بعضی قضایای نقطهٔ ثابت برای نگاشت‌های (θ,η) - انقباضی چند مقداری در فضاهای شبه b- متریک احتمالی منگر

مهناز خانه‌گیر* و رضا الهیاری
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد،گروه ریاضی

دریافت: ۹۷/۰۱/۱۸ پذیرش: ۹۹/۰۴/۰۹

چکیده

در این مقاله ابتدا با استفاده از ساختار فضای b - متریک احتمالی منگر و فضای شبه متریک احتمالی منگر ، مفهوم فضای شبه b - متریک احتمالی منگر را تعریف می‌کنیم و مثال‌هایی از این فضا ارائه می‌دهیم. سپس بعضی قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های (θ,η) - انقباضی چند مقداری را در این فضاها بیان و اثبات می‌نماییم. در ادامه بعضی نتایج از نقطه ثابت را برای نگاشت‌های انقباضی $\beta-\gamma$ - نوع تعمیم یافته تعریف شده روی فضای شبه b - متریک احتمالی منگر نشان می‌دهیم. همچنین مثال‌هایی جهت بررسی سودمند و کارا بودن نتایجمان ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: فضای شبه b- متریک، فضای متریک احتمالی منگر، نقطه ثابت، نگاشت انقباضی، نگاشت چند مقداری

۱. مقدمه

مفهوم فضای متریک احتمالی منگر (به طور خلاصه PM - فضای منگر) توسط منگر[1] معرفی شد [۶]. ایده منگر استفاده از تابع توزیع به جای عدد نامنفی برای مقدار یک متریک بود. مفهوم فضای متریک احتمالی وقتی مطرح می‌شود که فاصله بین دو نقطه را به طور دقیق نمی‌دانیم. از این رو در چنین فضاهایی فاصله دو نقطه x,y با تابع توزیع $F_{x,y}$ داده می‌شود که در آن برای هر $t\in[0,\infty)$ مقدار $F_{x,y}(t)$ احتمال رخ دادن رویداد این که فاصله بین y,x از t کمتر باشد را نشان می‌دهد. سگال[2]و پاریچا- رید[3] تعمیمی از اصل انقباضی باناخ روی PM - فضای منگر کامل به دست آوردند که در توسیع نظریه نقطه ثابت در یک PM - فضای منگر نقش مهمی داشت [۹]. بعدها، شوایزر[4] و اسکلار [5] خواص PM - فضای منگر

*نویسنده مسئول khanehgir@mshdiau.ac.ir

[1] Menger
[2] Sehgal
[3] Bharucha-Reid
[4] Schweizer
[5] Sklar

را مورد مطالعه قرار دادند و بعضی نتایج اساسی روی این فضاها را ارائه دادند [۸]. حسنوند[6] و خانه‌گیر[7] فضای b- متریک احتمالی منگر را معرفی و بعضی قضایای نقطه ثابت در این فضاها را اثبات نمودند [۴]. از سوی دیگر هدزیک [8]و پاپ[9] بعضی قضایای نقطه ثابت را برای نگاشت‌های $(\psi-C)$- انقباضی چند مقداری در فضاهای متریک احتمالی بیان و اثبات نمودند [۳]. زیکیک[10] مفهوم انقباض هیکز را به حالت چند مقداری تعمیم داد [۱۰]. بیت اللهی[11] و اژدری[12] قضیهٔ نقطه ثابت را برای نگاشت‌های $(\psi,\phi,\varepsilon,\lambda)$ - انقباضی چند مقداری در فضاهای متریک احتمالی منگر مورد مطالعه قرار دادند [۱]. اکنون، ما رده نگاشت‌های (θ,η) - انقباضی چند مقداری را در فضای شبه b - متریک احتمالی منگر معرفی می‌کنیم و قضیهٔ نقطهٔ ثابت را برای این نوع از انقباض‌ها بیان و اثبات می‌کنیم. سپس نگاشت انقباضی $\beta-\gamma$ - نوع تعمیم یافته را بررسی می‌نماییم. همچنین مثال‌هایی جهت بررسی سودمند و کارا بودن نتایج‌مان ارائه می‌دهیم.

این مقاله ، به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش ۲ ابتدا مفهوم فضای شبه b - متریک احتمالی منگر را معرفی می کنیم و سپس قضیه نقطه ثابت را برای (θ,η) - انقباض‌های چند مقداری تعریف شده روی این فضاها بیان و اثبات می‌نماییم. در بخش ۳ به نگاشت انقباضی $\beta-\gamma$ - نوع تعمیم یافته و بعضی نتایج نقطه ثابت برای این نوع از انقباض‌ها می‌پردازیم.

در زیر، بعضی نمادها ، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز را که بعدها در این مقاله مورد نیاز است بیان می‌نماییم.

تعریف ۱. [۲] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد و فرض کنید $\sigma_b : X \times X \to [0,\infty)$ نگاشتی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) اگر $\sigma_b(x,y)=0$ آنگاه $x=y$،

(۲) برای هر $x,y\in X$، $\sigma_b(x,y)=\sigma_b(y,x)$،

(۳) عدد حقیقی $s\geq 1$ چنان موجود باشد که برای هر $x,y,z\in X$ ،

$$\sigma_b(x,z)\leq s\left[\sigma_b(x,y)+\sigma_b(y,z)\right].$$

در این صورت σ_b یک شبه b - متریک روی X نامیده می‌شود و دوتایی (X,σ_b) یک فضای شبه b –متریک با ثابت s نامیده می‌شود.

مثال ۱. [۲] فرض کنید $X=\{0,1,2\}$. تعریف می‌کنیم

$$\sigma_b(x,y)=\begin{cases}2, & x=y=0,\\ \frac{1}{2}, & otherwise.\end{cases}$$

در این صورت (X,σ_b) یک فضای شبه b- متریک با ثابت $s=2$ است.

---
[6] Hasanvand
[7] Khanehgir
[8] Hadzic
[9] Pap
[10] Zikic
[11] Beitollahi
[12] Azhdari

تعریف ۲. [۷] یک t- نرم (یا یک نرم مثلثی) تابع $*:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$ است به طوری که برای هر $a,b,c,d\in[0,1]$ در خواص زیر صدق کند:

(۱) شرکت‌پذیری : $(a*b)*c=a*(b*c)$.

(۲) جابجایی : $a*b=b*a$.

(۳) وجود عنصر واحد : $a*1=a$.

(۴) یکنوایی : اگر $a\leq b$ و $c\leq d$، آنگاه $a*c\leq b*d$.

یک t- نرم پیوسته است اگر به عنوان یک تابع، پیوسته باشد.

