وجود دو جواب برای یک رده از معادلات تفاضلی با عملگر $p(k)$ - لاپلاسین و شرایط مقدار مرزی

محسن خالقی مقدم*، یاسر خلیلی
دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری، گروه علوم پایه

دریافت ۹۶/۱۲/۲۸ پذیرش ۹۸/۱۰/۱۴

چکیده

در این مقاله وجود دو جواب برای مسئلهٔ گسسته غیرخطی ناهمسان‌گر با نمای متغیر متناظر با عملگر $p(k)$ - لاپلاسین[1] با شرط مرزی دیریکله[2] بررسی شده است. روش تغییراتی بر مبنای قضیه نقطه بحرانی برای تابعک‌های مشتق‌پذیر ابزار استفاده شده در این مسئله است. برای توضیح نتایج اصلی چندین مثال ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: مسئله مقدار مرزی غیرخطی دیریکله؛ جواب غیربدیهی؛ روش تغییراتی؛ تئوری نقطه بحرانی.

مقدمه

اخیراً به‌دلیل استفاده فراوان مسائل مقدار مرزی معادلات تفاضلی در علوم مختلف، بررسی درباره این نوع معادلات و وجود جواب‌های آن در سطح وسیعی رو به افزایش است. به‌عنوان نمونه می‌توان کاربردهای معادلات تفاضلی عملگر $p(k)$ – لاپلاسین را در شاخه‌های مختلف علوم مانند سیستم‌های کنترلی، اقتصاد، علوم اجتماعی، رایانه، شبکه‌های عصبی مصنوعی یا بیولوژیکی، سایبرنتیک[3]، محیط‌زیست و غیره مشاهده کرد. محققان در بررسی و مطالعه این‌گونه مسائل معمولاً از قضایای نقطه ثابت در مخروط استفاده می‌کنند که نتایج این تحقیقات در [۱۹] آمده است. هم‌چنین روش‌های دیگری مانند جواب بالایی و پایینی و تئوری نقطهٔ بحرانی برای بررسی معادلات تفاضلی غیرخطی استفاده می‌شود که برای جزئیات بیش‌تر می‌توان منابع [۷]، [۱۲]، [۱۳] و [۲۱] را بررسی کرد.

اخیراً در کارهای [۳]، [۵]، [۶]، [۸]، [۹]، [۱۱]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸] و با استفاده از روش‌های تغییراتی وجود و چندگانگی جواب‌های مسائل مقدار مرزی گسسته غیرخطی بررسی شده است.

در این مقاله اثبات وجود حداقل دو جواب برای مسئله ناهمسان‌گر گسسته

$$(P_\lambda^f)\begin{cases}-\Delta(w(k-1)\phi_{p(k-1)}(\Delta u(k-1)))+q(k)\phi_{p(k)}(u(k))=\lambda f(k,u(k)),\\ u(0)=u(T+1)=0,\end{cases}\qquad (۱)$$

بررسی می‌شود. در این‌جا $k\in[1,T]$، T عدد صحیح مثبت ثابت و فاصلهٔ $[1,T]$، مجموعه گسسته $\{1,...,T\}$ است. λ یک پارامتر مثبت است. تابع $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، عملگر $\Delta u(k)=u(k+1)-u(k)$، عملگر تفاضل پیش‌رو و عملگر $\phi_{p(\cdot)}(s)=|s|^{p(\cdot)-2}s$، عملگر $p(\cdot)$ - لاپلاسین یک‌بعدی گسسته است. هم‌چنین توابع $p:[0,T+1]\to[2,\infty)$، $q:[0,T+1]\to[1,\infty)$ و $w:[0,T]\to[1,\infty)$ توابع کراندار در نظر گرفته

*نویسنده مسئول m.khaleghi@sanru.ac.ir

1. Laplacian
2. Dirichlet

۳. موضوع اصلی سایبرنتیک بررسی ماهیت کنترل در انسان، حیوان و ماشین است

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.10.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.207]

