تخمین دقیق ضرایب لگاریتمی رده‌ای خاص از توابع تحلیلی

رحیم کارگر
سازمان مرکزی دانشگاه پیام نور، تهران
علی عبادیان
دانشگاه ارومیه. دانشکدهٔ علوم. گروه ریاضی
نادر کنزی*
سازمان مرکزی دانشگاه پیام نور، تهران

دریافت ۹۶/۱۲/۱۳ پذیرش ۹۷/۱۲/۱۱

چکیده

فرض‌کنید A ردهٔ همهٔ توابع تحلیلی و نرمال‌شده در قرص واحد باشد. برای هر تابع f از خانوادهٔ A ضرایب لگاریتمی γ_n به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

فرض‌کنید زیرردهٔ S_s^* از A بدین‌صورت تعریف شود:

$$S_s^* := \left\{ f \in A : \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) \prec sinz \right\}$$

که در آن "$\prec$" رابطهٔ تبعیت است. هدف ما در این مقاله تخمین دقیق نامساوی‌ها شامل ضرایب لگاریتمی برای توابعی است که به ردهٔ S_s^* تعلق دارند.

واژه‌های کلیدی: تابع تک‌ارز، ستاره‌واری، تبعیت، ضرایب لگاریتمی، ضرب پیچشی

مقدمه

فرض کنید Δ قرص واحد در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ باشد، یعنی:

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}.$$

مجموعهٔ همهٔ توابع تحلیلی در قرص واحد را با H نشان می‌دهیم. هم‌چنین A را زیررده‌ای از H درنظر می‌گیریم که اعضای آن در شرایط نرمال‌شدهٔ $f(0) = 0 = f'(0) - 1$ صدق می‌کنند و به‌صورت (۱) است:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \tag{۱}$$

فرض‌کنید تابع f به‌صورت (۱) باشد و تابع g بدین‌صورت تعریف شده‌باشد:

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

آن‌گاه ضرب پیچشی یا ادامارد[1] دو تابع f و g بدین‌صورت تعریف می‌شود.

*نویسنده مسئول n.kanzi@pnu.ac.ir

1. Hadamard

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.6.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.441]

$$(f*g)(z) := z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

می‌گوییم تابع f در قرص واحد تک‌ارز[1] است هرگاه برای هر z_2 و z_1 متعلق به قرص‌واحد از $z_1 \neq z_2$ نتیجه‌شود $f(z_1) \neq f(z_2)$، در واقع f یک‌به‌یک باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع تک‌ارز در قرص واحد را با U نشان می‌دهیم. فرض کنید Ω یک ناحیه در صفحهٔ مختلط باشد. می‌گوییم Ω نسبت به نقطهٔ w_0 ستاره‌وار است هرگاه برای هر $w \in \Omega$، خطی که w را به w_0 وصل می‌کند کاملاً در Ω واقع شود. بنابراین f ستاره‌وار است هرگاه برد آن یک ناحیهٔ ستاره‌وار باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع ستاره‌وار در قرص واحد را با S^* نشان می‌دهیم. با به‌کارگیری قضیهٔ معروف الکساندر[2]، f را در قرص واحد Δ محدب گوییم هرگاه $zf'(z)$ ستاره‌وار باشد. به‌صورت تحلیلی توابع ستاره‌وار و محدب بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$f \in S^* \Leftrightarrow Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \Delta)$$

و

$$f \in K \Leftrightarrow Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \Delta)$$

ردهٔ دیگری از توابع تحلیلی که مایل به یادآوری آن هستیم، ردهٔ توابع نزدیک‌به‌محدب نام دارد. گوییم تابع $f \in A$ نزدیک‌به‌محدب است، هرگاه یک تابع محدب مانند g موجود باشد به‌طوری‌که

$$Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \Delta)$$

این‌رده از توابع را کاپلان[3] [۵] در سال ۱۹۵۲ معرفی‌کرد که معمولاً آن را با نماد C نشان می‌دهند. برای رده‌های معرفی‌شدهٔ بالا روابط شمول زیر برقرارند:

$$\mathrm{K} \subset S^* \subset \mathrm{C} \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{H}$$

برای جزئیات بیش‌تر می‌توان به کتاب معروف دیورن، [۲] مراجعه کرد.

