

حل مسئله نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از عملگرهای نیم انقباضی

محمد اسلامیان

دانشگاه علم و فناوری مازندران، گروه ریاضی، بهشهر

پذیرش ۹۷/۱۱/۱۶

دریافت ۹۷/۰۱/۰۶

چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش تندترین کاهش ترکیبی و الگوریتم چسبندگی، الگوریتم جدیدی را برای حل مسئله نامساوی تغییراتی ارائه می‌دهیم. دنباله تولید شده به وسیله این الگوریتم، همگرایی قوی به عضو مشترک از مجموعه نقاط صفر مشترک خانواده‌ای از عملگرهای قویاً یکنوای معکوس و مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از عملگرهای نیم‌انقباضی است. همچنین نشان می‌دهیم دنباله تولید شده به وسیله این الگوریتم همگرایی قوی به یک جواب مسئله نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای متناهی از عملگرهای شبه نانبساطی و اکید شبه انقباضی در یک فضای هیلبرت است. در پایان کاربردهایی از این نتایج برای حل مسئله نقطه ثابت مشترک شکافتنی به منظور یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده متناهی از نگاشت‌های اکید شبه انقباضی در یک فضای هیلبرت، چنان‌که تصویر آن تحت یک عملگر خطی و کراندار در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌های نانبساطی قرار گیرد، ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مسئله نامساوی تغییراتی، نگاشت‌های نیم انقباضی، نقطه ثابت، عملگرهای قویاً یکنوای معکوس.

مقدمه

فرض کنید C یک زیر مجموعه محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H باشد.

اگر $F: H \rightarrow H$ عملگری دلخواه باشد. مسئله نامساوی تغییراتی عبارت است از یافتن عضوی مانند $x^* \in C$ به طوری که

$$\langle F x^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

مجموعه جواب‌های این مسئله با $VI(F, C)$ نمایش داده می‌شود.

در سال‌های اخیر مسئله‌های نامساوی تغییراتی به منظور بررسی انواع وسیعی از مسایل برگرفته شده از آنالیز، بهینه‌سازی، اقتصاد و علوم مهندسی استفاده شده است (به‌عنوان نمونه مراجع [۱]، [۲]، [۳] را ببیند).

تعریف ۱. عملگر $F: H \rightarrow H$ را پیوسته لیپشیتزی گوئیم هرگاه ثابتی مانند $L > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in H$$

اگر $L = 1$ عملگر F را نانبساطی و اگر $0 \leq L < 1$ ، عملگر F را انقباضی گوئیم.

عملگر $F: H \rightarrow H$ را یکنوا گوئیم هرگاه

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in H.$$

عملگر $F: H \rightarrow H$ را قویاً یکنوا گوئیم هرگاه ثابتی مانند $\beta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in H.$$

عملگر $F: H \rightarrow H$ را قویاً یکنوای معکوس گوئیم هرگاه ثابتی مانند $\beta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \beta \|F(x) - F(y)\|^2, \quad \forall x, y \in H.$$

توجه داریم هر عملگر قویاً یکنوای معکوس، عملگری یکنوا و پیوسته لیشیتزی است. هم‌چنین متذکر می‌شویم که عملگرهای قویاً یکنوای معکوسی موجودند به طوری که قویاً یکنوا نیست [۴].

اگر $T: H \rightarrow H$ نگاشتی دلخواه باشد، نقطه x را یک نقطه ثابت T گوئیم هرگاه $T(x) = x$. توجه داریم مجموعه C در مسئله نامساوی تغییراتی می‌تواند به عنوان مجموعه نقاط ثابت یک عملگر در نظر گرفته شود. با استفاده از این ایده، یامادا مسئله $VI(F, \text{Fix}(T))$ را در نظر گرفت، که عبارت است از یافتن $x^* \in \text{Fix}(T)$ به طوری که

$$\langle Fx^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \text{Fix}(T).$$

به منظور حل این مسئله، یامادا [۵]، [۶] این الگوریتم را که به الگوریتم تندترین کاهش ترکیبی شهرت دارد ارائه کرد:

$$x_{n+1} = (I - \mu\alpha_n F)Tx_n$$

که در آن F یک عملگر لیشیتزی پیوسته و یکنوای قوی و T عملگر نا انبساطی است. تحت بعضی شرایط مناسب روی $\{\alpha_n\}$ ، یامادا نشان داد که دنباله $\{x_n\}$ همگرایی قوی به جواب منحصر به فرد $VI(F, \text{Fix}(T))$ است.

در سال‌های اخیر الگوریتم تندترین کاهش ترکیبی به منظور حل مسئله نامساوی‌های تغییراتی به وسیله ریاضی‌دانان زیادی بررسی شده است. (به عنوان نمونه [۷]-[۱۱] را ببیند).

در سال ۲۰۱۷، تیان و جیانگ [۴] با استفاده از الگوریتم تندترین کاهش ترکیبی این الگوریتم را برای حل مسئله $VI(\text{Fix}(T), F)$ ارائه دادند:

$$\begin{cases} y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \\ x_{n+1} = (I - \mu\alpha_n F)y_n \end{cases}$$

که در آن T نگاشت نا انبساطی و F عملگر قویاً یکنوای معکوس است. آنها همگرایی ضعیف دنباله مذکور به جواب مسئله را اثبات کردند.