می‌شوند. در این مقاله این نمادها استفاده می‌شود:

$$p^{+} := \max_{k\in[0,T+1]} p(k), \qquad p^{-} := \min_{k\in[0,T+1]} p(k), \qquad \overline{w} = \sum_{k=1}^{T+1} w(k-1), \qquad \overline{q} = \sum_{k=1}^{T+1} q(k),$$

متذکر می‌شویم که مسئله (۱) حالت گسسته مسئله ناهمسان‌گر متغیر نمایی (۲) است:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(w_i(x)\,|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}|^{p_i(x)-2}\, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)\,|u|^{p_i(x)-2}\, u = \lambda f(x,u), \quad x\in\Omega, \\ u = 0, x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{۲}$$

که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$، $N \geq 3$ دامنه کراندار با مرز هموار، $f \in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ تابعی با شرایط معین، $p_i(x)$، $w_i(x)\geq 1$ و $q(x)\geq 1$ توابع پیوسته روی $\overline{\Omega}$ با $2\leq p_i(x)$ برای هر $x\in\Omega$ و $i\in\{1,2,\cdots,N\}$ و $\lambda > 0$ یک عدد حقیقی است.

مبتنی بر قضیهٔ کمینه موضعی؛ قضیهٔ ۲، یک بازهٔ دقیق از پارامتر λ به‌دست می‌دهد که در آن مسئلهٔ (۱) حداقل دو جواب دارد.

در این‌جا قضیهٔ ۱ را بیان می‌کنیم که در واقع بیان یک نمونه از نتایج اصلی در یک حالت خاص است.

قضیهٔ ۱. فرض کنید $T\geq 2$ *عدد صحیح مثبت و* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته نامنفی باشد و

$$\limsup_{\xi\to 0} \frac{\int_0^{\xi} f(s)ds}{|\xi|^{T+3}} < \frac{5^{-\frac{T+3}{2}}\, T^{-\frac{T+1}{2}}}{0.5(T+3)(T+1)} \liminf_{\xi\to\infty} \frac{1}{|\xi|^{T+3}} \int_0^{\xi} f(t)dt. \tag{۳}$$

آن‌گاه برای هر

$$\lambda\in\Lambda^{*} = \left]\frac{5^{\frac{T+3}{2}}\, T^{\frac{T+1}{2}}(T+1)}{2\liminf\limits_{\xi\to\infty} \dfrac{1}{|\xi|^{T+3}}\int_0^{\xi} f(t)dt}, \frac{1}{(T+3)\limsup\limits_{\xi\to 0}\dfrac{\int_0^{\xi} f(s)ds}{|\xi|^{T+3}}}\right[,$$

مسئله

$$\begin{cases} -\Delta(|\Delta u(k-1)|^{k-1}\,\Delta u(k-1)) = \lambda f(u(k)) - (u(k))^{k+1}, \quad k\in 1,T], \\ u(0) = u(T+1) = 0, \end{cases} \tag{۴}$$

دو جواب متمایز $u_{\lambda,1}, u_{\lambda,2}\in W$ می‌پذیرد.

ادامه مقاله به این صورت مرتب شده است. در بخش ۲، ابزار اصلی (قضیهٔ ۲) و چند مبحث پایه‌ای را برای بیان نتایج و چند نامساوی ابزاری ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، نتایج اصلی این مقاله را بیان و اثبات می‌کنیم که شامل چند قضیه و تبصره و اثبات حالت خاص نتیجه اصلی (قضیهٔ ۱) است. در خاتمه با چند مثال به‌عنوان کاربردهایی از مسئله (۱) نتایج به‌دست آمده را توضیح می‌دهیم.

تعاریف و مفاهیم اولیه

ابزار اصلی در این کار قضیهٔ دو نقطه بحرانی است که در [۴] ثابت شد و در واقع یک ترکیب از قضیه کلاسیک

امبروسیتی-ربینوتس[1] [۱] و قضیهٔ کمینه موضعی ثابت شده در [۲] است.

