

S-کنش‌های خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال

مهديه حدادی*، سيد مجتبی ناصر شيخ الاسلامی
دانشگاه سمنان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

دریافت: ۹۷/۰۱/۲۷

پذیرش: ۹۸/۱۰/۰۸

چکیده

در این مقاله قصد داریم مانند آنچه را که لمبک^۱ در مورد تعمیم مفهوم زیرمدول‌های خالص با استفاده از یک رادیکال در رسته R -مدول‌ها انجام داده‌است، برای رسته S -کنش‌ها انجام دهیم. به این منظور، ما نوع خاصی از زیرکنش‌های خالص، یعنی زیرکنش‌های dli -خالص، که مرتبط با مفهوم رادیکال هونکه است را در این رسته معرفی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که برای هر رادیکال هونکه r ، S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص همان S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف هستند. سپس به وسیله هر ایده‌آل چپ r -چگال، عملگر بستاری را معرفی می‌کنیم که ارتباط نزدیکی با مفهوم S -کنش‌های dli -خالص دارد. سپس این ارتباط را به طور مفصل مورد بررسی قرار می‌دهیم. واژه‌های کلیدی: S -کنش، رادیکال، ایده‌آل r -چگال، زیرکنش dli -خالص.

۱. مقدمه

مفهوم خالص بودن با رویکرد تشخیص حل‌پذیری دستگاه از معادلات، از سال ۱۹۵۵ در شاخه‌های مختلف ریاضی مورد مطالعه قرار گرفته است [۲، ۳، ۷، ۱۳، ۴۱، ۲۳]. این مفهوم را می‌توان با در نظر گرفتن دستگاه خاصی از معادلات تعمیم داد، به عنوان مثال [۴، ۵، ۲۱، ۲۲] را ببینید. لمبک در [۲۰] با استفاده از مفهوم نظریهٔ تاب^۲ نوع خاصی از زیرمدول‌های خالص را تعریف کرده است. با توجه به اینکه تناظری یک به یک بین نظریه‌های تاب و رادیکال‌های کوروش-آمیستر در رسته S -کنش‌ها وجود دارد. [۱۷] را ببینید. در بخش ۲، نوع خاصی از زیرکنش‌های خالص، یعنی dli -خالص را نسبت به رادیکال‌های هونکه تعریف و مفاهیم مرتبط با آن را بررسی می‌کنیم. بخش ۳ را به S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص و r -انژکتیو ضعیف اختصاص می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم مفاهیم به طور مطلق dli -خالص و r -انژکتیو ضعیف معادلند و به چند روش آنها را مشخص می‌کنیم. همچنین به مشخص سازی شرایط لازم و کافی برای به طور مطلق dli -خالص بودن تمام S -کنش‌ها می‌پردازیم. سرانجام در بخش ۴، نسبت به هر ایده‌آل چپ r -چگال D ، عملگر بستار c^D را معرفی می‌کنیم و به وسیله آن، S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص را مطالعه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم هر c^D -تک‌ریختی یک r -تک‌ریختی است. منظور از یک S -کنش روی تکواره S ، مجموعه‌ای است مانند A به همراه کنش $(s, a) \mapsto sa$ ، $s \in S$ و $a \in A$ که در دو ویژگی $t(sa) = (ts)a$ و $1a = a$ صدق می‌کند که در آن، 1 عنصر همانی تکواره S است. یک S -کنش A را بدیهی می‌نامیم، هرگاه $|A| \leq 1$. یک هم‌ریختی از S -کنش‌ها، نگاشتی است مانند $f: A \rightarrow B$ با این ویژگی که $f(sa) = sf(a)$ ، برای هر $a \in A$ و

* نویسندهٔ مسئول m.haddadi@semnan.ac.ir

$S \in S$ رده همه S -کنش‌ها به همراه هم ریختی‌های بین آنها تشکیل رسته می‌دهد که آن را با $S\text{-Act}$ نشان می‌دهیم. منظور از زیرکنش B از S -کنش A زیرمجموعه‌ای از A است که $sb \in B$ و $b \in B$ از آنجا که تصویر هم ریخت تک‌ریختی‌ها در S -کنش A با زیرکنش‌های A در تناظر یک به یک هستند، این دو مفهوم را یکی می‌گیریم.