تعریف ۲. نگاشت $T: H \rightarrow H$ را نیم‌انقباضی [۱۲] گوئیم، هرگاه ثابتی مانند $\mu \in [0, 1)$ موجود باشد به طوری که

$$\|Tx - p\|^2 \leq \|x - p\|^2 + \mu \|Tx - x\|^2, \quad \forall x \in H, \quad \forall p \in \text{Fix}(T)$$

اگر $\mu = 0$ ، آن‌گاه نگاشت T را شبه نا انبساطی گوئیم.

نگاشت $T: H \rightarrow H$ را اکید شبه انقباضی [۱۳] گوئیم، هرگاه ثابتی مانند $\mu \in [0, 1)$ موجود باشد به طوری که

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \mu \|(x - Tx) - (y - Ty)\|^2, \quad \forall x, y \in H,$$

نگاشت‌های نیم‌انقباضی رده وسیعی از نگاشت‌ها مانند نگاشت‌های اکید شبه انقباضی، نگاشت‌های شبه نا انبساطی و نگاشت‌های نا انبساطی را شامل می‌شوند.

در این مقاله با استفاده از روش تندترین کاهش ترکیبی و الگوریتم چسبندگی، الگوریتم جدیدی را برای حل یک خانواده از مسئله‌های نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از عملگرهای نیم‌انقباضی ارائه

می‌دهیم. هم‌چنین همگرایی قوی دنباله تولید شده به‌وسیله این الگوریتم به جواب مسئله را اثبات می‌کنیم. در پایان کاربردهایی از این نتایج برای حل مسئله نقطه ثابت مشترک شکافتنی ارائه می‌دهیم.

پیش‌نیازها

در این بخش به یادآوری برخی مفاهیم و لم‌های مقدماتی که در نتایج اصلی این مقاله استفاده می‌شوند، می‌پردازیم.

در سراسر این مقاله H را یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و نرم $\|\cdot\|$ در نظر می‌گیریم. اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در H و $x \in H$ باشد. همگرایی ضعیف $\{x_n\}$ به x را با $x_n \rightharpoonup x$ و همگرایی قوی $\{x_n\}$ به x را با $x_n \rightarrow x$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از H و $x \in H$ باشد. در این صورت عضو یکتایی مانند $y \in C$ موجود است به طوری که برای هر $z \in C$ ، $\|y - x\| \leq \|z - x\|$. y را تصویر متریک از x به C می‌نامیم و با $P_C x$ نشان می‌دهیم. برای هر $x \in H$ ، $y = P_C x$ اگر و تنها اگر

$$\langle x - y, y - z \rangle \leq 0, \quad \forall z \in H.$$

هم‌چنین $P_C: H \rightarrow C$ نگاشتی نانبساطی است و $Fix(P_C) = C$ (برای جزئیات [۱۴] را ببینید).

تعریف ۳. اگر $U: H \rightarrow H$ نگاشت دلخواه باشد آن‌گاه $U-I$ را نیم‌بسته در صفر گوئیم هرگاه برای هر دنباله $\{x_n\}$ در H با شرایط $x_n \rightarrow x$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ux_n - x_n\| = 0$ داشته باشیم $x = Ux$.

لم ۱. [۱۵]: فرض کنید $U: H \rightarrow H$ ، نگاشتی β -اکید شبه‌انقباضی باشد. در این صورت $I-U$ در صفر نیم‌بسته است.

لم ۲. [۱۶]: اگر $U: H \rightarrow H$ نگاشت نیم‌انقباضی باشد. آن‌گاه مجموعه نقاط ثابت U ، محدب و بسته است.

لم ۳. [۱۷]: اگر $U: H \rightarrow H$ نگاشت μ -نیم‌انقباضی باشد آنگاه برای هر $x \in H$ و $y \in Fix(U)$

$$\langle x - Ux, y - Ux \rangle \leq \frac{1 + \mu}{2} \|x - Ux\|^2.$$

تعریف ۴. نگاشت $T: H \rightarrow H$ را نگاشت میانگینی گوئیم، هرگاه ثابتی مانند $\alpha \in (0, 1)$ موجود باشد به طوری که

$$T = (1 - \alpha)I + \alpha S,$$

که در آن $I: H \rightarrow H$ نگاشت همانی و $S: H \rightarrow H$ نگاشت نانبساطی است.

لم ۴. [۱۸]: فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T: H \rightarrow H$ نگاشت دلخواه باشد. در این صورت

(الف) نانبساطی است اگر و تنها اگر $I - T$ نگاشت $\frac{1}{2}$ -قویاً یکنوای معکوس باشد.

(ب) اگر T نگاشت β -قویاً یکنوای معکوس باشد، آن‌گاه برای هر $\alpha > 0$ نگاشت αT ، $\frac{\beta}{\alpha}$ -قویاً یکنوای معکوس است.

(ج) برای $\alpha \in (0, 1)$ ، T نگاشت α -میانگینی است اگر و تنها اگر $I - T$ نگاشت $\frac{1}{2\alpha}$ -قویاً یکنوای معکوس باشد.