فرض‌کنید f و g دو تابع تحلیلی در قرص واحد باشند. می‌گوییم تابع f از تابع g تبعیت می‌کند و می‌نویسیم $f \prec g$ یا $f(z) \prec g(z)$، هرگاه تابعی تحلیلی مانند ω با شرایط:

$$\omega(0) = 0 \quad \text{و} \quad |\omega(z)| < 1 \qquad (z \in \Delta)$$

موجودباشد به‌طوری‌که برای هر $z \in \Delta$ این رابطه برقرار باشد:

$$f(z) = g\big(\omega(z)\big).$$

در حالت خاص اگر تابع g تک‌ارز باشد رابطهٔ دو طرفهٔ زیر را داریم:

$$f(z) \prec g(z) \Leftrightarrow \big(f(0) = g(0) \quad \text{و} \quad f(\Delta) \subset g(\Delta)\big)$$

با استفاده از تعریف تبعیت و از این‌که تابع

$$h(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

در قرص واحد تک‌ارز است و هم‌چنین

1. Univalent
2. Alexander
3. Kaplan

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.6.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.441]

$$h(\Delta) = \{w \in \mathbb{C} : Re\,\{w\} > 0\}$$

از این‌رو، تعریف‌های معادل زیر را برای توابع ستاره‌وار و محدب داریم:

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z} \qquad (z \in \Delta)$$

و

$$f \in K \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+z}{1-z} \qquad (z \in \Delta)$$

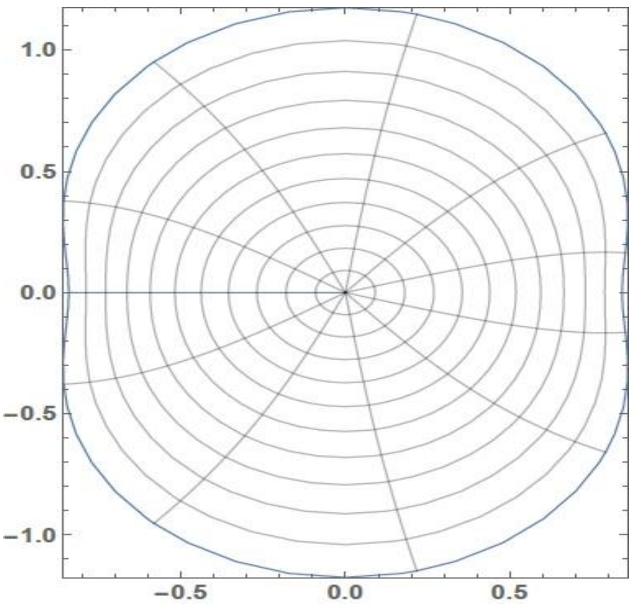
اولین بار تعریف ردهٔ توابع تحلیلی با استفاده از مفهوم تبعیت را ما[1] و میندا[2] معرفی کرد. اخیراً نیز پژوهش‌گران زیادی، رده‌های خاص و جالبی از توابع تحلیلی را با استفاده از مفهوم تبعیت معرفی‌کرده‌اند. برای مثال می‌توان به [۶]، [۷]، [۸]، [۹] مراجعه کرد.

هدف ما نیز در این مقاله معرفی یک زیرردهٔ خاص از توابع تحلیلی است که در ارتباط با ستاره‌واری و تابع $sinz$ است که در زیر به آن اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱. می‌گوییم تابع $f \in A$ به ردهٔ S_S^* تعلق دارد هرگاه در این رابطهٔ تبعیت صدق‌کند:

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) \prec sinz \qquad (z \in \Delta)$$

ویژگی‌های هندسی $sinz$ می‌تواند نتایج جالبی را به ما بدهد. برای مثال برای هر $z \in \Delta$ این تابع کران‌دار و نسبت به مبدأ مختصات ستاره‌وار است. برای درک بیش‌تر می‌توان به برد این تابع (شکل ۱) توجه کرد.



شکل ۱. تصویر قرص واحد تحت تابع $sinz$

از این‌رو، با توجه به این‌که تابع $sinz$ در قرص واحد تک‌ارز است و مقدار $sinz$ و $\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1$ در صفر برابر صفر است، از این‌رو، اگر $f \in S_S^*$، آن‌گاه $\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1$ در ناحیهٔ شکل۱ قرار می‌گیرد. هم‌چنین داریم:

1 Ma
2 Minda

$$sinz = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$$

که در آن

$$\alpha_1 = 1 \text{ و } \alpha_3 = -\frac{1}{3!} \text{ و } \alpha_5 = \frac{1}{5!} \dots \text{ و}$$

و

$$\alpha_{2n} = 0.$$

انگیزهٔ اصلی ما در این مقاله بررسی ضرایب لگاریتمی اعضای S_S^* است و عمده دلیل آن نیز اهمیت ضرایب لگاریتمی در نظریهٔ توابع هندسی است. لازم به‌ذکر است که دوبرانژ[1] در سال ۱۹۸۵ با استفاده از مفهوم ضرایب لگاریتمی توانست حدس معروف بیبرباخ[2] را ثابت کند [۱]. ضروری است در ادامه به توضیح مختصری از ضرایب لگاریتمی بپردازیم.