مثال ۲. [۵] فرض کنید $a,b\in[0,1]$. در این صورت $a*_M b:=\min\{a,b\}$، $a*_P\ b:=\ a$ و $a*_L b:=\max\{a+b-1,0\}$ مثال‌هایی از t- نرم‌های پیوسته هستند. در اینجا خواص t- نرم را برای $*_L$ بررسی می‌نماییم . خاصیت شرکت‌پذیری (۱) برقرار است. زیرا داریم

$$(a*b)*c=\max\{a+b+c-2,c-1,0\}=\max\{a+b+c-2,0\}$$

و

$$a*(b*c)=\max\{a+b+c-2,a-1,0\}=\max\{a+b+c-2,0\}.$$

خواص (۲) و (۳) به سادگی بررسی می‌شوند. همچنین اگر $a\leq b$ و $c\leq d$ آنگاه $a+c-1\leq b+d-1$ و لذا $a*c\leq b*d$. از طرفی چون توابع جمع، تفریق و ماکزیمم توابعی پیوسته هستند لذا $*_L$، t-نرمی پیوسته است.

تعریف ۳. [۴] تابع $F:(-\infty,\infty)\longrightarrow[0,1]$ یک تابع توزیع فاصله‌ای منگر نامیده می‌شود اگر صعودی و پیوسته چپ باشد و همچنین $0=F(0)=0,\lim\limits_{t\to-\infty}F(t)$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=$. مجموعه تمام توابع توزیع فاصله‌ای منگر را با D^+ نمایش می‌دهیم. برای مثال تابع تعریف شده با ضابطه زیر یک تابع توزیع فاصله‌ای منگر است:

$$H(t)=\begin{cases}0, & t\leq 0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

تعریف ۴. [۴] یک فضای b- متریک احتمالی منگر (به اختصار PbM- فضای منگر) با ضریب α یک سه‌تایی $(X,F,*)$ است وقتی که X مجموعه‌ای نا تهی، $*$ یک t - نرم پیوسته و F یک نگاشت از $X\times X$ به توی D^+ است ($F_{x,y}$ ، مقدار Fدر نقطه (x,y) را نمایش می‌دهد) و α یک عدد حقیقی در $(0,1]$ است به طوری که شرایط زیر برقرار است :

$(PbM\,1)$ $F_{x,y}(t)=H(t)$ اگر و فقط اگر $x=y$،

$(PbM\,2)$ $F_{x,y}(t)=F_{y,x}(t)$،

$(PbM\,3)$ برای هر $x,y,z\in X$ و هر $s,t\geq 0$ ، $\alpha\in(0,1]$ موجود است به طوری که

$$F_{x,y}(t+s)\geq F_{x,z}(\alpha t)*F_{z,y}(\alpha s).$$

خانواده‌های زیر از توابع خاص در [۵]. در نظر گرفته شده است که ما در بخش ۳ از آن‌ها استفاده می‌نماییم.

تعریف ۵ . تابع $\phi:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$، یک ϕ -تابع نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\phi(t)=0$ اگر و فقط اگر $t=0$.

(۲) ϕ به طور اکید صعودی است و $\phi(t)\to\infty$ هرگاه $t\to\infty$.
(۳) ϕ روی $(0,\infty)$ پیوسته چپ است.
(۴) ϕ در $t=0$ پیوسته است.

در ادامه، رده همه ϕ -توابع را با Φ نمایش می‌دهیم. همچنین رده همه توابع پیوسته صعودی $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ به طوری که $\psi(0)=0$ و $\psi^n(a_n)\to 0$ هرگاه $a_n\to 0$، وقتی که $n\to\infty$، را با Ψ_0 نمایش می‌دهیم.

۲. قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های (θ,η)-انقباضی چند مقداری در فضای شبه b- متریک احتمالی منگر

در این بخش، ابتدا مفهوم فضای شبه b- متریک احتمالی منگر را معرفی می‌کنیم و به ارائه مثال‌هایی از این فضا می‌پردازیم. سپس قضیه اصلی این مقاله یعنی قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های (θ,η)-انقباضی چند مقداری در فضای شبه b- متریک احتمالی منگر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به عنوان کاربردی از نتایج‌مان، مثالی ارائه می‌دهیم که کارایی این نتایج را نشان می‌دهد.

تعریف ۷. یک فضای شبه b-متریک احتمالی منگر (به اختصار $PbML$- فضای منگر) با ضریب α، یک سه‌تایی $(X,F,*)$ است که X مجموعه‌ای ناتهی ، تابع $*$ t- نرمی پیوسته و F نگاشتی از $X\times X$ به توی D^+ هست ($F_{x,y}$ به مقدار F در نقطه (x,y) دلالت می‌کند) و α عددی حقیقی در $(0,1]$ است به طوری که شرایط زیر برقرار است:

$(PbML1)$ اگر $F_{x,y}(t)=H(t)$ آن‌گاه $x=y$،

$(PbML2)$ $F_{x,y}(t)=F_{y,x}(t)$ ،

$(PbML3)$ برای هر $x,y,z\in X$ و هر $s,t\geq 0$ ، $\alpha\in(0,1]$ موجود است به طوری که
$$F_{x,y}(t+s)\geq F_{x,z}(\alpha t)*F_{z,y}(\alpha s).$$

اگر در تعریف ۷، $\alpha=1$ آنگاه $(X,F,*)$ یک فضای شبه متریک احتمالی منگر [۷]. است.

مثال ۳. فرض کنید (X,σ_b) یک فضای شبه b- متریک با ثابت s باشد. نگاشت $F:X\times X\to D^+$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:
$$\forall x,y\in X,\forall t\in\mathbb{R};\quad F_{x,y}(t)=H(t-\sigma_b(x,y)).$$

در این صورت $(X,F,*_M)$ یک فضای شبه b- متریک احتمالی منگر با ضریب $\alpha=\frac{1}{s}$ است.

مثال ۴. فرض کنید (X,σ_b) یک فضای شبه b- متریک با ثابت s باشد. نگاشت $F:X\times X\to D^+$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:
$$F_{x,y}(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t+\sigma_b(x,y)}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0.\end{cases}$$

در این صورت $(X, F, *_M)$ یک فضای شبه b- متریک احتمالی منگر با ضریب $\alpha = \dfrac{1}{s}$ است. در حالت خاص، فرض کنید σ_b مانند مثال ۱ باشد. نشان می‌دهیم $(X, F, *_M)$ یک فضای شبه متریک احتمالی منگر نیست. برای مثال قرار دهید $x = y = 0$ و $z = 2$. در این صورت از $(PbML3)$ با $\alpha = 1$ و هر $t_1, t_2 > 0$ به دست می‌آوریم

$$F_{0,0}(t_1 + t_2) \geq \min\left\{F_{0,2}(t_1), F_{2,0}(t_2)\right\},$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{t_1 + t_2}{t_1 + t_2 + 2} \geq \min\left\{\frac{t_1}{t_1 + \frac{1}{2}}, \quad \frac{t_2}{t_2 + \frac{1}{2}}\right\}.$$

باجایگذاری $t_1 = 1$، $t_2 = 2$ در نامساوی بالا به دست می‌آوریم $\frac{3}{5} \geq \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}$ که تناقض است. لذا $(X, F, *_M)$ یک فضای شبه متریک احتمالی منگر نیست.

