(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

وجود جواب‌های دستگاه‌های نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا روی فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$

حجت‌اله امیری کیوانلو، مهناز خانه‌گیر، رضا الهیاری*
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۱۲/۲۸ پذیرش ۹۸/۰۸/۱۳

چکیده

در این مقاله فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ را معرفی می‌کنیم و یک اندازه نافشردگی را روی آن تعریف می‌کنیم. برای اعتبار و کاربرد قضایای پیشنهادی، در بخش کاربرد این مقاله با ارائه یک قضیه به‌وجود جواب یک دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا می‌پردازیم و با استفاده از تکنیک اندازه نافشردگی به همراه قضیهٔ نقطه ثابت داربو وجود این جواب را در این فضا تضمین می‌کنیم. در انتها با ارائه مثال‌هایی کارایی و کاربرد این قضیه را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: اندازه‌های نافشردگی، فضای فرشه، قضیهٔ نقطه ثابت داربو، دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال ولترا.

مقدمه

اندازه‌های نافشردگی ابزارهای مفیدی در نظریه معادلات عملگری در فضاهای باناخ و فرشه هستند. هم‌چنین در نظریهٔ معادلات تابعی که شامل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال، معادلات انتگرال دیفرانسیلی و نظریه کنترل بهینه هستند، کاربرد دارند. اندازه‌های نافشردگی و قضیهٔ نقطه ثابت داربو نقش مهمی را در نظریهٔ نقطه ثابت و کاربردهای آن ایفا می‌کنند. اولین اندازه نافشردگی به‌وسیلهٔ کاراتووسکی (۱۹۳۰) [۵] تعریف و بررسی شد. در سال ۱۹۵۵ داربو به‌کمک اندازه نافشردگی قضیه‌ای را ارائه کرد که وجود نقاط ثابت را درعملگرهای تراکمی تضمین می‌کرد [۳]. نظریه دستگاه‌های نامتناهی از معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل شاخه‌ای مهم از آنالیز غیرخطی هستد. اندازهٔ نافشردگی برای وجود جواب معادلات انتگرال غیرخطی، معادلات دیفرانسیل معمولی و دستگاه‌های متناهی و نامتناهی از معادلات دیفرانسیل به‌وسیلهٔ محققان مختلفی به‌کار گرفته شده است (به‌طور مثال [۷]، [۸]، [۹]، [۱۳]، [۱۵] را ببینید). هم‌چنین آنها کاربردهای بسیار در مسائل جهان حقیقی ما از جمله مهندسی مکانیک، نظریه فرایندهای انشعاب و نظریه شبکه‌های عصبی دارند ([۴]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۴] را ببینید). فرض کنید $\mathbb{R}^\infty$ فضای-خطی از تمام دنباله‌های حقیقی باشد. اخیراً اولزوی [۹]، [۱۰] فضای فرشه جدیدی را تحت عنوان $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\infty)$ (فضای تمام توابع پیوسته روی $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ با مقادیری در $\mathbb{R}^\infty$) بیان و خصوصیات آن را بررسی کرده است و یک اندازهٔ نافشردگی روی این فضا تعریف کرده است. سپس با کمک قضیهٔ نقطه ثابت داربو به حل دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال پرداخته است. هم‌چنین لطیفا و همکارانش [۶] حل‌پذیری معادلات انتگرال تابعی را در فضای فرشه $C(\Omega)$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^N)$ بررسی کرده و با تعریف خانواده‌ای از اندازه‌های نافشردگی به حل دستگاهی از معادلات انتگرال در این فضا پرداخته‌اند.

*نویسنده مسئول rezaallahyari@mshdiau.ac.ir

در این مقاله یک اندازه نافشردگی روی فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ معرفی می‌کنیم و باکمک آن وجود جواب برای یک دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا را بررسی می‌کنیم و در انتها با ارائه دو مثال کارایی و کاربرد این قضیه را نشان می‌دهیم.

نمادگذاری و مطالب پایه‌ای

در این بخش، بعضی از مفاهیم و نمادهای مورد نیاز بخش‌های بعدی را بیان می‌کنیم. فرض کنید $(E, \|.\|)$ یک فضای باناخ حقیقی باشد، برای $\varnothing \neq X \subset E$، مجموعهٔ $\overline{X}$ و $ConvX$ را به‌ترتیب بستار و غلاف محدب X می‌نامیم.

علاوه بر این، $\mathfrak{M}_E$ را خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی و کران دار E و $\mathfrak{N}_E$ را زیر خانواده شامل همهٔ زیرمجموعه‌های به‌طور نسبی فشرده E در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱. [۲]. نگاشت $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ را اندازهٔ نافشردگی در E نامیم هرگاه در این شرایط صدق کند:

۱. *خانواده* $\ker \mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ *ناتهی باشد و* $\ker \mu \subseteq \mathfrak{N}_E$ ،

۲. اگر $X \subset Y$ آنگاه $\mu(X) \le \mu(Y)$،

۳. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$،

۴. $\mu(ConvX) = \mu(X)$ ،

۵. به‌ازای هر $\lambda \in [0,1]$ این رابطه برقرار باشد:

$$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y),$$

۶. اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته از $\mathfrak{M}_E$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n = 1,2,\cdots$ $X_{n+1} \subset X_n$ و $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$، آن‌گاه $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \varnothing$.

زیرخانواده $\ker \mu$ که در (۱)تعریف شده بیان‌گر هسته اندازهٔ نافشردگی است و چون برای هر n،

$$\mu(X_\infty) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n) \le \mu(X_n)$$

پس $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n) = 0$ و بنابراین $X_\infty \in \ker \mu$.

هم‌چنین μ را اندازهٔ نافشردگی منظم می‌نامیم هرگاه علاوه بر شرایط (۱) الی (۶) داشته باشیم

۷. $\mu(X \bigcup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$،

۸. $\mu(X + Y) \le \mu(X) + \mu(Y)$،

۹. به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\mu(\lambda X) = |\lambda| \mu(X),$$

۱۰. $\ker \mu = \mathfrak{N}_E$.