لم ۵. [۱۹]: فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشند به طوری که

$$a_{n+1} \leq (1 - \eta_n) a_n + \eta_n \delta_n \quad n \geq 0,$$

که در آن $\{\eta_n\}$ یک دنباله در $(0, 1)$ و $\{\delta_n\}$ دنباله‌ای در \mathbb{R} است که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \infty \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \delta_n \leq 0 \quad \text{یا} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n \delta_n| < \infty \quad (\text{ب})$$

آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

لم ۶. [۲۰]: اگر $\{s_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، زیردنباله‌ای مانند $\{n_i\}$ از $\{n\}$ موجود باشد که $s_{n_i} < s_{n_i+1}$ ، آن‌گاه زیردنباله نا نزولی مانند $\{\tau(n)\} \subset \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\tau(n) \rightarrow \infty$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ (و به اندازه کافی بزرگ)

$$s_{\tau(n)} \leq s_{\tau(n)+1}, \quad s_n \leq s_{\tau(n)+1}$$

در حقیقت

$$\tau(n) = \max \{k \leq n : s_k < s_{k+1}\}.$$

لم ۷. [۱۴]: اگر H یک فضای هیلبرت باشد. آن‌گاه برای هر $x, y \in H$ و $\alpha \in (0, 1)$ داریم

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 = \alpha \|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2.$$

نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از روش تندترین کاهش تقریبی و الگوریتم چسبندگی الگوریتم جدیدی را برای حل مسئله نامساوی تغییراتی روی مجموعه نقاط ثابت خانواده‌ای متناهی از عملگرهای نیم انقباضی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و برای هر $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ نگاشت‌های $F_i : H \rightarrow H$ -نگاشت‌های k_i - قویاً یکنوای معکوس و $T_i : H \rightarrow H$ نگاشت‌های ζ_i - نیم انقباضی باشند به طوری که $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. همچنین فرض کنید $\Omega = (\bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i)) \cap (\bigcap_{i=1}^m F_i^{-1}(0)) \neq \emptyset$ فرض کنید f یک خود نگاشت انقباضی روی H با ثابت $b \in (0, 1)$ باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله تولید شده به وسیله $x_0 \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \frac{1-\zeta_i}{2} (T_i - I)x_n \\ y_{n,1} = (I - \mu^{(1)}\beta_n^{(1)}F_1)z_n, \\ y_{n,2} = (I - \mu^{(2)}\beta_n^{(2)}F_2)y_{n,1}, \\ \dots \\ y_{n,m} = (I - \mu^{(m)}\beta_n^{(m)}F_m)y_{n,m-1} \\ x_{n,1} = \xi_n f(y_{n,m}) + (1 - \xi_n)y_{n,m} \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

باشد. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}$ و $\{\xi_n\}$ در این شرایط صدق کنند:

$$\{\xi_n\} \subset (0, 1), \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty \quad (\text{الف})$$

$$\{\mu^{(i)}\beta_n^{(i)}\} \subset [a_i, b_i] \subset (0, 2k_i) \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{i=1}^m a_n^{(i)} = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n^{(i)} > 0 \quad (\text{ج})$$

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است. همچنین برای هر $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ،

x^* متعلق به $VI(\bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i), F_j)$ است.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله $\{x_n\}$ کراندار است. توجه داریم که $P_\Omega(f)$ یک نگاشت انقباضی از H به H است. بنابر اصل انقباض باناخ (هر خودنگاشت انقباضی روی یک فضای متریک کامل دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است) عضو منحصر به فردی مانند $x^* \in H$ موجود است به طوری که $x^* = P_\Omega(f)x^*$. از آنجا که برای هر $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ نگاشت‌هایی $T_i - \zeta_i$ نیم‌انقباضی هستند، با توجه به محدب بودن تابع $\|\cdot\|^2$ و لم ۳ داریم:

$$\begin{aligned} \|z_n - x^*\|^2 &= \|x_n + \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \frac{1-\zeta_i}{2} (T_i - I)x_n - x^*\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \|x_n + \frac{1-\zeta_i}{2} (T_i - I)x_n - x^*\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} (\|x_n - x^*\|^2 + \left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)^2 \|(T_i - I)x_n\|^2 \\ &\quad + 2\left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right) \langle x_n - x^*, (T_i - I)x_n \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} (\|x_n - x^*\|^2 + \left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)^2 \|(T_i - I)x_n\|^2 \\ &\quad + 2\left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)\left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)\|(T_i - I)x_n\|^2) \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 - \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \left(\frac{1-\zeta_i}{2}\right)^2 \|(T_i - I)x_n\|^2. \end{aligned} \quad (۲)$$

از آنجا که F_1 نگاشتی k_1 -قویاً یکنوا می‌باشد معکوس است با توجه به فرض (ب) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \|y_{n,1} - x^*\|^2 &= \|(I - \mu^{(1)}\beta_n^{(1)}F_1)z_n - (I - \mu^{(1)}\beta_n^{(1)}F_1)x^*\|^2 \\ &\leq \|z_n - x^*\|^2 + (\mu^{(1)}\beta_n^{(1)})^2 \|F_1z_n - F_1x^*\|^2 \\ &\quad - 2\mu^{(1)}\beta_n^{(1)} \langle F_1z_n - F_1x^*, z_n - x^* \rangle \\ &\leq \|z_n - x^*\|^2 + (\mu^{(1)}\beta_n^{(1)})^2 \|F_1z_n - F_1x^*\|^2 \\ &\quad - 2\mu^{(1)}\beta_n^{(1)} k_1 \|F_1z_n - F_1x^*\|^2 \\ &\leq \|z_n - x^*\|^2 + (\mu^{(1)}\beta_n^{(1)}) (\mu^{(1)}\beta_n^{(1)} - 2k_1) \|F_1z_n - F_1x^*\|^2 \\ &\leq \|z_n - x^*\|^2. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای هر $i \in \{2, 3, 4, \dots, m\}$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|y_{n,i} - x^*\|^2 &\leq \|y_{n,i-1} - x^*\|^2 + \mu^{(i)}\beta_n^{(i)} (\mu^{(i)}\beta_n^{(i)} - 2k_i) \|F_i y_{n,i-1} - F_i x^*\|^2 \\ &\leq \|z_n - x^*\|^2. \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|\xi_n(f(y_{n,m}) - x^*) + (1 - \xi_n)(y_{n,m} - x^*)\| \\ &\leq \xi_n \|f(y_{n,m}) - x^*\| + (1 - \xi_n) \|y_{n,m} - x^*\| \\ &\leq \xi_n \|f(y_{n,m}) - f(x^*)\| + \xi_n \|f(x^*) - x^*\| \\ &\quad + (1 - \xi_n) \|y_{n,m} - x^*\| \\ &\leq \xi_n b \|y_{n,m} - x^*\| + \xi_n \|f(x^*) - x^*\| \\ &\quad + (1 - \xi_n) \|y_{n,m} - x^*\| \end{aligned}$$