تعریف ۸. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در یک $PbML$- فضای منگر $(X, F, *_M)$ باشد. گوییم:

- $\{x_n\}$ همگرا به x است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $\lambda \in (0,1)$، $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که برای هر $n \geq n_0$، $F_{x_n, x}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ (در چنین حالتی می‌نویسیم $x_n \to x$)،
- $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $\lambda \in (0,1)$، $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که برای هر $m, n \geq n_0$، $F_{x_n, x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$،
- $(X, F, *)$ کامل است اگر هر دنباله کوشی، در X همگرا باشد،
- $\{x_n\}$، یک دنبالهٔ G - کوشی است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $p \in \mathbb{N}$، داشته باشیم
$$\lim_{n \to \infty} F_{x_n, x_{n+p}}(\varepsilon) = 1,$$
- $(X, F, *)$، G - کامل است اگر هر دنباله G- کوشی در آن همگرا باشد.

در مثال‌های ۳ و ۴ اگر (X, σ_b) کامل باشد آن‌گاه فضاهای شبه b- متریک احتمالی منگر $(X, F, *_M)$ متناظر نیز کامل هستند.

با تغییرات مختصری در لم ۱۳ از [7] لم زیر را می توان اثبات نمود.

لم ۱. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در $PbML$-فضای منگر $(X, F, *)$ باشد و $x, y \in X$ به طوری که $x_n \to x$ و $x_n \to y$ وقتی $n \to \infty$. در این صورت $x = y$.

لم ۲. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در $PbML$-فضای منگر $(X, F, *)$ باشد به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$، $\lim_{n \to \infty} F_{x_n, x_{n+1}}(t) = H(t)$. در این صورت $\{x_n\}$ یک دنباله G - کوشی در $(X, F, *)$ است.

اثبات. فرض کنید $p, n \in \mathbb{N}$ دلخواه باشند و فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. مشاهده می‌کنیم که

$$F_{x_n, x_{n+p}}(\varepsilon) \geq F_{x_n, x_{n+1}}\left(\frac{\alpha\varepsilon}{p}\right) * F_{x_{n+1}, x_{n+p}}\left(\frac{\alpha(p-1)\varepsilon}{p}\right)$$

$$\geq F_{x_n,x_{n+1}}(\frac{\alpha\varepsilon}{p})*F_{x_{n+1},x_{n+2}}(\frac{\alpha^2\varepsilon}{p})*F_{x_{n+2},x_{n+p}}(\frac{\alpha^2(p-2)\varepsilon}{p})$$
$$\geq \cdots$$
$$\geq F_{x_n,x_{n+1}}(\frac{\alpha\varepsilon}{p})*F_{x_{n+1},x_{n+2}}(\frac{\alpha^2\varepsilon}{p})*F_{x_{n+2},x_{n+3}}(\frac{\alpha^3\varepsilon}{p})*$$
$$\ldots *F_{x_{n+p-2},x_{n+p-1}}(\frac{\alpha^{p-1}\varepsilon}{p})*F_{x_{n+p-1},x_{n+p}}(\frac{\alpha^p\varepsilon}{p}).$$

در عبارت بالا n را به بی‌نهایت میل می‌دهیم . با توجه به پیوستگی t - نرم $*$، به دست می‌آوریم که

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+p}}(\varepsilon)\geq \lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(\frac{\alpha\varepsilon}{p})*F_{x_{n+1},x_{n+2}}(\frac{\alpha^2\varepsilon}{p})*\ldots*F_{x_{n+p-1},x_{n+p}}(\frac{\alpha^p\varepsilon}{p})$$

$$=1*1*\ldots*1=1.$$

پس برای هر $t\in\mathbb{R}$ ، $\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+p}}(t)=H(t)$ و این بدان معناست که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ G -کوشی در $(X,F,*)$ است .

با فرض این‌که $(X,F,*)$ یک $PbML$ - فضای منگر است، منظور از 2^X گردایه همه زیرمجموعه‌های ناتهی X است . $A\subseteq X$ بسته گوییم هرگاه اگر $x\in X$ و برای هر $\varepsilon>0$ و هر $\lambda\in(0,1)$، $z\in A$ چنان موجود باشد که $F_{x,z}(\varepsilon)\geq 1-\lambda$ آنگاه $x\in A$. $c(X)$ گردایه همه زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی X در نظر می‌گیریم. همچنین نماد $\overset{\infty}{\underset{i=1}{*}}w_i$ برابر با مقدار $w_1*w_2*w_3*\ldots$ است .

تعریف ۹. فرض کنید $(X,F,*)$ یک $PbML$ - فضای منگر، $\theta:(0,1)\to(0,1)$ نگاشتی باشد به طوری که برای هر $\lambda\in(0,1)$، $\theta(\lambda)<\lambda$ و $\lim_{n\to\infty}\theta^n(\lambda)=0$ و $\eta:(0,\infty)\to(0,\infty)$ یک نگاشت باشد.
نگاشت $f:X\to 2^X$ یک نگاشت (θ,η) - انقباضی چند مقداری نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y\in X$ و هر $\varepsilon>0$ و هر $\lambda\in(0,1)$ داشته باشیم :

$$F_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\Rightarrow\forall z\in fx,\exists w\in fy;F_{z,w}(\eta(\varepsilon))>1-\theta(\lambda).$$

یادآوری می‌کنیم که $x\in X$ یک نقطه ثابت برای نگاشت چند مقداری $f:X\to 2^X$ است اگر $x\in fx$.

قضیه ۱. فرض کنید $(X,F,*)$ یک $PbML$-فضای منگر G- کامل با $\sup_{0\leq a<1}a*a=1$، $f:X\to c(X)$ یک نگاشت (θ,η)- انقباضی چند مقداری باشد به طوری که برای هر $\varepsilon>0$، $\sum_{n=1}^{\infty}\eta^n(\varepsilon)$ همگرا باشد. اگر برای هر $x_0\in X$، $x_1\in fx_0$ چنان موجود باشد که $F_{x_0,x_1}\in D^+$ و برای هر $\varepsilon>0$،

$$\lim_{n\to\infty}\overset{\infty}{\underset{i=1}{*}}(1-\theta^{n+i}(\varepsilon))=1. \tag{1}$$

آن‌گاه f نقطه ثابت دارد یعنی حداقل یک $x'\in X$ هست که $x'\in fx'$. همچنین فرض کنید اگر x_1 و x_2 دو نقطه ثابت برای f باشند آن‌گاه $F_{x_1,x_2}\in D^+$. در این صورت f دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است.