قضیهٔ ۲. (قضیهٔ نقطه ثابت داربو) [**۲**]، *فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ E باشد و μ یک اندازهٔ نافشردگی روی E باشد. هم‌چنین $F : C \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد به‌طوری‌که ثابت $k \in [0,1)$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:*

$$\mu(FX) \le k\,\mu(X), \qquad \forall X \subset C$$

در این صورت F یک نقطه ثابت دارد.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.1.9]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.237]

قضیهٔ ۳. (قضیهٔ نقطه ثابت تیخونوف) [۱]، فرض کنید E فضای توپولوژیکی خطی موضعاً محدب هاسدورف باشد و C یک زیرمجموعهٔ ناتهی محدب از E و $F: C \to E$ یک نگاشت پیوسته باشد به‌طوری‌که در این نامساوی صدق کند:

$$F(C) \subseteq A \subseteq C,$$

که درآن A فشرده است. آن‌گاه تابع F حداقل یک نقطه ثابت دارد.

تعریف ۴. [۱۶]، فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. در این صورت گوییم:

الف) X یک F- فضا ست اگر توپولوژی آن به‌وسیلهٔ یک متر پایای کامل القا شده باشد.

ب) X یک فضای فرشه است اگر X یک F- فضای به‌طور موضعی محدب باشد.

مثال ۵. فرض کنید برای هر $i \in \mathbb{N}$، E_i فضای باناخ باشد. در این صورت فضای حاصل‌ضرب $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$ با متر تعریف شده به‌وسیلهٔ $d(x,y) = \sup\{\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} : i \in \mathbb{N}\}$ که درآن $x=(x_1,x_2,\ldots), y=(y_1,y_2,\ldots) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$ یک فضای فرشه است.

اکنون فرض کنید $T>0$ ثابت باشد. هم‌چنین فرض کنید $C([0,T]^N)$ فضای باناخ شامل تمام توابع حقیقی پیوسته تعریف شده روی $[0,T]^N$ همراه با نرم $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [0,T]^N\}$ باشد. می‌دانیم زیرمجموعهٔ ناتهی X از $C([0,T]^N)$ کراندار است اگر $M>0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $f \in X$ داشته باشیم $\|f\|_\infty \leq M$.

یادآوری ۶. هر مجموعهٔ کراندار در $\mathbb{R}^N$ به‌طور نسبی فشرده است.

تعریف ۷. فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ ناتهی و کراندار از $C([0,T]^N)$ باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ و هر $\varepsilon > 0$ تعریف می‌کنیم

$$\omega_0^T(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t)-x(s)|, t,s \in [0,T]^N, max\{|t_i - s_i|, i=1,2,\ldots,N\} \leq \varepsilon\},$$

که درآن $t=(t_1,t_2,\ldots,t_N), s=(s_1,s_2,\ldots,s_N)$.

$$\omega_0^T(X,\varepsilon) = \sup\{\omega_0^T(x,\varepsilon), \quad x \in X\}, \quad \omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\omega_0^T(X,\varepsilon).$$

در این صورت ω_0^T بنا به [۹] یک اندازهٔ نافشردگی منظم در فضای $C([0,T]^N)$ است.

یادآوری ۸. [۹]، فرض کنید $\mathbb{R}^\infty$ به متر زیر مجهز شده باشد.

$$d_{\mathbb{R}^\infty}(a,b) = sup\{\frac{1}{2^i}\frac{|a_i - b_i|}{(1+|a_i - b_i|)} : i \in \mathbb{N}\},$$

که درآن $a=(a_i), b=(b_i) \in \mathbb{R}^\infty$. در این صورت فضای $\mathbb{R}^\infty$ یک فضای فرشه است. برای هر دنباله $a=(a_i) \in \mathbb{R}^\infty$ قرار می‌دهیم $\pi_i(a) = a_i$. اکنون فضای $C([0,T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ شامل تمام توابع پیوسته روی $[0,T]^N$ با مقادیری در $\mathbb{R}^\infty$ را در نظر بگیرید. برای هر $x=(x_i(t_1,\ldots,t_N)) \in C([0,T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ قرار می‌دهیم $\pi_i(x) = x_i$، واضح است که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $\pi_i(x) \in C([0,T]^N)$.

هم‌چنین اگر $X \subset C([0,T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $\pi_i(X) = \{\pi_i(x) : x \in X\}$.

فضای $C([0,T]^N, \mathbb{R}^\infty)$ مجهز به متر زیر است.

$$d_{C_T}(x,y) = sup\{d_{\mathbb{R}^\infty}(x(t_1,\ldots,t_N), y(t_1,\ldots,t_N)) : t=(t_1,\ldots,t_N) \in [0,T]^N\},$$

وقتی که $x,y \in C([0,T]^N, \mathbb{R}^\infty)$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.1.9]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.237]

نتایج اصلی

در این بخش به معرفی فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ و توصیف برخی از خواص آن می‌پردازیم. سپس یک اندازهٔ نافشردگی روی این فضا معرفی می‌کنیم و با کمک آن یک قضیهٔ نقطه ثابت را بیان می‌کنیم. نتایج مورد نظر تعمیمی از مطالب ارائه شده در [۹] هستند و از این‌رو، از ذکر جزئیات آن صرفنظر می‌کنیم.

فرض کنید $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ فضای تمام توابع پیوسته تعریف شده روی $\mathbb{R}_+^N$ با مقادیری در $\mathbb{R}^\infty$ باشند. این فضا مجهز به خانواده‌ای از نیم نرمها بدین‌صورت است:

$$|x|^T=\sup\{|\pi_i(x)(t)|: i\le T,\ t\in[0,T]^N\},$$

وقتی $T\in\mathbb{N}$. هم‌چنین این فضا با متر تعریف شده بدین‌صورت است:

$$d_c(x,y)=\sup\{\frac{1}{2^T}\frac{|x-y|^T}{(1+|x-y|^T)}:T\in\mathbb{N}\}$$

وقتی که $x,y\in C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$، یک فضای فرشه است.