$$\leq (1 - \xi_n(1 - b))\|x_n - x^*\| + \xi_n\|f(x^*) - x^*\|.$$

با استفاده از استقرا ریاضی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\|x_n - x^*\| \leq \max\left\{\|x_0 - x^*\|, \frac{1}{1-b}\|f(x^*) - x^*\|\right\},$$

بنابراین $\{x_n\}$ کراندار است. علاوه بر این $\{z_n\}$ ، $\{y_{n,i}\}$ و $\{f(y_{n,m})\}$ نیز کراندار است. از آن‌جا که F_1 یک

نگاشت $-k_1$ قویاً یکنوای معکوس است با توجه به لم ۴ می‌توان $y_{n,1}$ را به صورت

$$y_{n,1} = (1 - \gamma_n^{(1)})z_n + \gamma_n^{(1)}V_n^{(1)}z_n$$

نوشت که در آن $\gamma_n^{(1)} = \frac{\mu^{(1)}\beta_n^{(1)}}{2k_1}$ و $V_n^{(1)}$ نگاشتی نانبساطی از H به H است. با استفاده از لم ۷ داریم:

$$\begin{aligned} \|y_{n,1} - x^*\|^2 &= \left\| (1 - \gamma_n^{(1)})z_n + \gamma_n^{(1)}V_n^{(1)}z_n - x^* \right\|^2 \\ &\leq (1 - \gamma_n^{(1)})\|z_n - x^*\|^2 + \gamma_n^{(1)}\|V_n^{(1)}z_n - x^*\|^2 \\ &\quad - \gamma_n^{(1)}(1 - \gamma_n^{(1)})\|V_n^{(1)}z_n - z_n\|^2 \\ &\leq \|z_n - x^*\|^2 - \gamma_n^{(1)}(1 - \gamma_n^{(1)})\|V_n^{(1)}z_n - z_n\|^2. \end{aligned} \quad (۳)$$

با روند مشابه برای $i=2,3,\dots,m$ به دست می‌آوریم:

$$\|y_{n,i} - x^*\|^2 \leq \|y_{n,i-1} - x^*\|^2 - \gamma_n^{(i)}(1 - \gamma_n^{(i)})\|V_n^{(i)}y_{n,i-1} - y_{n,i-1}\|^2 \quad (۴)$$

که در آن $\gamma_n^{(i)} = \frac{\mu^{(i)}\beta_n^{(i)}}{2k_i}$ و $V_n^{(i)}$ نگاشت‌هایی نانبساطی از H به H هستند.

با استفاده از نامساوی‌های (۲)، (۳)، (۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|\xi_n(f(y_{n,m}) - x^*) + (1 - \xi_n)(y_{n,m} - x^*)\|^2 \\ &\leq \xi_n^2\|f(y_{n,m}) - x^*\|^2 + (1 - \xi_n)^2\|y_{n,m} - x^*\|^2 \\ &\quad + 2\xi_n(1 - \xi_n)\|f(y_{n,m}) - x^*\|\|y_{n,m} - x^*\| \\ &\leq \xi_n^2\|f(y_{n,m}) - x^*\|^2 + 2\xi_n(1 - \xi_n)\|f(y_{n,m}) - x^*\|\|y_{n,m} - x^*\| \\ &\quad + (1 - \xi_n)^2\|x_n - x^*\|^2 - (1 - \xi_n)^2\gamma_n^{(1)}(1 - \gamma_n^{(1)})\|V_n^{(1)}z_n - z_n\|^2 \\ &\quad - \dots - (1 - \xi_n)^2\gamma_n^{(m)}(1 - \gamma_n^{(m)})\|V_n^{(m)}y_{n,m-1} - y_{n,m-1}\|^2 \\ &\quad - (1 - \xi_n)^2\sum_{i=1}^m a_n^i \frac{(1-\xi_i)^2}{4} \|(T_i - I)x_n\|^2. \end{aligned} \quad (۵)$$

بنابراین برای هر $i \in \{1,2,\dots,m\}$ داریم:

$$\begin{aligned} (1 - \xi_n)^2 \sum_{i=1}^m a_n^i \frac{(1-\xi_i)^2}{4} \|(T_i - I)x_n\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\ &\quad + 2\xi_n(1 - \xi_n)\|f(y_{n,m}) - x^*\|\|x_n - x^*\|^2 + \xi_n^2\|f(y_{n,m}) - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (۶)$$