اثبات. چون $F_{x_0,x_1} \in D^+$ پس برای هر $\lambda \in (0,1)$، $\varepsilon > 0$ وجود دارد که $F_{x_0,x_1}(\varepsilon) > 1-\lambda$. چون f، نگاشت (θ,η) - انقباضی چند مقداری است پس $x_2 \in fx_1$ موجود است به طوری که
$$F_{x_2,x_1}(\eta(\varepsilon)) > 1-\theta(\lambda).$$
با ادامه این روند دنباله $\{x_n\} \subseteq X$ می‌یابیم به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in fx_{n-1}$ و
$$F_{x_n,x_{n-1}}(\eta^{n-1}(\varepsilon)) > 1-\theta^{n-1}(\lambda). \qquad (2)$$
بنابر فرض برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $\lambda \in (0,1)$ داریم $\lim_{n\to\infty}\theta^n(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\eta^n(\varepsilon) = 0$. حال نشان می‌دهیم برای هر $\varepsilon_0 > 0$، $\lim_{n\to\infty} F_{x_n,x_{n-1}}(\varepsilon_0) = 1$. در واقع اگر $\varepsilon_0 > 0$ و $\lambda_0 \in (0,1)$ داده شده باشند و $n_0 \in \mathbb{N}$ به قدر کافی بزرگ باشد به طوری که برای هر $n \ge n_0$، $\eta^n(\varepsilon) \le \varepsilon_0$ و $\theta^n(\lambda) \le \lambda_0$ آنگاه با استفاده از (2) برای هر $n \ge n_0$ داریم
$$F_{x_{n+1},x_n}(\varepsilon_0) \ge F_{x_{n+1},x_n}(\eta^n(\varepsilon)) > 1-\theta^n(\lambda) > 1-\lambda_0.$$

لذا $\lim_{n\to\infty} F_{x_{n+1},x_n}(\varepsilon_0) = 1$. اکنون فرض کنید $\varepsilon_1 > 0$ دلخواه باشد. چون $\sum_{n=1}^{\infty}\eta^n(\varepsilon)$ همگراست پس عدد طبیعی $n_1(\frac{\varepsilon_1}{2})$ هست که $\sum_{n=n_1(\frac{\varepsilon_1}{2})}^{\infty}\eta^n(\varepsilon) < \frac{\alpha\varepsilon_1}{2}$. برای هر $n \ge n_1(\frac{\varepsilon_1}{2})$ با به کارگیری رابطه $(PbML3)$ داریم
$$\begin{aligned} F_{x_{n+2},x_n}(\varepsilon_1) &\ge F_{x_{n+2},x_{n+1}}(\frac{\alpha\varepsilon_1}{2}) * F_{x_{n+1},x_n}(\frac{\alpha\varepsilon_1}{2}) \\ &\ge F_{x_{n+2},x_{n+1}}(\eta^{n+1}(\varepsilon)) * F_{x_{n+1},x_n}(\eta^n(\varepsilon)). \end{aligned}$$
همچنین عدد طبیعی $n_2(\frac{\varepsilon_1}{4})$ هست به طوری که $\sum_{n=n_2(\frac{\varepsilon_1}{4})}^{\infty}\eta^n(\varepsilon) < \frac{\alpha^2\varepsilon_1}{4}$. مجددا با استفاده از $(PbML3)$ برای هر $n \ge \max\left\{n_1(\frac{\varepsilon_1}{2}), n_2(\frac{\varepsilon_1}{4})\right\}$ می‌توان نوشت
$$\begin{aligned} F_{x_{n+3},x_n}(\varepsilon_1) &\ge F_{x_{n+3},x_{n+2}}(\frac{\alpha\varepsilon_1}{2}) * F_{x_{n+2},x_n}(\frac{\alpha\varepsilon_1}{2}) \\ &\ge F_{x_{n+3},x_{n+2}}(\eta^{n+2}(\varepsilon)) * F_{x_{n+2},x_{n+1}}(\frac{\alpha^2\varepsilon_1}{4}) * F_{x_{n+1},x_n}(\frac{\alpha^2\varepsilon_1}{4}) \\ &\ge F_{x_{n+3},x_{n+2}}(\eta^{n+2}(\varepsilon)) * F_{x_{n+2},x_{n+1}}(\eta^{n+1}(\varepsilon)) * F_{x_{n+1},x_n}(\eta^n(\varepsilon)). \end{aligned}$$
از این رو برای هر $p \in \mathbb{N}$، $n(p)$ به اندازه کافی بزرگ می‌توان یافت به طوری که برای هر $n \ge n(p)$ داریم
$$F_{x_{n+p+1},x_n}(\varepsilon_1) \ge \mathop{*}_{i=1}^{p+1} F_{x_{n+i},x_{n+i-1}}(\eta^{n+i-1}(\varepsilon)). \qquad (3)$$
از طرفی با توجه به خواص t- نرم برای هر $p \in \mathbb{N}$ و هر $n \ge n(p)$ داریم
$$\mathop{*}_{i=1}^{p+1}(1-\theta^{n+i-1}(\lambda)) \ge \mathop{*}_{i=1}^{\infty}(1-\theta^{n+i-1}(\lambda)). \qquad (4)$$
از ترکیب روابط (2)، (3) و (4) برای هر $p \in \mathbb{N}$ و هر $n \ge n(p)$ رابطه زیر به دست می‌آید.

$$F_{x_{n+p+1},x_n}(\varepsilon_1) \geq \underset{i=1}{\overset{\infty}{*}}(1-\theta^{n+i-1}(\lambda)). \tag{5}$$

از (1) می توان $n_2(\lambda_1) \in \mathbb{N}$ یافت به طوری که برای هر $n \geq n_2(\lambda_1)$،

$$\underset{i=1}{\overset{\infty}{*}}(1-\theta^{n+i-1}(\lambda)) > 1-\lambda_1. \tag{6}$$