قبل از اثبات نتایج ذکر شده، این تعریف را ارائه می‌دهیم:

تعریف: تابعک I روی فضای باناخ حقیقی X در شرط پالایزم- اسمیل[2] صدق می‌کند هرگاه هر دنباله $\{u_n\}$ با دو شرط

۱. دنبالهٔ $\{I(u_n)\}$ کراندار باشد.

۲. در فضای X^* دنباله $\{I'(u_n)\}$ همگرا به صفر باشد.

دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا باشد.

قضیهٔ ۲ نسخهٔ خاصی از قضیهٔ مسیرکوهی[3] است.

قضیهٔ ۲. (**قضیهٔ ۲. ۳،** [۴]): فرض کنید X فضای باناخ حقیقی با بعد متناهی و $I: X \to \mathbb{R}$ تابعک به‌طور مشتق‌پذیر گاتو[4] باشد که در شرط پالایزم- اسمال صدق کند و از پایین بی‌کران باشد. اگر I یک کمینه موضعی u_1 داشته باشد، آن‌گاه I دومین نقطه بحرانی مجزا را می‌پذیرد.

برای ارائه یک چهارچوب حساب تغییراتی بر مسئله (1.1)، فضای تابعی T- بعدی

$$W := \{u: [0, T+1] \to \mathbb{R} : u(0) = u(T+1) = 0\},$$

را تعریف می‌کنیم که در آن $T \geq 2$ عدد صحیح مثبت ثابت، بازهٔ $[1,T]$ مجموعه گسسته $\{1,\ldots,T\}$است. این فضای تعریف شده فضای هیلبرت با نرم زیر است:

$$\|u\| = \left\{\sum_{k=1}^{T+1} w(k-1)\,|\,\Delta u(k-1)\,|^{p^-} + q(k)\,|\,u(k)\,|^{p^-}\right\}^{1/p^-}.$$

چون W با بعد متناهی است، می‌توان نرم معادل آن را روی W به‌صورت

$$\|u\|_+ = \left\{\sum_{k=1}^{T+1} w(k-1)\,|\,\Delta u(k-1)\,|^{p^+} + q(k)\,|\,u(k)\,|^{p^+}\right\}^{1/p^+}.$$

تعریف کرد. اکنون، فرض کنید $\psi: W \to \mathbb{R}$ با رابطهٔ

$$\psi(u) := \sum_{k=1}^{T+1} [w(k-1)\,|\,\Delta u(k-1)\,|^{p(k-1)} + q(k)\,|\,u(k)\,|^{p(k)}]. \tag{۵}$$

داده شده باشد. در ادامه لم ۳ را ارائه می‌دهیم که از نامساوی آن استفاده می‌کنیم..

لم ۳. (**لم ۲.۱،** [۱۰]): اگر $\psi(u) < 1$ باشد برای هر $u \in W$ آن‌گاه

$$\|u\|_+^{p^+} \leq \psi(u) \leq \|u\|^{p^-}, \tag{۶}$$

به‌منظور بررسی مسئله (۱) تابعک $I_\lambda: W \to \mathbb{R}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$I_\lambda(u) := \sum_{k=1}^{T+1}\left(\frac{w(k-1)}{p(k-1)}\,|\,\Delta u(k-1)\,|^{p(k-1)} + \frac{q(k)}{p(k)}\,|\,u(k)\,|^{p(k)}\right) - \lambda \sum_{k=1}^{T} F(k, u(k)).$$

محاسبات ساده نشان می‌دهد که I_λ از فضای C^1 روی W بوده است و برای هر $u, v \in W$

$$I'_\lambda(u)(v) := \sum_{k=1}^{T+1}\Big(w(k-1)\phi_{p(k-1)}(\Delta u(k-1))\Delta v(k-1) + q(k)\phi_{p(k)}(u(k))v(k)\Big) - \sum_{k=1}^{T} \lambda f(k, u(k))v(k)$$

1. Ambrosetti-Rabinowitz
2. Palais-Smale
3. Mountain pass theorem
4. *Gâteaux*

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.10.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.207]

اینک در لم ۴ ارتباط بین نقاط بحرانی I_λ و جواب‌های مسئله (۱) بیان می‌شود.