همگرایی و به‌طور نسبی فشردگی در $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ با شرایط زیر مشخص‌سازی می‌شوند.

۱. دنبالهٔ (x_n) همگرابه x در $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ است اگر و فقط اگر برای هر $i\in\mathbb{N}$ و هر $T>0$ $\pi_i(x_n)$ به‌طور یکنواخت همگرا به $\pi_i(x)$ روی $[0,T]^N$ باشد.

۲. زیرمجموعهٔ $X\subset C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ به‌طور نسبی فشرده است اگر و فقط اگر برای هر $i\in\mathbb{N}$ و هر $T>0$ مجموعه توابع $\pi_i(X)$ هم‌پیوسته و به‌طور یکنواخت کراندار روی $[0,T]^N$ باشد.

هم‌چنین برای هر $T>0$ می‌توان‌نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}d_{C_T}(x_n,x)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}d_C(x_n,x)=0.$$

تعریف ۹. زیرمجموعهٔ ناتهی $Z\subset\mathbb{R}^\infty$ کراندار نامیده می‌شود اگر برای هر $i=1,2,\ldots$

$$\sup\{|\pi_i(z)|: z\in Z\}<\infty.$$

زیرمجموعهٔ Y از $\mathbb{R}_+^N\times\mathbb{R}^\infty$ کراندار نامیده می‌شود اگر Y مشمول در مجموعه‌ای به‌صورت $[0,T]^N\times Z$ باشد که $T>0$ و Z در $\mathbb{R}^\infty$ کراندار است. زیرمجموعهٔ ناتهی $X\subset C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ کراندار نامیده می‌شود اگر برای هر $i\in\mathbb{N}$ و هر $T>0$، مجموعه توابع $\pi_i(X)$ به‌طور یکنواخت کراندار روی $[0,T]^N$ باشد، یعنی

$$sup\{|\pi_i(x)(t)|: t=(t_1,\ldots,t_N)\in[0,T]^N, x\in X\}<\infty.$$

در ادامه فرض کنید $\mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)}$ خانوادهٔ همه زیرمجموعه‌های ناتهی و کراندار در $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ و هم‌چنین $\mathfrak{N}_{C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)}$ زیرخانواده‌ای از زیر مجموعه‌های ناتهی و به‌طور نسبی فشرده از $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ باشد. اندازه نافشردگی منظم ϖ_0 در فضای $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید $p_i:\mathbb{R}_+^N\to(0,\infty)$ دنباله‌ای از توابع باشد. برای هر $X\in\mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)}$ قرار می‌دهیم:

$$\varpi_0^T(X)=\sup\{p_i(T,\ldots,T)\omega_0^T(\pi_i(X)): i\in\mathbb{N}\},$$
$$\varpi_0(X)=\sup\{\varpi_0^T(X): T>0\}.$$

در قضیهٔ ۱۰ خواص اساسی ϖ_0 را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰. [۹]، نگاشت $\varpi_0:\mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)}\to[0,\infty]$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. $\varpi_0(X)=0$ اگر و فقط اگر X زیرمجموعهٔ به‌طور نسبی فشرده از $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ باشد،

۲. اگر $X\subset Y$ آن‌گاه $\varpi_0(X)\le\varpi_0(Y)$،

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.1.9]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.237]

۳. $\varpi_0(X) = \varpi_0(Conv X) = \varpi_0(\overline{X})$،

۴. برای هر $\lambda \in [0,1]$ داریم

$$\varpi_0(\lambda X + (1-\lambda)) \le \lambda \varpi_0(X) + (1-\lambda)\varpi_0(Y),$$

۵. اگر (X_n) دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته از $\mathfrak{M}_{C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n = 1, 2, ...$ $X_{n+1} \subset X_n$ و $\lim_{n\to\infty} \varpi_0(X_n) = 0$ آن‌گاه اشتراک $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ ناتهی است،

۶. برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\varpi_0(\lambda X) = |\lambda| \varpi_0(X)$،

۷. $\varpi_0(X + Y) \le \varpi_0(X) + \varpi_0(Y)$،

۸. $\varpi_0(X \bigcup Y) \le max\{\varpi_0(X), \varpi_0(Y)\}$.

توجه کنید که اندازه نافشردگی ϖ_0 روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ ممکن است مقدار ∞ را بپذیرد.

در زیر نوع دیگری از قضیهٔ نقطه ثابت داربو روی فضای فرشه $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ را بیان و اثبات می‌کنیم .

قضیهٔ ۱۱. فرض کنید C یک زیرمجموعهٔ ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ باشد و $\varpi_0(C) < \infty$. هم‌چنین فرض کنید $F: C \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد و عدد ثابت $q \in [0,1)$ موجود باشد به‌طوری که برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی X از C داشته باشیم

$$\varpi_0(FX) \le q \varpi_0(X), \tag{۱}$$

در این صورت F یک نقطه ثابت در مجموعه C دارد.