با تلفیق روابط (5) و (6) برای هر $p \in \mathbb{N}$ و هر $n \geq \max\{n(p), n_2(\lambda_1)\}$ به دست می‌آوریم

$$F_{x_{n+p+1},x_n}(\varepsilon_1) \geq 1-\lambda_1.$$

این به آن معناست که $\{x_n\}$ یک دنباله G- کوشی است و چون X، G- کامل است پس $x' \in X$ موجود است که $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$. حال نشان می‌دهیم $x' \in fx'$. برای این منظور با توجه به اینکه $fx' \in c(X)$ کافی است اثبات نماییم برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $\lambda \in (0,1)$، $z \in fx'$ هست به طوری که $F_{x',z}(\varepsilon) \geq 1-\lambda$. چون $\sup_{0\leq a<1} a*a = 1$ پس برای $\lambda \in (0,1)$، $\delta(\lambda \in)$ موجود است به طوری که

$$(1-\delta(\lambda))*(1-\delta(\lambda)) > 1-\lambda$$

و همچنین $\delta'(\lambda) \in (0,1)$ چنان موجود است که $(1-\delta'(\lambda))*(1-\delta'(\lambda)) > 1-\delta(\lambda)$. قرار می-دهیم $\delta''(\lambda) = \min\{\delta(\lambda), \delta'(\lambda)\}$. می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$(1-\delta''(\lambda))*((1-\delta''(\lambda))*(1-\delta''(\lambda))) > 1-\lambda.$$

اکنون $\varepsilon' > 0$ چنان می‌یابیم که $\eta(\varepsilon') < \frac{\alpha^2\varepsilon}{3}$. چون $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ پس $n_1 \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای هر $n \geq n_1$، $F_{x_n,x'}(\frac{\varepsilon'}{3}) \geq 1-\delta''(\lambda)$. از رابطه (2) $n_2 \in \mathbb{N}$ را طوری در نظر می‌گیریم که برای هر $n \geq n_2$، $F_{x_n,x_{n+1}}(\frac{\alpha^2\varepsilon}{3}) > 1-\delta''(\lambda)$ و $n_3 \in \mathbb{N}$ را طوری می‌یابیم که برای هر $n \geq n_3$، $F_{x_n,x'}(\frac{\alpha\varepsilon}{3}) \geq 1-\delta''(\lambda)$. چون f نگاشت (θ,η)- انقباضی است پس $z \in fx'$ موجود است به طوری که برای هر $n \geq n_3$، $F_{x_{n+1},z}(\eta(\varepsilon)) \geq 1-\theta(\delta''(\lambda))$. پس برای هر $n \geq n_3$، رابطه زیر به دست می‌آید.

$$F_{x_{n+1,z}}(\frac{\alpha^2\varepsilon}{3}) \geq F_{x_{n+1,z}}(\eta(\varepsilon')) > 1-\theta(\delta''(\lambda)) > 1-\delta''(\lambda).$$

با انتخاب $n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$ رابطه زیر را می‌توان به دست آورد

$$\begin{aligned} F_{x',z}(\varepsilon) &\geq F_{x',x_n}(\frac{\alpha\varepsilon}{3}) * F_{x_n,x_{n+1}}(\frac{\alpha^2\varepsilon}{3}) * F_{x_{n+1},z}(\frac{\alpha^2\varepsilon}{3}) \\ &\geq (1-\delta''(\lambda))*((1-\delta''(\lambda))*(1-\delta''(\lambda))) > 1-\lambda. \end{aligned}$$

بنابراین $x' \in fx'$.

اکنون فرض کنید x_1 و x_2 دو نقطه ثابت برای f باشند به طوری که $F_{x_1,x_2} \in D^+$. مقدار $\lambda \in (0,1)$ را ثابت ولی دلخواه در نظر می‌گیریم. پس $\varepsilon > 0$ وجود دارد که $F_{x_1,x_2}(\varepsilon) \geq 1-\lambda$. چون f، نگاشت (θ,η)- انقباضی چند مقداری است پس داریم

$$F_{x_1,x_2}(\varepsilon) > 1-\lambda \Rightarrow \forall z \in fx_1, \exists w \in fx_2; F_{z,w}(\eta(\varepsilon)) > 1-\theta(\lambda).$$

قرار می‌دهیم $z = x_1$ و $w = x_2$. پس داریم $F_{x_1,x_2}(\eta(\varepsilon)) \geq 1-\theta(\lambda)$. با ادامه همین روند برای هر $n \in \mathbb{N}$ به

دست می‌آوریم

$$F_{x_1,x_2}(\eta^n(\varepsilon)) \geq 1-\theta^n(\lambda).$$

حالا فرض کنید $\varepsilon_0 > 0$ و $\lambda_0 \in (0,1)$ دلخواه باشند و فرض کنید $n_0 \in \mathbb{N}$ به قدر کافی بزرگ باشد به طوری که برای هر $n \geq n_0$، $\eta^n(\varepsilon) \leq \varepsilon_0$ و $\theta^n(\lambda) \leq \lambda_0$. پس برای هر $n \geq n_0$ داریم

$$F_{x_1,x_2}(\varepsilon_0) \geq F_{x_1,x_2}(\eta^n(\varepsilon)) > 1-\theta^n(\lambda) > 1-\lambda_0.$$

از اینرو برای هر t دلخواه داریم $F_{x_1,x_2}(t) = H(t)$ ولذا با استفاده از شرط $(PbML1)$ ، نتیجه می‌گیریم $x_1 = x_2$. بنابراین f دارای نقطه ثابت منحصربه‌فرد است. در اینجا اثبات مسئله به پایان می‌رسد.

با تغییرات مختصری در اثبات قضیه ۳ . ۲ از [1] گزاره زیر را داریم.

گزاره ۱. تحت فرضیات قضیه ۱ به جز آن که شرط η دو سویی و صعودی باشد جایگزین شرط سری $\sum_{n=1}^{\infty}\eta^n(\varepsilon)$ همگرا باشد آنگاه نگاشت f حداقل یک نقطه ثابت در X دارد.

توجه کنید در گزاره ۱، لزومی ندارد نقطه ثابت f منحصربه‌فرد باشد. به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۵. فرض کنید (X,σ_b) مانند مثال ۱ باشد. نگاشت $F: X\times X \to D^+$ را مانند مثال ۳ در نظر بگیرید. در این صورت $(X,F,*)$ یک $PbML$-فضای منگر G- کامل با ضریب $\alpha = \frac{1}{2}$ است. نگاشت $f: X \to c(X)$ با ضابطه $f(0)=\{1\}$، $f(1)=\{0,1\}$ و $f(2)=\{0,2\}$ وهمچنین نگاشت های $\theta:(0,1)\to(0,1)$ با ضابطه $\theta(\lambda)=\frac{\lambda}{2}$ و $\eta:(0,\infty)\to(0,\infty)$ با ضابطه $\eta(t)=2t$ را در نظر بگیرید. در این صورت f یک نگاشت (θ,η)- انقباضی چند مقداری است و همه شرایط گزاره ۱ برقرار است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نگاشت f دارای دو نقطه ثابت $1,2$ است.

به عنوان کاربردی از قضیه ۱، مثال زیر را بیان می‌نماییم.