لم ۴. (لم ۴.۲ [۱۶]): نقاط بحرانی تابعک I_λ دقیقاً جواب‌های مسئلهٔ (۱) است.

به‌منظور ارائهٔ چهارچوبی برای اجرای روش حساب تغییراتی روی مسئلهٔ (۱)، تابعک‌های Φ, Ψ را برای هر $u \in W$ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(u) := \sum_{k=1}^{T+1}\left(\frac{w(k-1)}{p(k-1)}|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)} + \frac{q(k)}{p(k)}|u(k)|^{p(k)}\right),$$

$$\Psi(u) := \sum_{k=1}^{T} F(k,u(k)),$$

در این‌صورت $I_\lambda = \Phi - \lambda\Psi$.

در لم ۵ نشان داده شده است که با ارائه مفروضات مناسب تابعک I_λ در شرط پالایزم- اسمال صدق کرده و از پایین بی‌کران است. فرض کنید:

$$L_\infty := \min_{k\in[1,T]}\left(\liminf_{\xi\to\infty}\frac{F(k,\xi)}{|\xi|^{p^+}}\right), \qquad \lambda^* := \frac{(T)^{\frac{p^+-2}{2}}(4\bar{w}+\bar{q})^{\frac{p^+}{2}}}{L_\infty p^-\left(\max\{\bar{w},\bar{q}\}\right)^{\frac{p^+-2}{2}}}.$$

لم ۵. (لم ۲.۵، [۱۹]): فرض کنید $f:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته و $f(k,x)\ge 0$ برای هر $x\le 0$ و هر $k\in[1,T]$ باشد. اگر $L_\infty > 0$ باشد آن‌گاه تابعک I_λ در شرط پالایزم- اسمال صدق کرده و برای هر $\lambda \in]\lambda^*,+\infty[$ از پایین بی‌کران است.

اینک لم زیر ارائه می‌شود که در آن وجود یک کمینه موضعی را برای تابعک مورد نظر ثابت می‌کند. در این اثبات از مشتق تابعک استفاده نشده است. فرض کنید:

$$L^0 := \max_{k\in[1,T]}\limsup_{\xi\to 0}\frac{F(k,\xi)}{|\xi|^{p^+}}.$$

لم ۶. فرض کنید $0\le L^0<\infty$ باشد. آن‌گاه 0 کمینه موضعی برای تابعک I_λ برای هر $\lambda\in]0,\frac{1}{p^+L^0}[$ است.

اثبات: نشان می‌دهیم که $r>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_\lambda(u)\ge I_\lambda(0)$ بر $\Phi^{-1}(]-\infty,r[)$ است. عدد $\lambda < \frac{1}{p^+L^0}$ را اختیار کرده و از این به بعد ثابت در نظر می‌گیریم. به‌علاوه ثابت l را چنان اختیار می‌کنیم که $L^0 < l < \frac{1}{p^+\lambda}$ باشد. با در نظر گرفتن $F(k,s) = f(k,0)s$ برای هر $s\le 0$ و $k\in[1,T]$، از $\limsup_{s\to 0}\frac{F(k,s)}{|s|^{p^+}}\le L^0 < l$ نتیجه می‌گیریم $\delta_k>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $F(k,s)<l|s|^{p^+}$ برای هر $s\in]-\delta_k,\delta_k[$ است.