اثبات: فرض کنید $C_0 = C$، دنبالهٔ $\{C_n\}$ را طوری می‌سازیم که برای هر $n \ge 0$، $C_{n+1} = Conv(FC_n)$. هم‌چنین داریم

$$C_1 = Conv(FC_0) \subseteq C = C_0. \quad FC_0 = FC \subseteq C = C_0,$$

با ادامه روند مذکور داریم:

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq ... .$$

اگر عدد طبیعی $N \ge 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varpi_0(C_N) = 0$ آن‌گاه C_N به‌طور نسبی فشرده است. بنابراین از قضیهٔ تیخونوف نتیجه می‌شود که F یک نقطه ثابت دارد. درغیر این صورت فرض می‌کنیم برای هر عدد صحیح $m \ge 0$، $\varpi_0(C_m) \ne 0$، بنابراین با استفاده از رابطهٔ (۱) داریم

$$\varpi_0(C_{m+1}) = \varpi_0(Conv(FC_m)) = \varpi_0(FC_m) \le q \varpi_0(C_m). \tag{۲}$$

چون $q \in [0,1)$ بنابراین $\{\varpi_0(C_m)\}$ یک‌دنبالهٔ کاهشی و مثبت از اعداد حقیقی است. از این‌رو، $r \ge 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\varpi_0(C_m) \to r$ وقتی $m \to \infty$. حال ادعا می‌کنیم $r = 0$. به برهان خلف فرض می‌کنیم $r > 0$. با استفاده از رابطهٔ (۲) داریم:

$$\lim_{m\to\infty} \sup \varpi_0(C_{m+1}) \le \lim_{m\to\infty} \sup\ q \varpi_0(C_m).$$

بنابراین $q \ge 1$ که با فرض $q \in [0,1)$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و از این‌رو، $r = 0$ و $\varpi_0(C_m) \to 0$ وقتی که $m \to \infty$.

چون دنبالهٔ $\{C_m\}$تو در تو است از این‌رو، با استفاده از شرط (۵) تعریف اندازهٔ نافشردگی نتیجه می‌گیریم که $C_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m \ne \varnothing$، بسته، محدب و $C_\infty \subset C$ است. هم‌چنین C_∞، تحت نگاشت F پایا است. اکنون از قضیه تیخونوف نتیجه می‌شود که F دارای نقطه ثابت در C است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.1.9]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.237]

کاربرد دستگاه‌های نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی ازنوع ولترا

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه اندازهٔ نافشردگی تعریف شده روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ در بخش قبل، می‌تواند در حل‌پذیری دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا کاربرد داشته باشد.

فرض کنید $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^N}$ خانواده همهٔ زیرمجموعه‌های کراندار از $\mathbb{R}^N$ باشد. اکنون دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال (۴) را در نظر بگیرید.

$$u_i(t)=f_i\Big(t,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots)),\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),\dots))dy\Big). \qquad (۴)$$

که در آن برای هر $i\in\mathbb{N}$، $f_i:\mathbb{R}_+^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $g_i:\mathbb{R}_+^N\times\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$، $h_i:\mathbb{R}_+^N\times\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+^N}\Lambda(t)\times\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ و $\Lambda:\mathbb{R}_+^N\to\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^N}$ توابعی پیوسته هستند.

تعریف ۱۲. نگاشت $\Lambda:\mathbb{R}_+^N\to\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^N}$ پیوسته نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $t,s\in\mathbb{R}_+^N$ داشته باشیم

$$\max\{|t_i-s_i|,i=1,2,\dots\}<\delta\Rightarrow\mu(\Lambda(t)\Delta\Lambda(s))<\varepsilon,$$

که در آن μ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^N$ است و Δ تفاضل متقارن در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^N$ است.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنید این فرضیات برقرار باشد.

۱. تابع $\Lambda:\mathbb{R}_+^N\to\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^N}$ پیوسته است و برای هر $T>0$ مجموعه $\bigcup_{t\in[0,T]^N}\Lambda(t)$ کراندار است.

۲. برای هر $i\in\mathbb{N}$، نگاشت $f_i:\mathbb{R}_+^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است و برای هر $T>0$ خانواده توابع $\{f_i(t,y,z)\}_{(y,z)\in B_1\times B_2}$ (B_1,B_2 زیرمجموعه‌های کرانداری از $\mathbb{R}$ هستند) روی $N-$حجره‌های $[0,T]^N$ هم‌پیوسته است. به‌علاوه توابع نامنفی $a_i,b_i:\mathbb{R}_+^N\to\mathbb{R}_+$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $y,z,y_1,z_1\in\mathbb{R}$ و $t\in\mathbb{R}_+^N$ این رابطه برقرار باشد:

$$|f_i(t,y,z)-f_i(t,y_1,z_1)|\le a_i(t)|y-y_1|+b_i(t)|z-z_1|.$$

۳. برای هر $i\in\mathbb{N}$، نگاشت $g_i:\mathbb{R}_+^N\times\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ پیوسته است و برای هر $T>0$، خانواده توابع $\{g_i(t,u)\}_{t\in[0,T]^N}$ روی زیرمجموعهٔ کراندار $Z\subseteq\mathbb{R}^\infty$ هم‌پیوسته است. هم‌چنین برای هر $i\in\mathbb{N}$، خانواده توابع $\{g_i(t,u)\}_{u\in Z}$روی $N-$حجره‌های $[0,T]^N$ برای هر زیرمجموعهٔ کراندار $Z\subseteq\mathbb{R}^\infty$ هم‌پیوسته است. به‌علاوه برای هر $i\in\mathbb{N}$ تابع $d_i:\mathbb{R}_+^N\to\mathbb{R}_+$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $t\in\mathbb{R}_+^N$ و هر $u_i,v_i\in\mathbb{R}$ این رابطه برقرار است:

$$|g_i(t,(u_1,u_2,\dots))-g_i(t,(v_1,v_2,\dots))|\le d_i(t)|u_i-v_i|.$$

۴. برای هر $i\in\mathbb{N}$، نگاشت $h_i:\mathbb{R}_+^N\times\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+^N}\Lambda(t)\times\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ پیوسته است. فرض کنید Z زیرمجموعهٔ کراندار دلخواهی از $\mathbb{R}^\infty$ باشد. هم‌چنین فرض کنید برای هر $i\in\mathbb{N}$ و هر $T>0$، خانواده توابع $\{h_i(t,y,u)\}_{(y,u)\in\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+^N}\Lambda(t)}\times Z}$ روی $N-$حجره‌های $[0,T]^N$ هم‌پیوسته و خانواده توابع $\{h_i(t,y,u)\}_{(t,y)\in\mathbb{R}_+^N\times\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+^N}\Lambda(t)}}$ روی Z هم‌پیوسته باشند. به‌علاوه تابع پیوسته $c_i:\mathbb{R}_+^N\to\mathbb{R}_+$ $(i\in\mathbb{N})$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Big|\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),\dots))dy\Big|\le c_i(t),$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.1.9]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.237]

که در آن $t\in\mathbb{R}_+^N$ و $\xi:\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+^N}\Lambda(t)\to\mathbb{R}_+^N$ تابعی پیوسته است.