مثال ۶ . فرض کنید $C([0,1],\mathbb{R})$ فضای توابع پیوسته از $[0,1]$ به توی $\mathbb{R}$ باشد. این فضا را به شبه b- متریک

$$\sigma_b(x,y) = \max_{t\in[0,1]}(x(t)^2+y(t)^2)^2, \qquad x,y \in C([0,1],\mathbb{R})$$

مجهز می‌نماییم. اکنون نگاشت $F: C([0,1],\mathbb{R})\times C([0,1],\mathbb{R}) \to D^+$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$F_{x,y}(t) = H(t-\sigma_b(x,y)), \quad t>0, \quad x,y \in C([0,1],\mathbb{R}).$$

می‌دانیم که $(C([0,1],\mathbb{R}),F,*)$ یک $PbML$-فضای منگر G- کامل است. نگاشت چند مقداری $f: C([0,1],\mathbb{R}) \to c(C([0,1],\mathbb{R}))$ با ضابطه

$$fx(s') = \left\{\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x(t))^2}{2}\int_0^{s'}\frac{\sin(x(s)^2)}{1+|x(s)|^5}ds\right)^{\frac{1}{2}}, t\in[0,1]\right\}$$

را در نظر بگیرید. همچنین نگاشت های $\theta:(0,1)\to(0,1)$ با ضابطه $\theta(\lambda)=\frac{\lambda}{2}$ و $(0,\infty) \to (0,\infty)$: η با ضابطه

$\eta(t)=\dfrac{t}{2}$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $\lambda\in(0,1)$، هر $\varepsilon>0$ و هر $x,y\in C([0,1],\mathbb{R})$، $F_{x,y}(\varepsilon)\geq 1-\lambda$ اگر و فقط اگر $\varepsilon\geq \max_{t\in[0,1]}(x(t)^2+y(t)^2)^2$. اکنون اگر $z\in fx$ پس $t\in[0,1]$ هست که

$$z(s')=\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x(t))^2}{2}\int_0^{s'}\frac{\sin(x(s)^2)}{1+|x(s)|^5}ds\right)^{\frac{1}{2}},\qquad s'\in[0,1].$$

برای هر $s'\in[0,1]$ قرار دهید $w(s')=\left(\dfrac{\operatorname{Arctan}(y(1))^2}{2}\displaystyle\int_0^{s'}\frac{\sin(y(s)^2)}{1+|y(s)|^5}ds\right)^{\frac{1}{2}}$. در این صورت به سادگی می‌توان بررسی کرد $F_{z,w}(\eta(\varepsilon))\geq 1-\theta(\lambda)$. لذا f یک نگاشت (θ,η)- انقباضی چند مقداری است و همه شرایط قضیه ۱ برقرار است. پس $x'\in(C[0,1],\mathbb{R})$ی هست که $x'\in fx'$.

۳. قضیه نقطه ثابت در فضای شبه b - متریک احتمالی منگر

در این بخش یک قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی $\beta-\gamma$ - نوع تعمیم یافته در فضای شبه b-متریک احتمالی منگر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قبل از آن به معرفی چند مفهوم مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱۰. فرض کنید $(X,F,*)$ یک $PbML$ - فضای منگر و $f:X\to X$ یک نگاشت باشد. همچنین فرض کنید β و γ دو تابع از $X\times X\times(0,\infty)$ به توی $(0,\infty)$ باشند. گوییم f، (β,γ) - پذیرفتنی است اگر برای هر $x,y\in X$ و برای هر $t>0$،

$$\beta(x,y,t)\geq 1\Rightarrow \beta(fx,fy,t)\geq 1,$$
$$\gamma(x,y,t)\leq 1\Rightarrow \gamma(fx,fy,t)\geq 1.$$

تعریف ۱۱. خانواده تمام توابع $h:[0,1]\to[0,1]$ را که در شرایط زیر صدق می‌کند با H_0 نمایش می‌دهیم.

۱) h نزولی باشد،

۲) اگر $\{a_n\}\subset[0,1]$، آنگاه $a_n\to 1$ اگر و فقط اگر $h(a_n)\to 0$.

برای مثال تابع $h:[0,1]\to[0,1]$ با ضابطه $h(t)=(t-1)^2$ به H_0 تعلق دارد.

گزاره ۲. اگر $h\in\mathrm{H}_0$، آنگاه $h(1)=0$. به علاوه $h(t)=0$ اگر و فقط اگر $t=1$.

اثبات. برای این که نشان دهیم $h(1)=0$، کافی است در قسمت (۲) از تعریف ۱۱، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n=1$ در نظر بگیریم. حال اگر برای $t\in[0,1]$ی، $h(t)=0$ آنگاه در قسمت (۲) از تعریف ۱۱، برای هر $n\in\mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم $a_n=t$. از تعریف ۱۱ نتیجه می‌شود $t=1$.

قضیه ۲. فرض کنید $(X,F,*)$ یک $PbML$ - فضای منگر G - کامل با ضریب α باشد و $f:X\to X$ یک نگاشت (β,γ) - پذیرفتنی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱) f نگاشت انقباضی $\beta-\gamma$ - نوع تعمیم یافته باشد یعنی برای هر $k\in\mathbb{N}$، داشته باشیم

$$\beta(x,y,\alpha^k t)h(F_{fx,fy}(\alpha^k\phi(t)))\leq \gamma(fx,fy,\alpha^{k-1}\frac{t}{c})\max\left\{\psi(h(F_{x,y}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{t}{c})))),\right.$$
$$\left.\psi(h(F_{y,fy}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{t}{c}))))\right\},$$

برای هر $x, y \in X$ و برای هر $t > 0$ وقتی که $\phi \in \Phi$، $\psi \in \Psi_0$، $h \in \mathrm{H}_0$ و $c \in (0,1)$.

۲) $x_0 \in X$ چنان موجود باشد که برای هر $t > 0$، $1 \le \beta(x_0, fx_0, t)$، $\gamma(x_0, fx_0, t) \le 1$.

آنگاه f یک نقطه ثابت در X دارد.