رابطه هم ارزی ρ روی S -کنش A را همنهشتی می‌نامیم، هرگاه برای هر $sa, sa' \in A$ نتیجه دهد $(sa)\rho(sa')$. همه همنهشتی‌ها روی A را با $Con(A)$ نشان می‌دهیم. مجموعه $Con(A)$ مشبکه‌ای کران دار با همنهشتی قطری، $\Delta_A = \{(a, a) | a \in A\}$ به عنوان کوچکترین عضو و همنهشتی سراسری، $\nabla_A = A \times A$ به عنوان بزرگترین عضو است. اشتراک همه همنهشتی‌های روی A که شامل زیرمجموعه دلخواه $C \subseteq A \times A$ هستند را همنهشتی تولید شده توسط C روی A می‌نامیم و با $\theta(C)$ نشان می‌دهیم. برای هر S -کنش A و $\theta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ را به معنای $\theta(\{(a_i, a_j) | 1 \leq i, j \leq n\})$ در نظر می‌گیریم. هر همنهشتی $\chi \in Con(A)$ افزایشی است از A به وسیله χ -رده‌ها و یک دستگاه Σ_χ از χ -رده‌هایی که هر یک زیرکنشی نابدیگی از A هستند را برای ما مشخص می‌کند. هرچند ممکن است Σ_χ نیز، تهی باشد. در این مقاله، ما به جای مفهوم همنهشتی ریس (Rees) تعریف شده در [۱۹]، از مفهوم کلی‌تر ارائه شده در [۲۴] استفاده می‌کنیم. بدین معنی که همنهشتی ρ روی S -کنش A را ریس می‌نامیم، هرگاه هر ρ -رده آن، یک زیرکنش A یا مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد. بنابراین، هر دستگاه Σ ، از زیرکنش‌های مجزا و نابدیگی از S -کنش A ، همنهشتی ریزی مانند ρ_Σ با تعریف زیر را مشخص می‌کند:

$$(a, b) \in \rho_\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \text{برای یک } B \in \Sigma \text{ که } a, b \in B \\ \text{در غیر این صورت } a = b \end{cases}$$

همنهشتی ρ_Σ را همنهشتی تولید شده بوسیله Σ روی A و A/ρ_Σ را خارج قسمت ریزی A روی ρ_Σ می‌نامیم. همچنین هرگاه Σ ، مجموعه تک‌عضوی $\{B\}$ باشد، از نماد ρ_B به جای ρ_Σ استفاده می‌کنیم. در این حالت، خارج قسمت ریزی A/ρ_B را با A/B نشان می‌دهیم. با وجود اینکه همواره χ -رده شامل $a \in A$ را با a/χ نشان می‌دهیم؛ اما وقتی $\chi \in Con(A/B)$ ، χ -رده B در خارج قسمت $(A/B)/\chi$ را با $[B]_\chi$ نشان می‌دهیم. هر همنهشتی χ_B روی زیرکنش B از S -کنش A را می‌توانیم به یک همنهشتی χ_A روی A به صورت زیر گسترش دهیم:

$$(a, b) \in \chi_A \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) \in \chi_B \\ \text{در غیر این صورت } a = b \end{cases}$$

در ادامه، همواره از نماد یکسان برای χ_A و χ_B استفاده می‌کنیم و در نتیجه هر همنهشتی $\chi \in Con(B)$ را به عنوان همنهشتی از $Con(A)$ نیز، در نظر می‌گیریم. به ویژه اگر $B \times B \in Con(B)$ را به روش بالا به همنهشتی‌ای روی A گسترش دهیم، همنهشتی ریس تولید شده توسط B روی A ، یعنی $\rho_B \in Con(A)$ حاصل می‌شود.

- نگارنده r که هر S -کنش A را به یک همنهشتی $r(A) \in Con(A)$ می‌نگارد، رادیکال هونکه یا به طور مختصر، رادیکال نامیده می‌شود، هرگاه:

(i) هر هم‌ریختی $f: A \rightarrow B$ یک نگاشست $r(f): r(A) \rightarrow r(B)$ را القا کند، به گونه ای که هر $(a, \acute{a}) \in r(A)$ به $(f(a), f(\acute{a})) \in r(B)$ نگاشسته شود. باید توجه داشت که $r(A) \in \text{Con}(A)$ و $r(B) \in \text{Con}(B)$ به ترتیب، زیرکنش‌هایی از $A \times A$ و $B \times B$ هستند و $r(f)$ هم‌ریختی بین آنهاست.

(ii) برای S - کنش A داشته باشیم: $r(A/r(A)) = \Delta_{A/r(A)}$

در زیر، تعریف بعضی از انواع رادیکال‌ها که در [۱۶] و [۲۴] معرفی شده اند را می‌آوریم.