۵. برای هر $t\in\mathbb{R}_+^N$ و هر $i\in\mathbb{N}$ داریم $a_i(t)d_i(t)<1$.

در این صورت سیستم نامتناهی معادلات انتگرال (۴) دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ است.

اثبات: ابتدا عملگر F را روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ با این ضابطه تعریف می‌کنیم:

$$Fu(t)=(\pi_i(Fu)(t))=(f_i(t,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots)),\int_{\Lambda(t)}h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),\dots))dy).$$

اکنون نشان می‌دهیم برای $i=1,2,\dots$ توابع $r_i:\mathbb{R}_+^N\to(0,\infty)$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $t=(t_1,\dots,t_N)\in\mathbb{R}_+^N$ و $u\in C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ اگر $|\pi_i(u)(t)|\le r_i(t)$ آن‌گاه $|\pi_i(Fu)(t)|\le r_i(t)$. برای این منظور با استفاده از خواص (۱) الی (۵) داریم:

$$\begin{aligned}|\pi_i(Fu)(t)|&=|f_i(t,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots)),\int_{\Lambda(t)}h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),\dots))dy)|\\
&\le|f_i(t,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots)),\int_{\Lambda(t)}h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),\dots))dy)-f_i(t,0,0)|+|f_i(t,0,0)|\\
&\le a_i(t)|g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots))|+b_i(t)|\int_{\Lambda(t)}h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),\dots))dy|+|f_i(t,0,0)|\\
&\le a_i(t)(|g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots))-g_i(t,(0,0,\dots))|+|g_i(t,(0,0,\dots))|)+b_i(t)c_i(t)+|f_i(t,0,0)|\\
&\le a_i(t)(d_i(t)|u_i(t)|+|g_i(t,(0,0,\dots))|)+b_i(t)c_i(t)+|f_i(t,0,0)|.\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$r_i(t)=\frac{a_i(t)|g_i(t,0,0,\dots)|+b_i(t)c_i(t)+|f_i(t,0,0)|}{1-a_i(t)d_i(t)}.$$

زیرمجموعهٔ Q از فضای $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ شامل تمام توابع $u(t)=(u_i(t_1,t_2,\dots,t_N))$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$Q=\{u\in C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty),\ |u_i(t)|\le r_i(t),\ \forall i\in\mathbb{N}\}.$$

به‌آسانی بررسی می‌شود که زیرمجموعهٔ Q ناتهی، بسته، کراندار و محدب از فضای $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ است.

به‌علاوه تعریف $r_i(t)$ ایجاب می‌کند که Q تحت F پایا است از این‌رو، $F:Q\to Q$.

اکنون نشان دهیم که تابع F یک عملگر پیوسته است. برای این منظور فرض کنید $u,u_n\in Q\ (n\in\mathbb{N})$ و $t\in[0,T]^N$ باشد به‌طوری‌که $\pi_i u_n(t)\to\pi_i u(t)$ ($i=1,2,\dots$) در $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ همگرا باشد.

باید نشان دهیم:

$$|\pi_i(Fu_n)(t)-\pi_i(Fu)(t)|\to 0.$$

برای این منظور، با به‌کارگیری فرضیات (۲) الی (۴) داریم

$$\begin{aligned}|\pi_i(Fu_n)(t)-\pi_i(Fu)(t)|&=|f_i(t,g_i(t,(u_{n,1}(t),u_{n,2}(t),\dots)),\int_{\Lambda(t)}h_i(t,y,(u_{n,1}(\xi(y)),u_{n,2}(\xi(y)),\dots))dy)\\
&-f_i(t,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots)),\int_{\Lambda(t)}h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),\dots))dy)|\\
&\le a_i(t)|g_i(t,(u_{n,1}(t),u_{n,2}(t),\dots))-g_i(t,(u_1(t),u_2(t),\dots))|\\
&+b_i(t)|\int_{\Lambda(t)}h_i(t,y,(u_{n,1}(\xi(y)),u_{n,2}(\xi(y)),\dots))dy)\end{aligned}$$

$$.-\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|$$

در نتیجه به‌کمک شرط‌های (۳) و (۴) داریم

$$|\pi_i(Fu_n)(t)-\pi_i(Fu)(t)|$$
$$\leq \sup_{t\in[0,T]^N} a_i(t)|g_i(t,(u_{n,1}(t),u_{n,2}(t),...))-g_i(t,(u_1(t),u_2(t),...))|$$
$$+\sup_{t\in[0,T]^N} b_i(t)|\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_{n,1}(\xi(y)),u_{n,2}(\xi(y)),...))dy)-\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|$$
$$\leq \overline{a_i}^T\,\upsilon_0^T(g_i,\sup_{t\in[0,T]^N}|u_{n,i}(t)-u_i(t)|)+\overline{b_i}^T\,\upsilon_0^T(h_i,\sup_{t\in[0,T]_T^N}|u_{n,i}(t)-u_i(t)|)\Lambda^T$$