به علاوه اگر برای هر $x, y \in Fix(f)$ (منظور از $Fix(f)$ مجموعه نقاط ثابت f است) و برای هر $t > 0$ $1 \le \beta(x, y, t)$ و $\gamma(x, y, t) \le 1$ آنگاه f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

اثبات . ابتدا $x_0 \in X$ را چنان انتخاب می‌کنیم که در شرط (۲) صدق کند و فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله پیکارد f بر پایه x_0 باشد، یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_{n+1} = fx_n$. اگر $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ چنان موجود باشد که $x_{n_0} = x_{n_0+1}$، آنگاه x_0 نقطه ثابتی از f است و قسمت وجودی اثبات تمام می‌شود. اکنون فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $x_n \ne x_{n+1}$. از شرط (۲) نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $t > 0$، $1 \le \beta(x_{n-1}, x_n, t)$ و $\gamma(x_n, x_{n+1}, t) \le 1$. فرض کنید $t_0 > 0$ دلخواه باشد، چون ϕ در صفر پیوسته است پس $r > 0$ هست که $t_0 > \phi(r)$. داریم

$$\begin{aligned} h(F_{x_n,x_{n+1}}(t_0)) &\le h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^k \phi(r))) \le \beta(x_{n-1}, x_n, \alpha^k r) h(F_{fx_{n-1},fx_n}(\alpha^k \phi(r))) \\ &\le \gamma(fx_{n-1}, fx_n, \frac{\alpha^{k-1} r}{c}) \max\left\{\psi(h(F_{x_{n-1},x_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c})))), \psi(h(F_{x_n,fx_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c}))))\right\} \\ &\le \max\left\{\psi(h(F_{x_{n-1},x_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c})))), \psi(h(F_{x_n,fx_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c}))))\right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

دو حالت زیر رخ می دهد :

حالت اول . اگر در عبارت (7) ماکزیمم سمت راست، $\psi(h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c}))))$ باشد آنگاه از خاصیت صعودی بودن ψ داریم

$$\begin{aligned} h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^k \phi(r))) &\le \psi(h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c})))) \\ &\le \psi^2(h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^{k-2}\phi(\frac{r}{c^2})))) \le \ldots \\ &\le \psi^n(h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^{k-n}\phi(\frac{r}{c^n})))). \qquad (8) \end{aligned}$$

چون $\lim_{n\to\infty} \alpha^{k-n}\phi(\frac{r}{c^n}) = \infty$ پس $\lim_{n\to\infty} F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^{k-n}\phi(\frac{r}{c^n})) = 1$. از گزاره ۲ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^{k-n}\phi(\frac{r}{c^n}))) = 0.$$

لذا از خواص ψ ، عبارت زیر به دست می‌آید.

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n(h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^{k-n}\phi(\frac{r}{c^n})))) = 0. \qquad (9)$$

از (8) و (9) رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\lim_{n\to\infty} h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^k \phi(r))) = 0.$$

با به کار گیری دوباره گزاره ۲ داریم

$$\lim_{n\to\infty} F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^k\phi(r)) = 1.$$

لذا نتیجه می‌شود $\lim_{n\to\infty} F_{x_n,x_{n+1}}(t_0) = 1$.

حالت دوم . اگر در عبارت (7) ماکزیمم سمت راست، $\psi(h(F_{x_{n-1},x_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c}))))$ باشد آنگاه داریم

$$h(F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^k\phi(r))) \le \psi(h(F_{x_{n-1},x_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c})))) = \psi(h(F_{fx_{n-2},fx_{n-1}}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{r}{c}))))$$
$$\le \psi^2(h(F_{x_{n-2},x_{n-1}}(\alpha^{k-2}\phi(\frac{r}{c^2})))) \le \dots \le \psi^n(h(F_{x_0,x_1}(\alpha^{k-n}\phi(\frac{r}{c^n})))).$$

حال اگر n را به بی‌نهایت میل دهیم با استدلالی مشابه حالت اول به دست می‌آوریم که

$$\lim_{n\to\infty} F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha^k\phi(r)) = 1$$

و لذا $\lim_{n\to\infty} F_{x_n,x_{n+1}}(t_0) = 1$. حال چون t_0 دلخواه است و در هر دو حالت به $\lim_{n\to\infty} F_{x_n,x_{n+1}}(t_0) = 1$ رسیدیم، پس از لم ۲ نتیجه می‌گیریم که $\{x_n\}$ یک دنباله G- کوشی در فضای G- کامل $(X, F, *)$ است . لذا $z \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to z$ وقتی $n \to \infty$ ، یعنی

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \lambda \in (0,1), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0;\ F_{x_n,z}(\varepsilon) > 1-\lambda.$$

ثابت می‌کنیم که z نقطه ثابتی از f است . برای اثبات این مطلب مشاهده می‌کنیم که برای هر $t > 0$ و هر $n \in \mathbb{N}$

$$F_{z,fz}(t) \ge F_{z,x_{n+1}}(\frac{\alpha t}{2}) * F_{x_{n+1},fz}(\frac{\alpha t}{2}) = F_{z,x_{n+1}}(\frac{\alpha t}{2}) * F_{fx_n,fz}(\frac{\alpha t}{2}). \qquad (10)$$

چون $x_n \to z$ وقتی $n \to \infty$ ، نتیجه می‌گیریم که به خصوص

$$\lim_{n\to\infty} F_{z,x_{n+1}}(\frac{\alpha t}{2}) = 1. \qquad (11)$$

حال نشان می‌دهیم که جمله دوم در سمت راست عبارت (10) یعنی $F_{fx_n,fz}(\frac{\alpha t}{2})$ نیز به یک همگرا است هرگاه n به بی‌نهایت میل کند . فرض کنید $t > 0$ دلخواه ولی ثابت باشد. چون ϕ در صفر پیوسته است پس $\delta > 0$ وجود دارد که $\phi(\delta) < \frac{\alpha t}{2}$. داریم

$$h(F_{fz,fx_n}(\alpha^k\phi(\delta))) \le \beta(z, x_n, \alpha^k\delta) h(F_{fz,fx_n}(\alpha^k\phi(\delta)))$$
$$\le \gamma(fz, fx_n, \frac{\alpha^{k-1}\delta}{c}) \max\left\{\psi(h(F_{z,x_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{\delta}{c})))), \psi(h(F_{x_n,fx_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{\delta}{c}))))\right\}$$
$$\le \max\left\{\psi(h(F_{z,x_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{\delta}{c})))), \psi(h(F_{x_n,fx_n}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{\delta}{c}))))\right\}.$$

اگر در عبارت بالا n به بی‌نهایت میل کند آن‌گاه جمله دوم از سمت راست به صفر میل می‌کند و چون $x_n \to z$ وقتی $n \to \infty$، لذا نتیجه می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} h(F_{fz,f_{x_n}}(\alpha^k\phi(\delta))) \le \lim_{n\to\infty} \psi(h(F_{x_n,z}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{\delta}{c})))) = 0.$$

این رابطه ایجاب می‌کند که $\lim_{n\to\infty} F_{fz,f_{x_n}}(\alpha^k\phi(\delta)) = 1$. لذا

$$\lim_{n\to\infty} F_{fz,f_{x_n}}(\frac{\alpha t}{2})=1. \qquad (12)$$

از ترکیب (10)، (11) و (12) نتیجه می‌گیریم که $F_{z,fz}(t)=1$. بنابراین $z=fz$.