• رادیکال r را موروثی می‌نامیم، هرگاه برای هر S -کنش A و $B \leq A$ ، $r(B) = r(A) \cap \Delta_B$.

• رادیکال r را کوروش-آمیستر می‌نامیم، هرگاه:

(i) برای هر S - کنش A ، $r(A)$ هم‌نهشتی ریس باشد.

(ii) برای هر $B \in \sum_{r(A)}$ داشته باشیم: $r(B) = \nabla_B$.

هر رادیکال r ، دو زیر رده از S -کنش‌ها را مشخص می‌کند:

(۱) رده رادیکال (یا رده تاب) با تعریف $\mathbb{R}_r = \{A | r(A) = \nabla_A\}$.

(۲) رده نیمه ساده (یا رده بی تاب) با تعریف $S_r = \{A | r(A) = \Delta_A\}$.

در ادامه، اعضای \mathbb{R}_r را S -کنش r -رادیکال و اعضای S_r را S -کنش r -نیمه ساده می‌نامیم. باید توجه داشت که رده S_r تحت زیرکنش‌ها، حاصل ضرب‌ها و یک‌ریختی‌ها بسته است و شامل همه S -کنش‌های بدیهی است. همچنین هر زیررده S از S -کنش‌ها که تحت زیرکنش‌ها، حاصل ضرب‌ها و یک‌ریختی‌ها بسته و شامل همه S -کنش‌های بدیهی باشد، رادیکالی به شکل r_S با تعریف

$$r_S(A) = \bigcap \{ \chi \in \text{Con}(A) \mid A/\chi \in S \}$$

را مشخص می‌کند. علاوه بر این، $S = S_r$ اگر و تنها اگر $r = r_S$ [۲۴] را ببینید.

از [۲۴] یادآوری می‌کنیم که زیررده \mathbb{R} از S -کنش‌ها، رده رادیکال از یک رادیکال r است، اگر و تنها اگر

(۱) \mathbb{R} شامل همه S -کنش‌های بدیهی باشد.

(۲) تحت تصویر هم‌ریخت‌ها بسته باشد.

(۳) \mathbb{R} دارای ویژگی استقرایی باشد، یعنی برای هر زنجیر صعودی $\{A_i\}_{i \in I} \leq \mathbb{R}$ ، داشته باشیم $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathbb{R}$.

(۴) تحت گسترش هم‌نهشتی‌های ریس بسته باشد؛ یعنی برای هر $A \in S - \text{Act}$ و هر هم‌نهشتی ریس ρ روی A

$$A/\rho \in \mathbb{R} \text{ و } \sum_{\rho} \subseteq \mathbb{R} \text{ نتیجه دهد } A \in \mathbb{R}$$

برای هر رادیکال هونکه r و هر S -کنش A تذکر زیر را درباره $\sum_{r(A)}$ داریم:

تذکر ۱، برای هر رادیکال هونکه r و هر S -کنش A

(i) اگر $r(A)$ - رده X شامل زیرکنشی از A باشد، آن‌گاه X نیز، زیرکنشی از A خواهد بود.

(ii) اگر $B \in \mathbb{R}_r$ زیرکنشی از A باشد، آن‌گاه $X \in \sum_{r(A)}$ چنان وجود دارد که $B \leq X$.

برهان. (i) اگر $X, r(A)$ - رده‌ی شامل زیرکنش B باشد، آن‌گاه X نسبت به S - کنش بسته است. چرا که اگر $b \in B$ را دلخواه در نظر بگیریم، آن‌گاه برای هر $x \in X$ و هر $s \in S$ داریم: $(x, b) \in (A)$ و در نتیجه، $(sx, sb) \in r(A)$. اما چون $sb \in B \subseteq X$ ، نیز، متعلق به X خواهد بود.

(ii) اگر $B \in \mathbb{R}_r$ زیرکنشی از S -کنش A باشد، آن‌گاه بنا به ویژگی (i) تعریف رادیکال هونکه، $r(B) = \nabla_B \subseteq r(A)$. پس $r(A)$ - رده X چنان وجود دارد که $B \in X$. اکنون حکم از (i) نتیجه می‌شود.