که $[0,T]_T^N$ تصویر تابع پیوسته ξ روی مجموعه $\overline{\bigcup_{t\in[0,T]^N}\Lambda(t)}$ است که در $\mathbb{R}^N$ بسته و کراندار است. و در روابط اخیر داریم:

$$\overline{a_i}^T=\sup\{a_i(t),t\in[0,T]^N\},\ \overline{b_i}^T=\sup\{b_i(t),t\in[0,T]^N\},\ \Lambda^T=\sup\{\mu(\Lambda(t)),t\in[0,T]^N\},$$
$$\upsilon_0^T(g_i,\varepsilon)=\sup\{|g_i(t,u)-g_i(t,v)|,t\in[0,T]^N,u=(u_i),v=(v_i),|u_i|\leq r_i(T),|v_i|\leq r_i(T),d_{\mathbb{R}^\infty}(u,v)<\varepsilon\},$$
$$\upsilon_0^T(h_i,\varepsilon)=\sup\{|h_i(t,y,u)-h_i(t,y,v)|,t\in[0,T]^N,u=(u_i),v=(v_i),y\in\overline{\bigcup_{t\in[0,T]^N}\Lambda(t)},d_{\mathbb{R}^\infty}(u,v)<\varepsilon\}.$$

با استفاده از مفروضات (۳) و (۴) و چون خانواده توابع $\{g_i(t,u)\}_{t\in[0,T]^N}$ و $\{h_i(t,y,u)\}_{(t,y)\in\mathbb{R}_+^N\times\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+^N}\Lambda(t)}}$ برای $i=1,2,...$ هم‌پیوسته هستند، بنابراین داریم $\upsilon_0^T(h_i,\varepsilon)\to 0,\ \upsilon_0^T(g_i,\varepsilon)\to 0$ موقعی که $\varepsilon\to 0$. در نتیجه داریم:

$$|\pi_i(Fu_n)(t)-\pi_i(Fu)(t)|\to 0.$$

وقتی $n\to\infty$. از این‌رو عملگر F پیوسته است. در انتها شرایط قضیهٔ ۱۱ را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ ناتهی و کراندار از Q باشد. برای هر $\varepsilon>0$ و $t,s\in[0,T]^N$ که $t=(t_1,...,t_N)$ و $s=(s_1,...,s_N)$ با شرط $\max\{|t_i-s_i|,i=1,2,...,N\}<\varepsilon$ و $u\in X$ داریم:

$$|\pi_i(Fu)(t)-\pi_i(Fu)(s)|=|f_i(t,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),...)),\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)$$
$$-f_i(s,g_i(s,(u_1(s),u_2(s),...)),\int_{\Lambda(s)} h_i(s,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|.$$

حال با افزودن و کاستن عبارت‌های مناسب و به‌کار بردن فرضیات (۲) الی (۴) مسئله می‌توان نوشت:

$$|\pi_i(Fu)(t)-\pi_i(Fu)(s)|\leq|f_i(t,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),...)),\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)$$
$$-f_i(s,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),...)),\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|$$
$$+|f_i(s,g_i(t,(u_1(t),u_2(t),...)),\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)$$
$$-f_i(s,g_i(s,(u_1(t),u_2(t),...)),\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|$$
$$+|f_i(s,g_i(s,(u_1(t),u_2(t),...)),\int_{\Lambda(t)} h_i(t,y,(u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)$$

$$-f_i(s, g_i(s,(u_1(s),u_2(s),...)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|$$
$$+|f_i(s, g_i(s,(u_1(s),u_2(s),...)), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)$$
$$-f_i(s, g_i(s,(u_1(s),u_2(s),...)), \int_{\Lambda(s)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|$$
$$+|f_i(s, g_i(s,(u_1(s),u_2(s),...)), \int_{\Lambda(s)} h_i(t, y, (u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)$$
$$-f_i(s, g_i(s,(u_1(s),u_2(s),...)), \int_{\Lambda(s)} h_i(s, y, (u_1(\xi(y)),u_2(\xi(y)),...))dy)|.$$

در نتیجه با به‌کارگیری شرایط (۲) الی (۴) داریم:

$$|\pi_i(Fu)(t)-\pi_i(Fu)(s)| \le \upsilon_0^{\,T}(f_i,\varepsilon)+\overline{a_i}^{T}\eta^T(g_i,\varepsilon)$$
$$+d_i^T\,\overline{a_i}^{T}\,\omega_0^T(u_i,\varepsilon)+\overline{b_i}^{T}\,\overline{h_i}^{T}\,\mu(\Lambda(t)\Delta\Lambda(s))+\Lambda^T\,\overline{b_i}^{T}\,\upsilon_0^T(h_i,\varepsilon)$$

که در روابط اخیر داریم

$$\Lambda^T = sup\{\mu(\Lambda(t)), t \in [0,T]^N\},\ \overline{h_i}^{T} = sup\{|h_i(t,y,u)|,\ t\in[0,T]^N, y \in \overline{\bigcup_{t\in[0,T]^N}\Lambda(t)}\},$$
$$\eta^T(g_i,\varepsilon)=\sup\{|g_i(t,u)-g_i(s,u)|: t,s\in[0,T]^N, max\{|t_j-s_j|, j=1,2,...,N\}<\varepsilon, u=(u_i), |u_i|\le r_i(T)\},$$
$$\upsilon_0^T(f_i,\varepsilon)=sup\{|f_i(t,y,z)-f_i(s,y,z)|, t,s\in[0,T]^N, max\{|t_j-s_j|, j=1,2,...,N\}<\varepsilon, |y|\le \overline{g}^{T}, |z|\le \overline{h}^{T}\Lambda^T\},$$
$$d_i^T = \sup\{d_i(t), t\in[0,T]^N\},\quad \overline{g}^{T} = sup\{|g_i(t,u)|, t\in[0,T]^N, u\in Z\subseteq\mathbb{R}^\infty\},$$

که Z زیرمجموعهٔ فشرده از $\mathbb{R}^\infty$ است و بنابراین $\upsilon_0^T(f_i,\varepsilon)\to 0, \upsilon_0^T(h_i,\varepsilon)\to 0$ موقعی‌که $\varepsilon\to 0$. از طرفی چون خانواده توابع $\{g_i(t,u)\}_{u\in Z}$ روی $N-$حجره‌های $[0,T]^N$ برای هر زیرمجموعهٔ کراندار $Z\subseteq\mathbb{R}^\infty$ هم‌پیوسته است بنابراین $\eta^T(g_i,\varepsilon)\to 0$ موقعی‌که $\varepsilon\to 0$. هم‌چنین چون Λ پیوسته است پس $\mu(\Lambda(t)\Delta\Lambda(s))\to 0$ وقتی که $\varepsilon\to 0$ و برای $t,s\in[0,T]^N$ با $max\{|t_j-s_j|, j=1,2,...,N\}<\delta$.