بنابر این با قرار دادن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_T\}$ و $r=\min\{\frac{1}{p^+},\frac{\delta^{p^+}}{p^+}\}$ و استفاده از (2.2) برای هر $u\in\Phi^{-1}(]-\infty,r[)$، می‌توان نتیجه گرفت که $u(k)\in]-\delta_k,\delta_k[$ برای هر $k\in[1,T]$ است. در واقع،

$$\frac{1}{p^+},\frac{\delta^{p^+}}{p^+} > r > \Phi(u) \ge \frac{1}{p^+}\psi(u) \ge \frac{\|u\|_{p^+}^{p^+}}{p^+} \ge \frac{|u(k)|^{p^+}}{p^+},$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.10.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.207]

از این‌رو $|u(k)|< \delta \leq \delta_k$ برای هر $k \in [1,T]$ است. بنابراین برای هر $u \in \Phi^{-1}(]-\infty, r[)$ نتیجه می‌شود $F(k,u(k)) \leq l\,|u(k)|^{p^+}$ برای هر $k \in [1,T]$ است. بنابراین

$$\Psi(u) = \sum_{k=1}^{T} F(k,u(k)) \leq l \sum_{k=1}^{T} |u(k)|^{p^+} \leq l \|u\|_{p^+}^{p^+}$$

از این‌رو برای هر $u \in \Phi^{-1}(]-\infty, r[)$ چون $l < \dfrac{1}{p^+\lambda}$ است داریم:

$$I_\lambda(u) = \Phi(u) - \lambda\Psi(u) \geq \frac{\|u\|_{p^+}^{p^+}}{p^+} - \lambda l \|u\|_{p^+}^{p^+} = \|u\|_{p^+}^{p^+}\left(\frac{1}{p^+} - \lambda l\right) \geq 0 = \Phi(0) - \lambda\Psi(0).$$

نتایج اصلی

اینک چندگانگی جواب‌های مسئلهٔ (۱) و به‌طور دقیق‌تر وجود دو جواب‌در قضیهٔ ۷ ارائه می‌شود.

قضیهٔ ۷. فرض $f: [1,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته نامنفی باشد به‌طوری‌که $f(k,x) = f(k,0)$ برای هر $x \leq 0$ و $k \in [1,T]$ است. اگر $L_\infty > 0$ و

$$\lambda^* < \frac{1}{p^+ L^0}, \qquad (۷)$$

آن‌گاه مسئلهٔ (۱) حداقل دو جواب متمایز $u_{\lambda,1}, u_{\lambda,2} \in W$ برای هر $\lambda \in \Lambda :=]\lambda^*, \dfrac{1}{p^+L^0}[$ دارد.

اثبات: با استفاده از قضیهٔ ۲ موضوع ثابت می‌شود. برای این منظور از قضیهٔ ۷ نتیجه می‌گیریم Λ ناتهی است، بنابر این طبق $L_\infty > 0$ و استفاده از لم ۵، تابعک I_λ برای هر $\lambda \in \Lambda \subseteq]\lambda^*, +\infty[$ در شرط پالایز-اسمال صدق کرده و از پایین بی‌کران است. همچنین از قضیهٔ ۷ نتیجه می‌شود که $0 \leq L^0 < \infty$ است. بنابر این طبق لم ۶، برای هر $\lambda \in \Lambda \subseteq]0, \dfrac{1}{p^+L^0}[$ تابعک I_λ کمینه موضعی 0 دارد. از این‌رو همه مفروضات قضیهٔ ۲، برقرار شده و طبق قضیهٔ ۲ تابعک I_λ دومین نقطهٔ بحرانی خود که مجزا با اولی است را می‌پذیرد. از این‌رو، طبق لم ۴ برای این دو نقطهٔ بحرانی، مسئلهٔ (۱) دو جواب متمایز $u_{\lambda,1}, u_{\lambda,2} \in W$ دارد.

اثبات قضیهٔ ۱. در قضیهٔ ۷ کافی است که $f(k,x) = f(x)$ و $p(k) = k + 2$ و $w(k) = q(k) = 1$ در نظر گرفته شود. در این صورت $p^+ = T + 3$ و $p^- = 2$ و شرط (۷) به‌صورت شرط (۳) تبدیل می‌شود.