در ادامه به یکتایی نقطه ثابت می‌پردازیم . اگر x و y دو نقطه ثابت متمایز برای f باشند در این صورت از شرط (۲) از فرضیات قضیه داریم

$$\forall t>0, \beta(x,y,t)\geq 1 \,\&\, \gamma(x,y,t)\leq 1.$$

چون ϕ در صفر پیوسته است پس

$$\exists s_0>0;\ \ t>\phi(s_0).$$

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که $F_{x,y}(\alpha^k\phi(s_0))\neq 0$ و

$$\begin{aligned} h(F_{x,y}(\alpha^k\phi(s_0))) &\leq \beta(x,y,\alpha^k s_0)h(F_{fx,fy}(\alpha^k\phi(s_0)))\\ &\leq \gamma(x,y,\alpha^{k-1}\frac{s_0}{c})\max\left\{\psi(h(F_{x,y}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{s_0}{c}))),\psi(h(F_{y,fy}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{s_0}{c}))))\right\}\\ &\leq \max\left\{\psi(h(F_{x,y}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{s_0}{c}))),\psi(h(F_{y,fy}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{s_0}{c}))))\right\}. \end{aligned} \qquad (13)$$

اکنون اگر ماکزیمم سمت راست (13) اولین عبارت باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned} h(F_{x,y}(\alpha^k\phi(s_0))) &\leq \psi(h(F_{x,y}(\alpha^{k-1}\phi(\frac{s_0}{c})))) \leq \psi^2(h(F_{x,y}(\alpha^{k-2}\phi(\frac{s_0}{c^2}))))\\ &\leq \ldots \leq \psi^n(h(F_{x,y}(\alpha^{k-n}\phi(\frac{s_0}{c^n})))). \end{aligned}$$

حد عبارت سمت راست وقتی $n\to\infty$ برابر صفر است . پس $h(F_{x,y}(\alpha^k\phi(s_0)))=0$ که از گزاره ۲ نتیجه می‌شود

$$F_{x,y}(\alpha^k\phi(s_0)))=1.$$

بنابراین داریم $F_{x,y}(\alpha^k\phi(s_0))\leq F_{x,y}(t)$.

از این رو برای هر t ، $F_{x,y}(t)=1$. این ایجاب می‌کند $x=y$ که تناقض است . همچنین اگر ماکزیمم عبارت سمت راست (13) دومی باشد با استدلالی مشابه ثابت می‌شود $x=y$ که تناقض است . پس فرض خلف باطل است و f تنها یک نقطه ثابت در X دارد .

نتیجه ۱ . فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ و $h:[0,1]\to[0,a]$ نزولی باشد و اگر $\{a_n\}\subset[0,1]$، آنگاه $a_n\to 1$ اگر و فقط اگر $h(a_n)\to 0$ وقتی $n\to\infty$ (برای مثال $h(t)=a(t-1)^2$ را در نظر بگیرید) . در این صورت با فرضیات قضیه ۲ به جز این که تابع h در شرایط مذکور صدق کند f نقطه ثابت یکتا در X دارد .

مثال ۷ . فرض کنید $X=\mathbb{R}$ و $\sigma_b:X\times X\to\mathbb{R}^+$ نگاشتی با ضابطه $\sigma_b(x,y)=(|x|+|y|)^2$ باشد . در این صورت σ_b یک شبه b- متریک با ثابت $s=2$ است . فرض کنید $(X,F,*_M)$ یک فضای شبه b- متریک احتمالی منگر با ضریب $s=\frac{1}{2}$ مانند مثال ۳ باشد. نگاشت $f:X\to X$ ، توابع β و γ از $X\times X\times(0,\infty)$ به توی $(0,\infty)$ را به ترتیب با $fx=\frac{x}{2}$ و $\beta(x,y,t)=\gamma(x,y,t)=$ تعریف کنید . حال $\phi,\psi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ با ضابطه

$\phi(t)=\psi(t)=t$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $c=\frac{1}{2}$. نشان می‌دهیم نگاشت (β,γ)- پذیرفتنی f یک نگاشت $\beta-\gamma-$نوع تعمیم یافته است. برای این منظور کافی است شرط زیر را بررسی کنیم .

$$\left(H\left(\frac{t}{2^k}-\left(\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{2}\right)^2\right)-1\right)^2 \leq \max\left\{\left(H\left(\frac{t}{2^{k-2}}-(|x|+|y|)^2\right)-1\right)^2,\left(H\left(\frac{t}{2^{k-2}}-\frac{9}{4}|y|^2\right)-1\right)^2\right\}.$$

برای بررسی درست بودن این رابطه ثابت می‌کنیم که سمت چپ نمی تواند برابر یک و سمت راست برابر صفر باشد.
فرض کنید به برهان خلف ، چنین اتفاقی بیفتد لذا داریم $\frac{t}{2^{k-2}}\leq(|x|+|y|)^2$ و $\frac{t}{2^{k-2}}>(|x|+|y|)^2$ و $\frac{t}{2^{k-2}}\leq\frac{9}{4}|y|^2$ که این تناقض است . پس f یک نگاشت $\beta-\gamma-$ نوع تعمیم یافته است که در تمام شرایط قضیه ۲ صدق می‌کند و نقطه ثابت منحصر به فرد $x=0$ دارد .

References

1. Beitollahi A., Azhdari P., " Multi-valued $(\psi,\phi,\varepsilon,\lambda)$-contraction in probabilistic metric space", Fixed Point Theory Appl., Vol. 10, (2012), 8 pages.

2. Chunfang C., Jian D., Chuanxi Z., "Some fixed point theorems in b-metric like space", Fixed Point Theory Appl., Vol. 122, (2015), 10 pages.

3. Hadzic O., Pap, E., " A fixed point theorem for multivalued mapping in probabilistic metric space and application in fuzzy metric spaces", Fuzzy Sets Syst., Vol. 127, (2002), 333-344.

4. Hasanvand F., Khanehgir M., "Some fixed point theorems in Menger PbM-spaces with an application", Fixed Point Theory Appl., Vol. 81, (2015), 18 pages.

5. Kutbi MA., Gopal D., Vetro C., Sintunavarat W., "Further generalization of fixed point theorems in Menger PM-spaces ", Fixed Point Theory Appl., Vol. 32, (2015), 10 pages.

6. Menger K., " Statistical metrics", Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 28, (1942), 535-537.

7. Rolda'n Lo'pez de Hierro A, de la Sen M., "Some fixed point theorems in Menger probabilistic metric like spaces", Fixed Point Theory Appl., Vol. 176, (2015), 16 pages.

8. Schweizer B., Sklar A., "Probabilistic metric spaces", North-Holland, Amsterdam 1983.

9. Sehgal VM., Bharucha-Reid AT., "Fixed point of contraction mappings in PM-spaces", Math. Syst. Theory, Vol. 6, (1972), 97-102.

10. Zikic-Dosenovic T., "A multivalued generalization of Hicks C-contraction", Fuzzy Sets Syst., Vol. 151, (2005), 549-562.