در نتیجه داریم:

$$\omega_0^T(\pi_i(Fu)) \le d_i^T\,\overline{a_i}^{T}\,\omega_0^T(\pi_i(u)).$$

اکنون با در نظر گرفتن $p_i(T,...,T)=(r_i(T))^{-1}$ داریم:

$$\frac{1}{r_i(T)}\omega_0^T(\pi_i(Fu)) \le \frac{d_i^T\,\overline{a_i}^{T}}{r_i(T)}\omega_0^T(\pi_i(u)).$$

بنابراین با استفاده از شرط (۵) داریم

$$\varpi_0^T(FX) \le q\,\varpi_0^T(X).$$

در نهایت نتیجه می‌شودکه

$$\varpi_0(FX) \le q\,\varpi_0(X).$$

که در آن $q=\sup\{d_i^T\,\overline{a_i}^{T} : i\in\mathbb{N}\}<1$.

علاوه براین با استفاده از تعریف اندازهٔ نافشردگی روی فضای $C(\mathbb{R}_+^N, \mathbb{R}^\infty)$ داریم

$$\omega_0^T(\pi_i(u),\varepsilon) \le 2r_i(T)$$

وقتی $u\in Q$. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r_i(T)}\omega_0^T(\pi_i(u),\varepsilon)\le 2 \Rightarrow \varpi_0(Q)\le 2.$$

سرانجام تمام شرایط قضیهٔ ۱۱ برقرار است. بنابراین معادله انتگرال نامتناهی از نوع ولترا (۴) دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{R}_+^N,\mathbb{R}^\infty)$ است.

مثال ۱۴. دستگاه نامتناهی معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$$u_i(t)=\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{(t+7)j^5}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(u_i(t))}{\sqrt{5}(2j-1)^2}\right)+\int_0^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(t+y)\cos(u_i(y))}{3j(j+1)}dy. \tag{۵}$$

دستگاه معادله انتگرال (۵) حالت خاصی از معادله انتگرال (۴) است که در آن

$$\Lambda(t)=(0,t),\ \ \xi(t)=t,\ f_i(t,y,z)=\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{(t+7)j^5}+y+z,$$

$$g_i(t,u)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(u_i)}{\sqrt{5}(2j-1)^2}\right),\ \ h_i(t,y,u)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(t+y)\cos(u_i)}{3j(j+1)},$$

وقتی که، $u=(u_i)\in\mathbb{R}^\infty$. واضح است که برای $t\in(0,\infty), y,z,y_1,z_1\in\mathbb{R}$ ، شرط (۲) قضیهٔ ۱۳ به‌ازای $a_i(t)=b_i(t)=1$ برای $i=1,2,..$ برقرار است.

$$|f_i(t,y,z)-f_i(t,y_1,z_1)|\le|y-y_1|+|z-z_1|.$$

هم‌چنین با قراردادن $d_i(t)=\frac{\pi^2}{8\sqrt{5}}$ برای $i=1,2,..$ شرط (۳) قضیهٔ ۱۳ نیز برقرار است.

$$|g_i(t,u)-g_i(t,v)|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(u_i)}{\sqrt{5}(2j-1)^2}\right)-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(v_i)}{\sqrt{5}(2j-1)^2}\right)\right|$$
$$\le\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}(2j-1)^2}|\sin(u_i)-\sin(v_i)|\le\frac{\pi^2}{8\sqrt{5}}|u_i-v_i|.$$

که $v=(v_i),u=(u_i)\in\mathbb{R}^\infty$.

سرانجام شرط (۴) قضیهٔ ۱۳ را بدین‌صورت بررسی می‌کنیم:

$$\left|\int_0^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(t+y)\cos(u_i(y))}{3j(j+1)}dy\right|\le\int_0^t\frac{t+y}{3}dy=\frac{1}{2}t^2=c_i(t).$$

هم‌چنین به‌طور بدیهی شرط (۵) قضیهٔ ۱۳ برای $i=1,2,..$ برقرار است.

$$a_i(t)d_i(t)=1\times\frac{\pi^2}{8\sqrt{5}}<1.$$

بنابراین تمام شرایط قضیهٔ ۱۳ برقرار است. در نتیجه معادلهٔ انتگرال (۵) دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^\infty)$ است.

مثال ۱۵. دستگاه نامتناهی معادلهٔ انتگرال (۶) را در نظر بگیرید.

$$u_i(t_1,t_2)=\sum_{j=1}^{i}\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^3}}{(4+e^{t_1+t_2})j^{\frac{3}{2}}}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(\frac{1}{6j^2})\cos(u_i(t_1,t_2))}{1+|\sin(\cos t_1)|}\right)+\frac{1}{6}Ln(1+|\arctan(u_i(t_1,t_2))|)$$
$$+\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\frac{t_1t_2y_1^2y_2}{1+t_1^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(u_i(y_1,y_2))}{j(j+1)(j+2)}\tanh(u_i(y_1,y_2))dy_1dy_2. \tag{۶}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.2.1.9]
[DOI: 10.52547/mmr.7.2.237]