برای هر $f \in A$، ضرایب لگاریتمی $\gamma_n := \gamma_n(f)$ بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n \qquad (z \in \Delta)$$

به‌دست‌آوردن ضرایب لگاریتمی یک تابع در حالت کلی کاری نسبتاً آسان است. به‌عنوان مثال، یکی از مهم‌ترین توابع در نظریهٔ توابع هندسی تابع معروف کوبه[3] است که بدین‌صورت تعریف شده‌است.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots$$

این تابع برای خیلی از مسائل یک تابع اکسترمال است که مهم‌ترین آن‌ها در حدس بیبرباخ است. این حدس بیان می‌کند برای هر تابع $f \in U$ ضرایب آن در نامساوی $|a_n| \le n$ صدق می‌کنند و تساوی برای ضرایب تابع کوبه برقرار است. از این‌رو، داریم:

$$\log\left(\frac{k(z)}{z}\right) = -2\log(1-z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n.$$

بنابراین ضرایب لگاریتمی تابع کوبه برابر است با:

$$\gamma_n(k) = \frac{1}{n}, \qquad (n \ge 1).$$

سوالی که احتمالاً به ذهن خواننده خطور می‌کند این است که آیا رده‌ای از توابع تحلیلی وجود دارد که تساوی برای ضرایب لگاریتمی تابع کوبه برقرارباشد؟ جواب مثبت است. در واقع اگر f یک تابع ستاره‌وار باشد، آن‌گاه $|\gamma_n(f)| \le \frac{1}{n}$ و تساوی برای ضرایب لگاریتمی تابع کوبه رخ می‌دهد. اما برآورد ضرایب لگاریتمی برای ردهٔ توابع تک‌ارز U در حالت کلی برقرار نیست. در واقع اگر f تابعی تک‌ارز و به‌صورت (۱) باشد داریم:

$$\gamma_1 = \frac{a_2}{2} \quad \text{و} \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(a_3 - \frac{a_2^2}{2}\right).$$

با استفاده از قضیهٔ دوبرانژ (حدس بیبرباخ) و نامساوی فکته–ژگو[4] [۳]، برآوردهای دقیق زیر را داریم:

1. De Branges
2. Bieberbach
3. Koebe
4. Fekete-Szego inequality

$$|\gamma_1| \le 1 \quad \text{و} \quad |\gamma_2| \le \frac{1}{2}(1+2e^{-2}) \approx 0/635$$

برآورد دقیق γ_3 از توابع تک‌ارز به‌همین آسانی نیست و این یکی از مسائل باز و مهم در نظریهٔ توابع هندسی است. البته در این زمینه نیز تلاش‌هایی نیز صورت‌گرفته که تاکنون بی‌نتیجه مانده است. لازم‌است به این موضوع نیز اشاره کنیم که ضرایب لگاریتمی توابع نزدیک به محدب در این نامساوی دقیق صدق‌می‌کنند:

$$|\gamma_n| \le \frac{A\, Log\, n}{n}$$

که در آن A یک ثابت است. این برآورد دقیق به‌وسیلهٔ یه[1] ثابت شده است [۱۵].

یکی دیگر از موضوعات مهم، نامساوی‌های دقیق شامل مجموع ضرایب لگاریتمی است. برای هر تابع تک‌ارز f ضرایب لگاریتمی آن در این نامساوی صدق می‌کند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 \le \frac{\pi^2}{6}$$

و تساوی برای تابع کوبه برقرار است. هم‌چنین برای هر $f \in U$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |\gamma_n|^2 \le 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2 - 12}{3}.$$

یکی دیگر از این نامساوی‌های مهم به قضیهٔ بازیلویچ[2] معروف است که بیان می‌کند برای هر $f \in U$ داریم:

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} n \left|\gamma_n - \frac{1}{n} e^{-in\theta_0}\right|^2 \le \frac{1}{2} \log \frac{1}{\kappa}$$

که در آن

$$\kappa = \lim_{r \to 1^-} (1-r)^2 |f(r)| \qquad (0 < r < 1)$$

ثابت هایمن[3] است. درواقع همواره $0 \le \kappa \le 1$ که $\kappa = 1$ وقتی برقرار است که f دورانی از تابع کوبه باشد [۴].

لم زیر (منبع [14] را ببینید) به منظور اثبات نتایج اصلی مفید است.