حال نشان می‌دهیم $x_n \rightarrow x^*$ برای اثبات دو حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. فرض کنید $\{\|x_n - x^*\|\}$ دنباله یکنوا باشد. زیرا $\{\|x_n - x^*\|\}$ کراندار است بنابراین همگراست. از آن‌جا که

$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ و با توجه به کراندار بودن $\{f(y_{n,m})\}$ و $\{x_n\}$ از نامساوی (۶) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \xi_n)^2 a_n^i \frac{(1-\xi_i)^2}{4} \|(T_i - I)x_n\|^2 = 0.$$

با توجه به این فرض که $\lim_n \inf a_n^{(i)} > 0$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - x_n\| = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (7)$$

با استفاده از بحث مشابه، از نامساوی (۵) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^1 z_n - z_n\| = 0, \quad (8)$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^i y_{n,i-1} - y_{n,i-1}\| = 0, \quad 2 \leq i \leq m. \quad (9)$$

با استفاده از رابطه (۷) و (۸) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{n,1} - z_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0. \quad (10)$$

هم چنین از (۹) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{n,i} - y_{n,i-1}\| = 0 \quad 2 \leq i \leq m. \quad (11)$$

بنابراین با توجه به الگوریتم (۱) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (12)$$

حال نشان می‌دهیم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_n \rangle \leq 0.$$

برای اثبات، زیردنباله $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_{n_i} \rangle = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_n \rangle.$$

زیرا $\{x_{n_i}\}$ کراندار است زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_{i_j}}\}$ از $\{x_{n_i}\}$ موجود است که همگرای ضعیف به \hat{x} است. بدون این

که به کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد $\{x_{n_i}\}$ همگرای ضعیف به \hat{x} است. با توجه به این که

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0$ داریم $\{z_{n_i}\}$ همگرای ضعیف به \hat{x} است. از آن جاکه $\{\beta_{n_i}\}$ کراندار است زیردنباله‌ای

مانند $\{\beta_{n_{i_j}}\}$ موجود است به طوری که همگرا به β^1 است و $\beta^1 \subset [a_1, b_1]$ و $\mu^1 \beta^1 \subset F_1$ قویاً یکنوای معکوس و

$\{z_{n_{i_j}}\}$ کراندار است نتیجه می‌شود که $\{F_1 z_{n_{i_j}}\}$ کراندار است. از این رو،

$$\|(I - \mu^{(1)} \beta_{n_{i_j}}^{(1)} F_1) z_{n_{i_j}} - (I - \mu^{(1)} \beta^{(1)} F_1) z_{n_{i_j}}\|$$

زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{n,1} - z_n\| = 0$ داریم:

$$\|(I - \mu^{(1)} \beta_{n_{i_j}}^{(1)} F_1) z_{n_{i_j}} - z_{n_{i_j}}\| \rightarrow 0.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|(I - \mu^{(1)} \beta^{(1)} F_1) z_{n_{i_j}} - z_{n_{i_j}}\| &\leq \|(I - \mu^{(1)} \beta_{n_{i_j}}^{(1)} F_1) z_{n_{i_j}} - z_{n_{i_j}}\| \\ &+ \|(I - \mu^{(1)} \beta_{n_{i_j}}^{(1)} F_1) z_{n_{i_j}} - (I - \mu^{(1)} \beta^{(1)} F_1) z_{n_{i_j}}\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱ و لم ۴ نتیجه می‌شود:

$$\hat{x} \in \text{Fix}(I - \mu^1 \beta^1 F_1) = F_1^{-1}(0).$$

با بحث مشابهی داریم:

$$\hat{x} \in F_i^{-1}(0), \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, m\}.$$

از رابطه (۷) و با توجه به نیم‌بسته بودن $T_i - I$ داریم $\hat{x} \in \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i)$ بنابراین $\hat{x} \in \Omega$. از آن‌جا که

$x^* = P_\Omega(f)x^*$ و $\hat{x} \in \Omega$ نتیجه می‌شود:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_n \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_{n_i} \rangle$$

با استفاده از رابطه

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle \quad \forall x, y \in H,$$

داریم:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|(1 - \xi_n)(y_{n,m} - x^*)\|^2 + 2\xi_n \langle f(y_{n,m}) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\leq (1 - \xi_n)^2 \|y_{n,m} - x^*\|^2 + 2\xi_n \langle f(y_{n,m}) - f(x^*), x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\leq (1 - \xi_n)^2 \|y_{n,m} - x^*\|^2 + 2b\xi_n \|x_n - x^*\| \|x_{n+1} - x^*\| \\ &\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\leq (1 - \xi_n)^2 \|y_{n,m} - x^*\|^2 + b\xi_n (\|x_n - x^*\|^2 + \|x_{n+1} - x^*\|^2) \\ &\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\leq ((1 - \xi_n)^2 + b\xi_n) \|x_n - x^*\|^2 + b\xi_n (\|x_{n+1} - x^*\|^2) \\ &\quad + 2\xi_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle. \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \frac{1 - 2\xi_n + (\xi_n)^2 + b\xi_n}{1 - b\xi_n} \|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + \frac{2\xi_n}{1 - b\xi_n} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &= \left(1 - \frac{2(1 - b)\xi_n}{1 - \xi_n b}\right) \|x_n - x^*\|^2 + \frac{(\xi_n)^2}{1 - \xi_n b} \|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + \frac{2\xi_n}{1 - \xi_n b} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\leq \left(1 - \frac{2(1 - b)\xi_n}{1 - \xi_n b}\right) \|x_n - x^*\|^2 \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{2(1-b)\xi_n}{1-\xi_nb}\right)\left(\frac{(\xi_n)M}{2(1-b)} + \left(\frac{1}{1-b}\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle\right)\right)$$

$$= (1 - \sigma_n)\|x_n - x^*\|^2 + \sigma_n\eta_n,$$

که در آن $\sigma_n = \frac{2(1-b)\xi_n}{1-\xi_nb}$ و $M = \sup\{\|x_n - x^*\|^2 : n \geq 0\}$

$$\eta_n = \frac{(\xi_n)M}{2(1-b)} + \frac{1}{1-b}\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle.$$