اینک مثالی از قضیهٔ ۷ ارائه می‌شود.

مثال ۸. فرض کنید $T = 10$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $k \in [1,T]$ باشد. این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(k,x) = \begin{cases} 4x^3 \cosh(6\tan^{-1} x) + \dfrac{6x^4}{x^2+1} \sinh(6\tan^{-1} x) & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

لذا

$$F(k,x) = x^4 \cosh(6\tan^{-1} x).$$

با در نظر گرفتن توابع $w(k) = k^3$ و $q(k) = \binom{T}{k-1}$ و $p(k) = \sqrt{k+5}$ داریم:

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{T+1} w(k-1) = \sum_{k=1}^{T+1} (k-1)^3 = \left(\frac{T(T+1)}{2}\right)^2 = 3025$$
$$\bar{q} = \sum_{k=1}^{T+1} q(k) = \sum_{k=1}^{T+1} \binom{T}{k-1} = \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} = 2^T = 1024$$
$$p^+ = 4, \qquad p^- = \sqrt{5}$$
$$L^0 = \max_{k\in[1,T]} \lim_{x\to 0} \frac{F(k,x)}{|x|^{p^+}} = \lim_{x\to 0} \cosh(6\tan^{-1} x) = 1$$
$$L_\infty = \min_{k\in[1,T]} \lim_{x\to \infty} \frac{F(k,x)}{|x|^{p^+}} = \lim_{x\to \infty} \cosh(6\tan^{-1} x) = \cosh(3\pi)$$

$$\lambda^* = \frac{T^{\frac{p^+-2}{2}}(4\bar{w}+\bar{q})^{\frac{p^+}{2}}}{L_\infty p^-(\max\{\bar{w},\bar{q}\})^{\frac{p^+-2}{2}}} = \frac{10(4\times 3025+1024)^2}{(3025)^2\sqrt{5}\cosh(3\pi)} = 0.013586$$
$$\frac{1}{p^+L^0} = 0.24.$$

از این‌رو رابطهٔ (۷) برقرار است. لذا طبق قضیهٔ ۷ مسئلهٔ

$$\begin{cases} -\Delta\left((k-1)^3\phi_{\sqrt{k+4}}\big(\Delta u(k-1)\big)\right) + \binom{T}{k-1}\phi_{\sqrt{k+5}}\big(u(k)\big) = \lambda f\big(k,u(k)\big), & k\in[1,10] \\ u(0) = u(11), \end{cases},$$

حداقل دو جواب متمایز $u_{\lambda,1}, u_{\lambda,2} \in W$ برای هر $\lambda \in \Lambda :=]0.013586, 0.24[$ دارد.

در خاتمه مثالی از قضیهٔ ۱ ارائه می‌شود.

مثال ۹. فرض کنید $T \geq 2$ دلخواه باشد. و هر $k \in [1,T]$ این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(k,x) = \begin{cases} x^{T+2}e^x(x+T+3) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

لذا

$$F(k,x) = x^{T+3}e^x,$$
$$\limsup_{\xi\to 0} \frac{\int_0^\xi f(s)ds}{|\xi|^{T+3}} = 1,$$
$$\liminf_{\xi\to\infty} \frac{1}{|\xi|^{T+3}} \int_0^\xi f(t)dt = +\infty.$$

از این‌رو رابطهٔ (۳) برقرار است. لذا طبق قضیهٔ ۱ مسئلهٔ (۴) برای هر $\lambda \in \left]0, \frac{1}{T+3}\right[$ ، دو جواب متمایز $u_{\lambda,1}, u_{\lambda,2} \in W$ می‌پذیرد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان در نهایت صمیمیت از داوران محترم برای پیشنهادهای مفید و ارزنده،کمال تشکر و قدردانی را دارند.