دستگاه معادلهٔ انتگرال (۶) حالت خاصی از معادلهٔ انتگرال (۴) است که در آن

$$\Lambda(t_1,t_2)=(0,t_1)\times(0,t_2),\ \xi(t_1,t_2)=(t_1,t_2), f_i((t_1,t_2),y,z)=\sum_{j=1}^{i}\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^3}}{(4+e^{t_1+t_2})j^{\frac{3}{2}}}+y+z,$$

$$g_i((t_1,t_2),u)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(\frac{1}{6j^2})\cos(u_i)}{1+|\sin(\cos t_1)|}\right)+\frac{1}{6}Ln(1+|\arctan(u_i)|),$$

$$h_i((t_1,t_2),(y_1,y_2),u)=\frac{t_1t_2y_1^2y_2}{1+t_1^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(u_i)}{j(j+1)(j+2)}\tanh(u_i),$$

وقتی که، $u=(u_i)\in\mathbb{R}^\infty$ و برای هر $y,z,y_1,z_1\in\mathbb{R}$ ، $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2$ شرط (۲) قضیهٔ ۱۳ به‌ازای $a_i(t_1,t_2)=1$ و $b_i(t_1,t_2)=1$ برای $i=1,2,...$ برقرار است. به‌علاوه داریم:

$$|f_i((t_1,t_2),y,z)-f_i((t_1,t_2),y_1,z_1)|\le|y-y_1|+|z-z_1|.$$

با در نظر گرفتن $d_i(t_1,t_2)=\frac{\pi^2+6}{36}$ برای هر $i=1,2,...$ شرط (۳) قضیهٔ ۱۳نیز برقرار است.

$$\begin{aligned}
&|g_i((t_1,t_2),u)-g_i((t_1,t_2),v)|\le\\
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(\frac{1}{6j^2})(\cos(u_i)-\cos(v_i))}{1+|\sin(\cos t_1)|}\right)\right|+\frac{1}{6}\left|Ln\left(\frac{1+|\arctan u_i|}{1+|\arctan v_i|}\right)\right|\\
&\le\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{6j^2})(\cos(u_i)-\cos(v_i))\right|+\frac{1}{6}\left|Ln\left(1+\frac{|\arctan u_i|-|\arctan v_i|}{1+|\arctan v_i|}\right)\right|\\
&\le\frac{\pi^2}{36}|\cos(u_i)-\cos(v_i)|+\frac{1}{6}|Ln(1+|\arctan u_i-\arctan v_i|)|\\
&\qquad\le\frac{\pi^2}{36}|u_i-v_i|+\frac{1}{6}|u_i-v_i|=\frac{\pi^2+6}{36}|u_i-v_i|
\end{aligned}$$

که در آن $v=(v_i),u=(u_i)\in\mathbb{R}^\infty$. در انتها شرط (۴) قضیهٔ ۱۳ را بدین‌صورت بررسی می‌کنیم.

$$\left|\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\frac{(t_1t_2)y_1^2y_2}{1+t_1^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(u_i(y_1,y_2))}{j(j+1)(j+2)}\tanh(u_i(y_1,y_2))dy_1dy_2\right|\le\frac{t_1^4t_2^3}{24(1+t_1^2)}.$$

که درآن $c_i(t_1,t_2)=\frac{t_1^4t_2^3}{24(1+t_1^2)}$. هم‌چنین شرط (۵) قضیهٔ ۱۳ برای $i=1,2,..$ بدین‌صورت برقرار است:

$$a_i(t_1,t_2)d_i(t_1,t_2)=1\times\frac{\pi^2+6}{36}<1.$$

در نتیجه تمام شرایط قضیهٔ ۱۳ برقرار است. بنابراین معادلهٔ انتگرال (۶) دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R}^\infty)$ است.

منابع

1. Agarwal R. P., Meehan M., O'Regan D., "Fixed Point Theory and Applications", Cambridge university press, Vol. 141 (2001).
2. Banas J., Goebel K., "Measures of noncompactness in Banach spaces", Lecture Notes in Pure and Applied Math. Vol. 60, Dekker, NewYork (1980).

3. Darbo G., "Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto", Rend. Sem. Mat. Uni. Padova, 24 (1955) 84-92.
4. Deimling K., "Ordinary differential equations in Banach spaces", Lecture Notes in Math., Vol. 596, Springer Verlag, Berlin (1977).
5. Kuratowski K., "Sur les espaces complets", Fund. Math. 15 (1930) 301-309.
6. Latefa B., Dejebali S., "Solvability of functional integral equations in the Frechet space $C(\Omega)$ ", Mediter. J. Math. (2016).
7. Mursaleen M., Mohiuddine S. A., "Applications of measures of noncompactness to the infinite system of differential equations in l_p spaces", Nonlinear Anal. 75 (2012) 2111-2115.
8. Mursaleen M., Alotaibi A., "Infinite system of differential equations in some BK spaces", Abstr. Applied Anal, (2012), Article ID 863483, 20.
9. Olszowy L., "Solvability of infinite systems of singular integral equations in Frechet space of continuous functions", Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 2794-2801.
10. Olszowy L.,"On some measure of noncompactness in Frechet space of continuous functions", Nonlinear Anal. 71 (2009) 5157-5163.
11. M.N. Oguzt¨oreli, On the neural equations of cowan and stein, Util. Math. 2 (1972) 305-315.
12. Persidskii K. P., "Countable systems of differential equations and stability of their solutions III: Fundamental theorems on stability of solutions of countable many differential equations", Izv. Akad. Nauk Kazach. SSR 9 (1961) 11-34.
13. Rzepka R., Sadarangani K., "On solutions of an infinite system of singular integral equations", Math. Comput. Modelling 45 (2007) 1265-1271.
14. Zautykov O. A., "Countable systems of differential equations and their applications", Differ. Uravn. 1 (1965) 162-170.
15. Zautykov O. A., Valeev K. G., "Infinite systems of differential equations, Izdat", ”Nauka ” Kazach. SSR, Alma-Ata (1974).
۱۶. مؤسسهٔ نشرعلوم نوین،" آنالیزتابعی"، والتررودین، ترجمهٔ علی اکبرعالم زاده، (۱۳۸۳).