مشاهده می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \infty$ و $\sigma_n \rightarrow 0$ هم‌چنین $\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n \leq 0$. بنابر لم ۶ دنباله $\{x_n\}$ همگرایی قوی به x^* است.

۲. فرض کنید $\{\|x_n - x^*\|\}$ دنباله‌ای یکنوا نباشد. دنباله‌ی $\{\tau(n)\}$ از اعداد صحیح را برای هر $n \geq n_0$ (برای یک n_0 به اندازه کافی بزرگ) بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tau(n) = \max\{k \in \mathbb{N}; k \leq n : \|x_k - x^*\| < \|x_{k+1} - x^*\|\}.$$

پس $\tau(n)$ دنباله‌ای نازولی و $\tau(n) \rightarrow \infty$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$ برای هر $n \geq n_0$ داریم:

$$\|x_{\tau(n)} - x^*\| < \|x_{\tau(n)+1} - x^*\|.$$

حال از رابطه (۵) نتیجه می‌شود:

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2 \leq (\xi_n)^2 \|f(y_{n,m}) - x^*\|^2 + ((\xi_n)^2 - 2\xi_n)\|x_n - x^*\|^2 + 2\xi_n(1 - \xi_n)\|f(y_{n,m}) - x^*\|\|x_n - x^*\|.$$

از آن‌جا که $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ و با توجه به کرانداری $\{f(y_{n,m})\}$ و $\{x_n\}$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_{\tau(n)+1} - x^*\|^2 - \|x_{\tau(n)} - x^*\|^2) = 0.$$

با بحث مشابه آن‌چه در حالت ۱ بیان شد داریم:

$$\|x_{\tau(n)+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \sigma_{\tau(n)})\|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 + \sigma_{\tau(n)}\eta_{\tau(n)},$$

که در آن $\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_{\tau(n)} \leq 0$. از آن‌جا که $\|x_{\tau(n)+1} - x^*\| \leq \|x_{\tau(n)} - x^*\|$ داریم:

$$\sigma_{\tau(n)}\|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 \leq \sigma_{\tau(n)}\eta_{\tau(n)}$$

با توجه به این که $\sigma_{\tau(n)} > 0$ نتیجه می‌گیریم که

$$\|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 \leq \eta_{\tau(n)}$$

از $\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_{\tau(n)} \leq 0$ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{\tau(n)} - x^*\| = 0$. حال با استفاده از لم ۶ داریم:

$$0 \leq \|x_n - x^*\| \leq \max\{\|x_{\tau(n)} - x^*\|, \|x_n - x^*\|\} \leq \|x_{\tau(n)+1} - x^*\|.$$

بنابراین $\{x_n\}$ همگرایی قوی به $x^* = P_{\Omega}(f)$ است.

نتیجه ۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت، $F: H \rightarrow H$ یک نگاشت k -قویاً یکنوا معکوس و

$$T_i: H \rightarrow H \text{ برای } i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

نگاشت‌های ζ_i - اکید شبه انقباضی باشند. هم‌چنین فرض کنید:

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i) \cap F^{-1}(0) \neq \emptyset.$$

فرض کنید f یک خودنگاشت انقباضی روی H با ثابت $b \in (0, 1)$ باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله تولید شده به وسیله $x_0 \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \frac{1 - \zeta_i}{2} (T_i - I)x_n \\ y_n = (I - \mu\beta_n F)z_n \\ x_{n+1} = \xi_n f(y_n) + (1 - \xi_n)y_n \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$

باشد. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}$ ، $\{\xi_n\}$ و $\{\beta_n\}$ در این شرایط صدق کنند:

$$\text{الف) } \{\xi_n\} \subset (0, 1), \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$$

$$\text{ب) } \{\mu\beta_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2k)$$

$$\text{ج) } \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n^{(i)} > 0$$

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است. هم‌چنین x^* متعلق به $VI(\cap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i), F)$ است.

برهان: توجه داریم که هر نگاشت اکید شبه‌انقباضی، نیم‌انقباضی است. هم‌چنین با استفاده از لم ۱ داریم $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. حال با استفاده از قضیه ۱، نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

نتیجه ۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت، $F: H \rightarrow H$ یک نگاشت k -قویاً یکنوا می‌عکوس و $T_i: H \rightarrow H$ برای

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$ نگاشت‌های شبه نانبساطی باشند به طوری که $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. هم‌چنین فرض

کنید:

$$\Omega = \cap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i) \cap F^{-1}(0) \neq \emptyset.$$

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله تولید شده به وسیله $x_0, \zeta \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} (T_i - I)x_n \\ y_n = (I - \mu\beta_n F)z_n \\ x_{n+1} = \xi_n \zeta + (1 - \xi_n)y_n \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$

باشد. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}$ ، $\{\xi_n\}$ و $\{\beta_n\}$ در این شرایط صدق کنند:

$$\text{الف) } \{\xi_n\} \subset (0, 1), \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$$

$$\text{ب) } \{\mu\beta_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2k)$$

$$\text{ج) } \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n^{(i)} > 0$$

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است. هم‌چنین x^* متعلق به $VI(\cap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i), F)$ است.