خانواده $C = (c_A)_{A \in S-Act}$ که در آن $c_A: \mathbf{Sub}(A) \rightarrow \mathbf{Sub}(A)$ تابعی است که هر زیرکنش $B \leq A$ را به زیرکنش $c_A(B)$ (یا $c(B)$)، اگر باعث اشتباه نشود) از A می‌نگارد، عملگر بستار روی رسته $S-Act$ نامیده می‌شود، اگر در ویژگی‌های زیر صدق کند:

$$(c1) \text{ (ویژگی گسترش) برای هر } B \in \mathbf{Sub}(A), B \leq c_A(B)$$

$$(c2) \text{ (ویژگی یک‌نواپی) برای هر دو زیرکنش } B_1 \text{ و } B_2 \text{ از } A \text{ با این ویژگی که } B_1 \leq B_2 \text{ داشته باشیم } c_A(B_1) \leq c_A(B_2)$$

$$(c3) \text{ (ویژگی پیوستگی) برای هر هم‌ریختی } f: A \rightarrow C, f(c_A(B)) \leq c_C(f(B))$$

خواننده می‌تواند تعریف رسته‌ای عملگر بستاری را در [۸] ببیند.

زیرکنش B از S -کنش A را C -بسته می‌گوییم، هرگاه $c_A(B) = B$ ، همچنین به زیرکنش B از A ، C -چگال می‌گوییم، هرگاه $c_A(B) = A$ ، C -تک‌ریختی $m: E \rightarrow A$ را C -تک‌ریختی می‌گوییم، اگر $m(E)$ در A ، C -چگال باشد.

برای رادیکال r ، هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $c_A^r = (c_A^r)_{A \in S-Act}$ با تعریف $c_A^r(B) = \pi^{-1}([B]_{r(A/B)})$ برای هر S -کنش A و هر زیرکنش B از A . در این صورت چون $B \subseteq [B]_{r(A/B)}$ ، پس $B \leq c_A^r(B)$. یعنی c^r دارای ویژگی گسترش است. برای اثبات ویژگی یک‌نواپی c^r ، برای زیرکنش‌های دلخواه $B_1 \leq B_2$ از S -کنشی مانند A ، هم‌ریختی کانونی $p: A/B_1 \rightarrow A/B_2$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت با استفاده از ویژگی

(i) تعریف رادیکال داریم $[B_1]_{r(A/B_1)} \subseteq [B_2]_{r(A/B_2)}$ از این رو $c_A^r(B_1) \leq c_A^r(B_2)$ در نهایت برای هر هم‌ریختی $f: A \rightarrow C$ و $B \leq A$ ، هم‌ریختی $\bar{f}: A/B \rightarrow C/f(B)$ را با تعریف $\bar{f}(a/B) = f(a)/f(B)$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از ویژگی (i) تعریف رادیکال داریم: $\bar{f}([B]_{r(A/B)}) \subseteq [f(B)]_{r(C/f(B))}$

در نتیجه $f(c_A^r(B)) \leq c_C^r(f(B))$ ، یعنی ویژگی پیوستگی c^r را خواهیم داشت. بنابراین عملگری بستاری روی رسته S -کنش‌ها است. در ادامه، به ترتیب، از واژه‌های Γ -چگال و Γ -بسته و Γ -تک‌ریختی به جای واژه‌های C -چگال، C -بسته و C -تک‌ریختی استفاده می‌کنیم. با توجه به تعریف عملگر بستاری c^r ، زیرکنش B در S -کنش A Γ -چگال است اگر و تنها اگر $\pi^{-1}([B]_{r(A/B)}) = A$ و این تنها در صورتی امکان دارد که رده $[B]_{r(A/B)}$ شامل همه اعضای A باشد یعنی داشته باشیم $r(A/B) = \nabla_{A/B}$. ایده‌آل چپ دلخواه I از S را Γ -چگال می‌گوییم، هرگاه به عنوان زیرکنش از S -کنش S Γ -چگال باشد. یک S -کنش را Γ -انژکتیو می‌گوییم، هرگاه نسبت به Γ -تک‌ریختی‌ها، انژکتیو باشد.

در [۲۳] نشان داده شده است که هر معادله در رسته S -کنش‌ها به یکی از شکل‌های زیر است:

$$(۱) \quad sx = ty$$

$$(۲) \quad sx = tx$$

$$(۳) \quad sx = a$$

که در آن $t, s \in S$ و a عضوی در S -کنش A است.

