
9. Kuroki K., Owa S., "Notes on new class for certain analytic functions", RIMS Kokyuroku Kyoto Univ. 1772(2011) 21-25.
10. Rogosinski W., "On the coefficients of subordinate functions", Proc. London Math. Soc. 48(1943) 48-82.
11. Ruscheweyh St., "Convolution in Geometric Function Theory", Les Presses de l'Univ. de Montreal (1982).
12. Ruscheweyh St., "New criteria for univalent functions", Proc. Amer. Math. Soc. 49(1975) 109-115.
13. Ruscheweyh St., Sheil-Small T., "Hadamard product of schlicht functions and the Poyla-Schoenberg conjecture", Comm. Math. Helv. 48(1973) 119-135.
14. Ruscheweyh St., Stankiewicz J., "Subordination under convex univalent function", Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33(1985) 499-502.
15. Ye Z., "The logarithmic coefficients of close-to-convex functions", Bull. Instit. Math. Acad. Sin. (New Series) 3(2008) 445-452.