برهان: توجه داریم که هر نگاشت شبه نانبساطی، نگاشتی 0 -نیم انقباضی است. حال با قراردادن $f(x) = \zeta$ در قضیه ۱، نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

مثال عددی: فضای هیلبرت $H = \mathbb{R}$ با متریک معمولی را در نظر می‌گیریم. توابع $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،

$T_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i=1, 2$) و $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \frac{x}{2}, \quad T_1(x) = \frac{-5x}{3}, \quad T_2(x) = \frac{2x}{3}, \quad f(x) = \frac{x}{3}$$

در این صورت F نگاشت ۲-یکنوای قویاً معکوس، T_1 نگاشتی $\frac{1}{4}$ -اکید شبه انقباضی، T_2 نگاشتی غیرانبساطی و f یک نگاشت انقباضی با ثابت $\frac{1}{3}$ است. توجه داریم که

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i) \cap F^{-1}(0) = \{0\}.$$

قرار می‌دهیم:

$$a_n^{(1)} = a_n^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad \mu\beta_n = 2\left(\frac{2n+1}{4n+4}\right), \quad \xi_n = \frac{1}{n+3}$$

در این صورت $\{a_n^{(i)}\}$ ، $\{\xi_n\}$ و $\{\beta_n\}$ در شرایط قضیه ۱ صدق می‌کنند. در نتیجه

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \frac{1-\zeta_i}{2} (T_i - I)x_n = x_n - \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{12}x_n = \frac{5}{12}x_n \\ y_n = (I - \mu\beta_n F)z_n = \left(\frac{2n+3}{4n+4}\right)z_n \\ x_{n+1} = \xi_n f(y_n) + (1 - \xi_n)y_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+3}\right)y_n + \left(\frac{n+2}{n+3}\right)y_n = \left(\frac{3n+7}{3n+9}\right)y_n \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$

بنابراین

$$x_{n+1} = \left(\frac{3n+7}{3n+9}\right)\left(\frac{2n+3}{4n+4}\right)\left(\frac{5}{12}\right)x_n, \quad \forall n \geq 0$$

مشاهده می‌کنیم که دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به 0 است.

مسئله نقطه ثابت مشترک شکافتنی

در این بخش کاربردی از قضیه اصلی را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید H و K فضاهای هیلبرت و برای $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ عملگرهای خطی و کراندار باشند. اگر $\{C_i\}_{i=1}^r$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای H و $\{Q_i\}_{i=1}^r$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای K باشند. مسئله امکان‌پذیری شکافتنی چندمجموعه‌ای عبارت است از یافتن x^* با این ویژگی که $x^* \in \bigcap_{j=1}^r C_j$ به طوری که برای هر $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ $A_i(x^*) \in Q_i$ مسئله امکان‌پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای، به وسیله سنسور و همکارانش [۲۱]، [۲۲] معرفی شد. این مسایل کاربردهای زیادی در حل مسایل بهینه‌سازی و پردازش تصاویر و غیره دارند [۲۳]. در سال‌های اخیر این مسئله به وسیله ریاضی‌دانان زیادی بررسی شده است (به‌عنوان نمونه [۲۴] و [۲۵]).

در سال ۲۰۰۹ سنسور و سگال [۲۶] مسئله نقطه ثابت مشترک شکافتنی را به‌عنوان تعمیمی از مسئله امکان‌پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای بررسی کردند.

فرض کنید H و K فضاهای هیلبرت و برای $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ عملگرهای خطی و کراندار باشند. اگر $T_i: H \rightarrow H$ و $S_i: K \rightarrow K$ نگاشتهای غیرخطی باشند. مسئله نقطه ثابت مشترک شکافتنی عبارت است از یافتن x^* با این ویژگی که $x^* \in \bigcap_{j=1}^r \text{Fix}(T_j)$ به طوری که برای هر $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ $A_i(x^*) \in \text{Fix}(S_i)$

$$A_i(x^*) \in \text{Fix}(S_i)$$

قضیه ۲. فرض کنید H و K فضاهای هیلبرت و برای $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ عملگرهای خطی و کراندار باشند. فرض کنید نگاشت‌های $T_i: H \rightarrow H$ - ζ_i اکید شبه انقباضی و $S_i: K \rightarrow K$ نگاشت‌های نانبساطی باشند. همچنین

$$\Omega = \left\{ x^* \in \bigcap_{j=1}^m \text{Fix}(T_j) : A_i(x^*) \in \text{Fix}(S_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \right\} \neq \emptyset.$$

فرض کنید f یک خودنگاشت انقباضی روی H با ثابت $b \in (0, 1)$ باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله تولید شده به وسیله $x_0 \in H$ و با الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n + \sum_{i=1}^m a_n^{(i)} \frac{1 - \zeta_i}{2} (T_i - I) x_n \\ y_{n,1} = (I - \mu^{(1)} \beta_n^{(1)} (A_1^* (I - S_1) A_1)) z_n, \\ y_{n,2} = (I - \mu^{(2)} \beta_n^{(2)} (A_2^* (I - S_2) A_2)) y_{n,1}, \\ \dots \\ y_{n,m} = (I - \mu^{(m)} \beta_n^{(m)} (A_m^* (I - S_m) A_m)) y_{n,m-1} \\ x_{n+1} = \xi_n f(y_{n,m}) + (1 - \xi_n) y_{n,m} \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