به معادلاتی که ثابت‌های آنها در S -کنش A است، معادلات روی A می‌گوییم. زیرکنش B از S -کنش A را:

- خالص در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی از معادلات روی B که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب باشد.
 - خالص از نوع سوم در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی از معادلات به شکل $sx = b$ روی B که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب باشد. از این نوع خالص در [۱۹] با عنوان ۱- خالص یاد شده است.
 - دنباله‌ای خالص یا برای سادگی، S -خالص در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه دنباله‌ای از معادلات روی B ، یعنی $\Sigma = \{sx = b_s | s \in S, b_s \in B\}$ که در A دارای جواب است، در B نیز، جواب داشته باشد.
- دستگاه Σ از معادلات روی S -کنش A را سازگار می‌گوییم، هرگاه در S -کنشی شامل A دارای جواب باشد. S -کنش A را به طور مطلق خالص می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی سازگار از معادلات روی A در آن دارای جواب باشد.

۲. خلوص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال

در این بخش، مشابه تعریف لمبک برای زیرمدول‌های خالص [۲۰]، ما نیز، نوعی از زیرکنش‌های خالص را بوسیله رادیکال هونکه تعریف می‌کنیم. درحقیقت، با استفاده از عملگر بستار القا شده تو سط رادیکال هونکه r, c^T ، یک نوع خاص از خالص بودن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. برای رادیکال هونکه r ، زیرکنش B از S -کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال (یا به طور مختصر dli -خالص) می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \in A$ و هر ایده‌آل چپ r -چگال D از S ، اگر $D_a \leq B$ ، آن‌گاه $b \in B$ چنان موجود باشد که برای هر $d \in D$ ، $da = db$.

اگر B زیرکنشی dli -خالص از A باشد، از نماد $B \leq_{d.l.i.p} A$ استفاده می‌کنیم. همچنین مجموعه همه زیرکنش‌های dli -خالص از A را با $P_{d.l.i.p}(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. زیرکنش B از S -کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ می‌گوییم، هرگاه برای هر ایده‌آل چپ D از S ، B زیرکنشی s -خالص از A در رسته D -کنش‌ها باشد. همچنین زیرکنش B از S -کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ متناهی مولد می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل چپ متناهی مولد D از S ، B زیرکنشی s -کنش خالص از A در رسته D -کنش‌ها باشد.

تذکر ۲.۳. (۱) به راحتی می‌توان برر سی کرد که برای هر رادیکال هونکه r و هر S -کنش A ، $(P_{d.l.i.p}(A), \leq_{d.l.i.p})$ ، یک مجموعه مرتب جزئی است.

(۲) اگر تعریف ۲.۱ را با تعریف S -کنش‌های s -خالص که در [۵] مطرح شده است، مقایسه کنیم، چون برای هر رادیکال هونکه r روی S -Act، هر نیم‌گروه S یک ایده‌آل چپ r -چگال از خودش است، می‌توان گفت که هر S -کنش dli -خالص یک S -کنش s -خالص نیز، هست؛ اما عکس این مطلب درست نیست. مثال ۴،۲ را ببینید.

(۳) با استفاده از قسمت دوم می‌توان انژکتیوی نسبت به زیرکنش‌های dli -خالص را با نتایج مشابه [۶] تعریف نمود.

مثال ۲.۴. فرض کنید $S = \{0, s, t\}$ نیم‌گروهی با جدول کیلی زیر باشد:

	•	s	t
•	•	•	•
s	•	s	t
t	•	•	•

همچنین فرض کنید که رده \mathbb{R} بستاری مجموعه $\{\{0, s\}, \{0\}\}$ تحت تصویر هم‌ریخت‌ها، ویژگی استقرایی و گسترش همنهشتی‌های ریس باشد. در این صورت رده \mathbb{R} ، یک رادیکال کورش-آمیتسر $r_{\mathbb{R}}$ معرفی می‌کند. قضیه ۴.۲ از [۲۴] را ببینید. چون $S/\{0, t\} \cong \{0, s\}$ پس $S/\{0, t\} \in \mathbb{R}$. بنابراین، $\{0, t\}$ ایده آل چپ $r_{\mathbb{R}}$ -چگالی از S است. فرض کنید $A = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 7}$ یک S -کنش با جدول کیلی زیر باشد:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
•	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
s	a_1	a_6	a_3	a_4	a_4	a_6	a_4
t	a_1	a_4	a_1	a_1	a_3	a_1	a_3

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $B = \{a_1, a_3, a_4, a_7\}$ زیرکنشی s -خالص از A است؛ اما در dli خالص نیست. درحقیقت، $a_{\cdot} = \{a_1, a_4\} \leq B$ ، $\{0, t\}$ درحالی که هیچ $a \in B$ وجود ندارد که $a_{\cdot} = \{0, t\}$ ، در ادامه، رابطه بین زیرکنش‌های خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ به عنوان تعمیمی از مفهوم زیرکنش‌های dli -خالص و زیرکنش‌های خالص از نوع سوم را در قضیه ۵.۲ و قضیه ۶.۲ بررسی خواهیم کرد.