لم ۲. فرض کنید F و G دو تابع تحلیلی و محدب تک‌ارز در قرص واحد باشند. اگر $f \prec F$ و $g \prec G$، آن‌گاه

$$f * g \prec F * G$$

در بخش بعدی با استفاده از مفهوم تبعیت، ابتدا قضیه‌ای در رابطهٔ با اعضای S_S^* می‌آوریم. سپس با استفاد از این قضیه نامساوی شامل مجموع ضرایب لگاریتمی را به‌دست می‌آوریم. در آخر ضرایب لگاریتمی اعضای S_S^* را تخمین می‌زنیم.

نتایج اصلی

اولین نتیجه بدین‌صورت است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید f تابع تحلیلی و نرمال‌شده در قرص واحد Δ باشد. اگر $f \in \mathrm{S}_S^*$، آن‌گاه

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) \prec \int_0^z \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad (z \in \Delta) \tag{۲}$$

هم‌چنین

1. Ye
2. Bazilevich
3. Hayman

$$\widehat{S}\,(z) := \int_0^z \frac{\sin t}{t}\, dt$$

محدب تک‌ارز است.

اثبات: فرض می‌کنیم $f \in A$. در این صورت تابع $p(z) = \frac{f(z)}{z}$ در قرص واحد تحلیلی است و $p\,(0) = 1$. از این‌که f به $\mathrm{S}_{\mathrm{S}}^*$ تعلق دارد داریم:

$$\frac{zp'(z)}{p(\mathrm{z})} = \frac{zf'(z)}{f(\mathrm{z})} - 1 \prec \sin z \qquad (z \in \Delta) \tag{۳}$$

از طرفی، چون تابع $\hat{h}(\mathrm{z}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{z}^n}{n}$ محدب تک‌ارز است ([12])، ازاین‌رو، برای هر تابع تحلیلی ψ این تساوی برقرار است:

$$\psi(z) * \hat{h}(\mathrm{z}) = \int_0^z \frac{\psi(t)}{t}\, dt.$$

بنابراین با استفاده از لم ۲ و رابطهٔ (۳) داریم:

$$\frac{zp'(z)}{p(\mathrm{z})} * \hat{h}(\mathrm{z}) \prec \sin z * \hat{h}(\mathrm{z}),$$

یا به‌طور هم ارز

$$\int_0^z \frac{p'(t)}{p\,(t)}\, dt \prec \int_0^z \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

و این رابطه تبعیت (۲) را نتیجه می‌دهد.

تحدب و تک‌ارزی $\widehat{S}\,(z)$ ساده است. در واقع چون $\sin z$ و $\hat{h}(\mathrm{z})$ محدب و تک‌ارز هستند با استفاده از حدس پولیا – شوئنبرگ[1] (این حدس در سال ۱۹۷۳ به‌وسیلهٔ راشوویه و شیل– اسمال[2] ثابت شد، [۱۳]) حکم به‌دست می‌آید. این حدس بیان می‌کند که توابع محدب تک‌ارز تحت ضرب پیچشی پایا هستند.

چون $\widehat{S}\,(z)$ محدب تک‌ارز است از این‌رو، می‌توان نتیجهٔ زیر را به‌دست‌آورد.

نتیجهٔ ۴. اگر $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{S}}^*$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{f(z)}{z} \prec \exp \widehat{S}\,(z).$$

در ادامه با به‌کارگیری قضیهٔ ۴ به برآورد دقیق مجموع مربعات ضرایب لگاریتمی اعضای $\mathrm{S}_{\mathrm{S}}^*$ می‌پردازیم.

قضیهٔ ۵. فرض‌کنید γ_n ضرایب لگاریتمی تابع f متعلق به ردهٔ $\mathrm{S}_{\mathrm{S}}^*$ باشد. نامساوی دقیق برقرار است.

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 \le \frac{1}{2}\left(J_0(2) + I_0(2)\right) - \frac{5}{4}, \tag{۴}$$

که

$$I_0(z) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\mathrm{z}^2\right)^{\mathrm{n}}}{(\mathrm{n}!)^2},$$

تابع بسل اصلاح شده[3] نوع اول و

1. Polya-Schoenberg conjecture
2. Ruscheweyh and Sheil-Small
3. Modified Bessel

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.6.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.441]

$$J_0(z)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\left(\frac{1}{4}\mathrm{z}^2\right)^{\mathrm{n}}}{(\mathrm{n}!)^2},$$

تابع بسل نوع اول است.