باشد که در آن A_i^* عملگر الحاق A_i است. اگر دنباله‌های $\{a_n^{(i)}\}$ و $\{\beta_n^{(i)}\}$ در این شرایط صدق کنند:

(الف) $\{\xi_n\} \subset (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$

(ب) $\{\mu^{(i)} \beta_n^{(i)}\} \subset [a_i, b_i] \subset \left(0, \frac{1}{\|A_i\|^2}\right)$

(ج) $\sum_{i=1}^m a_n^{(i)} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n^{(i)} > 0$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ است

برهان: توجه داریم که هر نگاشت اکید شبه انقباضی، نیم انقباضی است. همچنین با استفاده از لم ۱ می‌دانیم که $T_i - I$ در صفر نیم‌بسته است. قرار می‌دهیم $F_i = A_i^* (I - S_i) A_i$ پس عملگر F_i - $\frac{1}{2\|A_i\|^2}$ قویاً یکنوای معکوس است (برای جزئیات [۲۴] را ببینید). همچنین $A_i(z) \in \text{Fix}(S_i)$ اگر و تنها اگر $z \in F_i^{-1}(0)$ بنابراین با توجه به قضیه ۱، نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

منابع

1. Kinderlehrer D., Stampacchia G., "An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications", Academic Press, New York (1980).
2. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications", Springer, New York (1985).

3. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J., Lovisek J., "Solution of Variational Inequalities in Mechanics", Springer, New York (1988).
4. Tian M., Jiang B. N., "Weak convergence theorem for zero points of inverse strongly monotone mapping and fixed points of nonexpansive mapping in Hilbert space", Optimization. 66 (2017) 1689-1698.
5. I. Yamada I., "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problems over the intersection of fixed points sets of nonexpansive mapping", In: D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich (eds). Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Application", pp. 473-504, North-Holland, Amsterdam (2001).
6. Yamada I., Ogura N., "Hybrid steepest descent method for variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings", Numer. Funct. Anal. Optim., 25 (2004) 619-655.
7. Ceng L.C., Ansari Q. H., Yao J. C., "Mann- type steepest-descent and modified hybrid steepest-descent methods for variational inequalities in Banach spaces", Numer. Funct. Anal. Optim., 29 (2008) 987-1033.
8. Zhou H. Y., Wang P. A., "A simpler explicit iterative algorithm for a class of variational inequalities in Hilbert spaces", J. Optim. Theory Appl., 161 (2014) 716-727.
9. Cegielski A., "Application of quasi-nonexpansive operators to an iterative method for variational inequality", SIAM J. OPTIM., 25 (2015) 2165-2181.
10. Eslamian M., "Common solutions to a system of variational inequalities over the set of common fixed points of demi-contractive operators", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 355 (2017) 1168-1177.
11. Gibali A., Reich S., Zalas R., "Outer approximation methods for solving variational inequalities in Hilbert space", Optimization. 66, (2017) 417-437.
12. Hicks T. L., Kubicek J. R., "On the Mann iterative process in Hilbert spaces", J. Math. Anal. Appl., 59 (1977) 498-504.
13. Browder F. E., Petryshyn V.W., "Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces", J. Math. Anal. Appl., 20 (1967) 197-228.
14. Takahashi W., "Introduction to Nonlinear and Convex Analysis", Yokohama Publishers, Yokohama (2009).
15. Marino G., Xu H.K., "Weak and strong convergence theorems for strictly pseudo-contractions in Hilbert spaces", J. Math. Anal. Appl., 329 (2007) 336-349.
16. Chidume C. E., Maruster, "Iterative methods for the computation of fixed points of demicontractive mappings", J. Comput. Appl. Math., 234 (2010) 861-882.

17. Moudafi A., "The split common fixed point problem for demicontractive mappings", *Inverse Problem*, 26, 055007 (2010).
18. Ceng L. C., Ansari Q. H., Yao J. C., "Some iterative method for finding fixed points and solving constrained convex minimization problems", *Numer. Algebra Control Optim.* 1 (2011) 341-359.
19. Xu H.K., "Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 65 (2002) 109-113.
20. Mainge P. E., "Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization", *Set-Valued Anal.*, 16 (2008) 899-912.
21. Censor Y., Elfving T., "A multiprojection algorithms using Bragman projection in a product space", *Numer. Algorithm*, 8 (1994) 221-239.
22. Censor Y., Elfving T., Kopf N., Bortfeld T., "The multiple-sets split feasibility problem and its applications", *Inverse Problems*, 21 (2005) 2071-2084.
23. Byrne C., "A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction", *Inverse Problems*, 20 (2004) 103-120.
24. Takahashi W., Xu H. K., Yao J. C., "Iterative methods for generalized split feasibility problems in Hilbert spaces", *Set-Valued Var. Anal.*, 23 (2015) 205-221.
25. Eslamian M., "Split common fixed point and common null point problem", *Math. Meth. Appl Sci.*, 40 (2017) 7410-7424.
26. Censor Y., Segal A., "The split common fixed point problem for directed operators", *J. Convex Anal.*, 16 (2009) 587-600.