قضیه ۲.۵. فرض کنید B زیرکنشی از S -کنش A باشد. در این صورت هر دستگاه از معادلات $\sum = \{s_i x_i = b_i \mid i \in I, b_i \in B, s_i \in S\}$ که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب خواهد بود؛ اگر و تنها اگر B در A خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ باشد.

برهان. (\Leftarrow) فرض کنید $a \in A$ و D ایده‌آل چپی از S با ویژگی $Da \leq B$ باشد. در این صورت a جوابی از $\sum = \{d_i x = b_i \mid d_i a = b_i \text{ یا } b_i \in B \text{ و } d_i \in D\}$ است. بنابراین، با استفاده از فرض جوابی از \sum در B مانند \hat{b} وجود دارد. در نتیجه، برای $d_i \in D$ داریم: $d_i a = \hat{b}_i$.

(\Rightarrow) فرض کنید $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$ جوابی از دستگاه معادلات $\sum = \{s_i x_i = b_i \mid i \in I, b_i \in B, s_i \in S\}$ باشد. در این صورت برای هر $i \in I$ ، $D_i = \{s \in S \mid sa_i \in B\}$ با ویژگی $D_i a_i \leq B$ است. بنابراین با استفاده از فرض، برای هر $i \in I$ ، $\hat{b}_i \in B$ چنان وجود دارد که برای هر $s \in D_i$ ، $sa_i = s\hat{b}_i$ ، به ویژه داریم: $s_i \hat{b}_i = b_i$. در نتیجه، \sum در B دارای جواب است.

با استدلالی همانند برهان قضیه ۵.۲، به راحتی می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۶. زیرکنش B از S -کنش A با خالص از نوع سوم است، اگر و تنها اگر B نسبت به ایده‌آل‌های چپ، متناهی مولد در A خالص باشد.

قضیه ۲.۷. به ازای رادیکال هونکه دلخواه r ، هر زیرکنش r -بسته B از S -کنش A در A - dli خالص است.

برهان. برای اثبات، نشان می‌دهیم برای هر زیرکنش سره r -بسته B از A و $a \in A/B$ هیچ ایده‌آل چپ r -چگال D از S با ویژگی $Da \subseteq B$ وجود ندارد. فرض کنید این گونه نباشد؛ (فرض خلف) یعنی ایده‌آل چپ سره r -چگال D از S چنان وجود داشته باشد که برای $Da \subseteq B$ در این صورت از r -چگال بودن D در S داریم $S/D \in \mathbb{R}_r$ چون \mathbb{R}_r تحت هم‌ریختی بسته است، $Sa/Da \in \mathbb{R}_r$. همچنین $Sa/(B \cap Sa) \cong S \cdot (a/B)$ کافی است یک‌ریختی $\varphi: Sa/(B \cap Sa) \rightarrow S \cdot (a/B)$ که هر $sa/(B \cap Sa) \in S \cdot (a/B)$ را به $S \cdot a/B \in S \cdot (a/B)$ می‌نگارد را در نظر بگیریم، و داریم:

$$Sa/(B \cap Sa) = (Sa/Da)/((B \cap Sa)/Da) \in \mathbb{R}_r$$

پس $S \cdot (a/B) \in \mathbb{R}_r$. اکنون با استفاده از تذکر ۱،۱ داریم $[B]_{r(A/B)} \subseteq S \cdot (a/B)$ یعنی برای هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ داریم $Sa \subseteq \pi^{-1}([B]_{r(A/B)})$ در نتیجه، $Sa \subseteq c_A^r(B) = B$ که تناقض است. به دلیل نقش مهمی که ایده‌آل چپ r -چگال در تعریف و مطالعه زیرکنش‌های dli -خالص دارند، بررسی ویژگی‌های ایده‌آل‌های چپ r -چگال دارای اهمیت است. در ادامه، به بررسی برخی از ویژگی‌هایی که ایده‌آل‌های چپ r -چگال از S را به طور دقیق مشخص می‌کنند، می‌پردازیم؛ اما ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که هر هم‌نهشتی ω روی S یک رابطه $\omega = \{(sa, ta) \mid (s, t) \in \omega, a \in A\}$ روی S -کنش A معرفی می‌کند. به وضوح این رابطه انعکاسی، تقارنی و سازگار با کنش A است؛ ولی ممکن است انتقالی نباشد. به همین دلیل، هم‌نهشتی تولید شده توسط A ، ω ، یعنی $\theta(\omega, A)$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۲.۸. فرض کنید r رادیکالی هونکه و ω ، هم‌نهشتی روی S باشد. در این صورت داریم:

$$r\left(\frac{S}{\omega}\right) = \left\{ \left(\frac{s}{\omega}, \frac{t}{\omega}\right) \in \frac{S}{\omega} \times \frac{S}{\omega} \mid sa = ta, \omega a = \Delta_{Sa} \text{ با } a \in A \text{ و هر } A \in S_r \right\}$$

برهان. اگر طرف راست تساوی بالا را X بنامیم، آن‌گاه برای عضو $(1/\omega)/r(S/\omega)$ از S -کنش r -نیمه‌ساده $(S/\omega)/r(S/\omega)$ داریم: $((1/\omega)/r(S/\omega)) = \Delta_{S/\omega}$. بنابراین، برای هر عضو $(s/\omega, t/\omega)$ از X داریم: $(s/\omega)/r(S/\omega) = (t/\omega)/r(S/\omega)$ یعنی $s(1/\omega)/r(S/\omega) = t(1/\omega)/r(S/\omega)$. پس $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$ در نتیجه، $X \subseteq r(S/\omega)$ حال فرض کنیم $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$. همچنین فرض کنیم که S -کنش r -نیمه‌ساده A و $a \in A$ به گونه‌ای موجود باشند که $\omega A = \Delta_{Sa}$. نشان می‌دهیم $sa = ta$. به این منظور، هم‌ریختی $f_a: S/\omega \rightarrow A$ با تعریف $f_a(s/\omega) = sa$ را در نظر می‌گیریم. از ویژگی اول، تعریف رادیکال هونکه داریم: $(sa, ta) \in r(A)$ ؛ اما r -نیمه‌ساده است. از این‌رو، $sa = ta$.

اگر ω هم‌نهشتی ریس تولید شده به وسیله ایده‌آل چپی از S باشد، آن‌گاه قضیه بالا می‌تواند نتایج بیشتری به دست دهد. نتیجه زیر را ببینید.

نتیجه ۲.۹. (۱) فرض کنید r رادیکالی هونکه و D ایده‌آل چپی از S باشد. در این صورت داریم:

$$r\left(\frac{S}{D}\right) = \left\{ \left(\frac{s}{D}, \frac{t}{D}\right) \in \frac{S}{D} \times \frac{S}{D} \mid sa = ta, |Da| = 1 \text{ با } a \in A \text{ و } A \in S_r \right\}$$

(۲) فرض کنید r رادیکالی هونکه، $A \in S_r$ و ω هم‌نهشتی تولید شده به وسیله $\{(s_i, t_i)\}_{i \in I}$ روی S باشد به گونه‌ای که $S/\omega \in \mathbb{R}_r$. در این صورت $a \in A$ جوابی برای $\sum = \{s_i x = t_i x\}_{i \in I}$ است، اگر و تنها اگر برای هر $s, t \in S$ داشته باشیم: $sa = ta$.

(۳) فرض کنید r رادیکال هونکه و $\sum = \{s_i x = b\}_{i \in I}$ دستگاهی از معادلات روی S -کنش r -نیمه ساده A باشد، به گونه‌ای که D ، ایده‌آل چپ تولید شده به وسیله ضرایب \sum ، چگال و هم‌نهشتی تولید شده به وسیله مجموعه ضرایب \sum برابر با ρ_D باشد. در این صورت \sum دارای جواب در $A \in S_r$ است، اگر و تنها اگر b یک عنصر صفر و تنها جواب دستگاه \sum در A باشد.

برهان. (۱) برای اثبات، کافی است در قضیه ۸،۲، ω را هم‌نهشتی ریس تولید شده توسط ایده‌آل D در نظر بگیریم.
(۲) حکم به راحتی از این حقیقت اثبات شده در قضیه ۸،۲ نتیجه می‌شود که $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$ ، اگر و تنها اگر برای هر $a \in A \in S_r$ ، $a = \Delta_{S,a} \omega$ نتیجه دهد $sa = ta$.
(۳) این قسمت به سادگی از ترکیب (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۱۰. گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) D ایده‌آل چپ r -چگالی از S است.