منابع

1. Ambrosetti A., Rabinowitz P. H., "Dual variational methods in critical point theory and

applications", J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

2. Bonanno G., "A Critical point theorem via the Ekeland variational principle", Nonl. Anal. TMA 75 (2012) 2992-3007.

3. Bonanno G., Candito P., "Infinitely many solutions for a class of discrete non-linear boundary value problems", Appl. Anal. 884 (2009) 605-616.

4. Bonanno G., Candito P., D'Agu'i G., "Variational methods on finite dimensional Banach spaces and discrete problems", Adv. Nonlinear Stud. 14 (2014) 915-939.

5. Candito P., D'Agu G., "Three solutions for a discrete nonlinear Neumann problem involving the p-Laplacian", Adv. Difference Equ. (2010) Art. ID 862016, 11.

6. Candito P., Giovannelli N., "Multiple solutions for a discrete boundary value problem", Comput. Math. Appl. 56 (2008) 959-964.

7. Chu J., Jiang D., "Eigenvalues and discrete boundary value problems for the one-dimensional p- Laplacian", J. Math. Anal. Appl. 305 (2005) 452-465.

8. Galewskia M., "On a new multiple critical point theorem and some applications to anisotropic problems", Taiwanese J. Math. Vol. 19, No. 5 (2015) 1495-1508.

9. Galewskia M., Molica Biscib G., Wieteskaa R., "Existence and multiplicity of solutions to discrete inclusions with the $p(k)$-Laplacian problem", J. Difference Equ. Appl. 21(10) (2015) 887-903.

10. Guiro A., Kone B., Ouaro S., "Weak heteroclinic solutions and competition phenomena to anisotropic difference equations with variable exponents", Opuscula Math. Vol. 34, No. 4, (2014) 733-745.

11. Heidarkhani S., Khaleghi Moghadam M., "Existence of Three solutions for Perturbed nonlinear difference equations", Opuscula Math. Vol. 34, No. 4 (2014) 747-761.

12. Henderson J., Thompson H. B., "Existence of multiple solutions for second order discrete boundary value problems", Comput. Math. Appl. 43 (2002) 1239-1248.

13. Kelly W. G., Peterson A. C., "Difference Equations: An Introduction with Applications", Academic Press, San Diego, New York, Basel (1991).

14. Khaleghi Moghadam M., Avci M., "Existence results to a nonlinear $p(k)$-Laplacian difference equation", J. Difference Equ. Appl. Vol. 23, No. 10 (2017) 1652-1669.

15. Khaleghi Moghadam M., Heidarkhani S., Henderson J., "Infinitely many solutions for perturbed difference equations", J. Difference Equ. Appl. Vol. 20, No. 7 (2014) 1055-1068.

16. Khaleghi Moghadam M., Henderson J., "Triple solutions for a dirichlet boundary value problem involving a perturbed discrete $p(k)$-laplacian operator", Open Mathematics J., 15, (2017) 1075-1089.

17. Khaleghi Moghadam M., Li L., Tersian S., "Existence of three solutions for a discrete

anisotropic boundary value problem", Bull. Iranian Math. Sco. Vol. 44, No. 4 (2018) 1091-1107.

18. Khaleghi Moghadam M., Heidarkhani S., "Existence of a non–trivial solution for nonlinear difference equations", Differ. Equ. Appl. 64 (2014) 517-525.

19. Khaleghi Moghadam M., Wieteska R., "Existence and uniqueness of positive solution for nonlinear difference equations involving p(k)-laplacian operator", An. Stiint. Univ. Ovidius Constant a Ser. Mat. Vol. 27 (1) (2019) 141-167.

20. Li Y., Lu L., "Existence of positive solutions of p -Laplacian difference equations", Appl. Math. Lett. 19 (2006) 1019-1023.

21. Zeidler E., "Nonlinear functional analysis and its applications", Vol. II / B, Berlin-Heidelberg-New York (1985).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.10.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.207]