اثبات: از قضیهٔ ۴ استفاده می‌کنیم. چون f متعلق به ردهٔ $\mathrm{S}_{\mathrm{s}}^*$ است از این‌رو،

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)\prec\int_0^{\mathrm{z}}\frac{\sin \mathrm{t}}{\mathrm{t}}\,dt.$$

با جای‌گذاری سری تیلور در رابطهٔ تبعیت اخیر داریم:

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}2\gamma_n\,\mathrm{z}^n\prec\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}z^{\mathrm{n}}.$$

حال با به‌کارگیری نامساوی روجوسینسکی[1] [۱۰]، و رابطهٔ اخیر داریم:

$$\begin{aligned}4\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\gamma_n|^2&\le\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^2}|\alpha_n|^2\\&=|\alpha_1|^2+\frac{1}{3^2}\,|\alpha_3|^2+\frac{1}{5^2}\,|\alpha_5|^2+\cdots\\&=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}+1)!}\right)^2\\&=2\,(J_0(2)+I_0(2))-5.\end{aligned}$$

که $I_0(2)$ و $J_0(2)$ در بالا تعریف شده‌اند. بنابراین نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. با یک محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد تساوی در نامساوی (۴) برای ضرایب لگاریتمی تابع

$$F(z)=z\exp\hat{S}(\mathrm{z}).$$

برقرار است.

قضیهٔ ۶. فرض‌کنید $f\in S_s^*$. آن‌گاه ضرایب لگاریتمی تابع f در این نامساوی دقیق صدق می‌کنند:

$$|\gamma_n|\le\frac{1}{2n}\qquad(n=1,2,3,\dots)$$

اثبات: فرض‌کنیم تابع f به ردهٔ توابع $\mathrm{S}_{\mathrm{s}}^*$ تعلق داشته باشد. از این‌رو، با استفاده از تعریف ۱ داریم:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\prec\sin z$$

یا به‌طور هم‌ارز

$$z\left(\log\frac{f(z)}{z}\right)'\prec\sin z$$

با جای‌گذاری بسط تیلور در رابطهٔ تبعیت اخیر داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2n\gamma_n\,z^n\prec\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,z^n$$

حال با استفاده از قضیهٔ روجوسینسکی[2] برای توابع محدب داریم:

1. Rogosinski
2. Rogosinski

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.6.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.441]

$$2n|\gamma_n| \leq |\alpha_1| = 1.$$

بنابراین

$$|\gamma_n| \leq \frac{1}{2n}.$$

در این‌جا اثبات به‌پایان می‌رسد.

منابع

1. De Branges L., "A proof of the Bieberbach conjecture", Acta Math. 154 (1985) 137-152.
2. Duren P.L., "Univalent functions", Springer-Verlag (1983).
3. Fekete M., Szego G., "Eine Bemerkung uber ungerade schlichte Funktionen", J. London Math. Soc. 8 (1933) 85-89.
4. Hayman W. K., "The asymptotic behaviour of p-valent functions", Proc. London Math. Soc. 5(1955) 257-284.
5. Kaplan W., "Close-to-convex schlicht functions", Michigan Math. J. 1(1952) 169-185.
6. Kargar R., Ebadian A., Sokol J., "On Booth lemnicsate and starlike functions", Anal. Math. Phys. (2017). https://doi.org/10.1007/s13324-017-0187-3.
7. Kargar R., Ebadian A., Sokol J., "On subordination of some analytic functions", Sib. Math. J. 57(2016) 599-605.
8. Kargar R., Ebadian A., Sokol J., "Radius problems for some subclasses of analytic functions", Complex Anal. Oper. Theory 11(2017) 1639-1649.
9. Kuroki K., Owa S., "Notes on new class for certain analytic functions", RIMS Kokyuroku Kyoto Univ. 1772(2011) 21-25.
10. Rogosinski W., "On the coefficients of subordinate functions", Proc. London Math. Soc. 48(1943) 48-82.
11. Ruscheweyh St., "Convolution in Geometric Function Theory", Les Presses de l'Univ. de Montreal (1982).
12. Ruscheweyh St., "New criteria for univalent functions", Proc. Amer. Math. Soc. 49(1975) 109-115.
13. Ruscheweyh St., Sheil-Small T., "Hadamard product of schlicht functions and the Poyla-Schoenberg conjecture", Comm. Math. Helv.48(1973) 119-135.
14. Ruscheweyh St., Stankiewicz J., "Subordination under convex univalent function", Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33(1985) 499-502.
15. Ye Z., "The logarithmic coefficients of close-to-convex functions", Bull. Instit. Math. Acad. Sin. (New Series) 3(2008) 445-452.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.6.9]

[DOI: 10.52547/mmr.6.3.441]