(۲) اگر $A \in S_r$ و $a, b \in A$ با این ویژگی باشند که $Da = \{b\}$ ، آن‌گاه b عنصر صفری از A است و $Sa = \{b\}$.

(۳) اگر $A \in S_r$ و $a, b \in A$ با این ویژگی باشند که $Da = \{b\}$ ، آن‌گاه $a = b$ و b عنصر صفری از S -کنش A است.

برهان. (۱) \Rightarrow (۲) اگر $A \in S_r$ ، $a, b \in A$ و $Da = \{b\}$ ، آنگاه $|Da| = 1$. با استفاده از قسمت اول نتیجه ۹،۲، از r -چگال بودن D نتیجه می‌گیریم که برای هر $s, t \in S$ ، $sa = ta$. بنابراین داریم: $Sa = \{b\}$. از طرفی برای هر $s \in S$ و $d \in D$ داریم: $sb = sda = b$. یعنی b عنصر صفری از S -کنش A است.

$$(۲) \Rightarrow (۳)$$

(۱) \Rightarrow (۳) فرض کنید $(s/D, t/D) \in \nabla_{S/D}$. در این صورت چون هر عنصر a با این ویژگی که $|Da| = 1$ از S -کنش r -نیمه ساده A برابر صفر است، پس $a = sa = ta$. از این رو با استفاده از قسمت (۱) از نتیجه ۹،۲ داریم: $(s/D, t/D) \in r(S/D)$. در نتیجه $\nabla_{S/D} \leq r(S/D)$ و این، برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۲.۱۱. فرض کنید r رادیکالی هونکه و $\sum = \{s_i x = b\}_{i \in I}$ دستگاه معادلات معرفی شده در قسمت (۳) نتیجه ۲.۹ باشد. در این صورت اگر \sum دارای جوابی در A باشد، آن‌گاه $b/r(A)$ زیرکنش dli -خالصی از A خواهد بود که شامل همه جواب‌های \sum در A است.

برهان. فرض کنید a جوابی از $\{s_i x = b\}_{i \in I}$ باشد. در این صورت $a/r(A)$ جوابی از دستگاه $\{s_i x = b/r(A)\}_{i \in I}$ در $A/r(A)$ است. بنابراین، با استفاده از قسمت (۳) از نتیجه ۹،۲، $b/r(A)$ عنصر صفری از $A/r(A)$ است و $b/r(A) = a/r(A)$ زیرکنشی از A است. برای اثبات dli -خالص بودن $b/r(A)$ در A ، فرض کنید D ایده‌آل چپ $-r$ چگالی از S باشد و برای $a \in A$ داشته باشیم: $Da \leq b/r(A)$. در این صورت $D.(a/r(A)) = \{b/r(A)\}$. بنابراین با استفاده از قسمت (۳) نتیجه ۹،۲ داریم: $a/r(A) = b/r(A)$ ، یعنی $a \in b/r(A)$. در نتیجه $b/r(A)$ در A ، dli -خالص است.

قضیه ۲.۱۲. فرض کنید B زیرکنشی از S -کنش A باشد و $a \in A$. در این صورت اگر ایده‌آل چپ $-r$ چگال D از S و $b \in B$ چنان وجود داشته باشند که $Db = Da$ ، آن‌گاه $a \in c_A^r(B)$.

برهان. فرض کنید D ایده‌آل چپ $-r$ چگال از S باشد، به گونه‌ای که برای $a \in A$ و $b \in B$ داشته باشیم که $Da = Db$. در این صورت، بسته بودن \mathbb{R}_r تحت تصویر هم‌ریختی‌ها نتیجه می‌دهد که تصویر S/D تحت هم‌ریختی $f: S/D \rightarrow A/B$ ، با تعریف $f(s/D) = sa/B$ ، یک S -کنش $-r$ رادیکال است. یعنی $f(S/D) \in \mathbb{R}_r$. لازم به ذکر است که چون $Da = Db$ ، خوش‌تعریف است. همچنین داریم $f((s_1 s_2)/D) = (s_1 s_2)a/B = s_1 f(s_2/D)$ یعنی f هم‌ریختی است. بنابراین، با استفاده از تذکر (i) ۱،۱، یک $r(A/B)$ -رده X چنان وجود دارد که $S.(a/B) \leq X$. اما $Db = Da \leq Sa$ و $Db \leq B$. پس تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ یک زیرکنش بدیهی از $S.(a/B)$ است. بنابراین، $X \cap [B]_{r(A/B)} \neq \emptyset$. از این رو، چون X و $a/B \in [B]_{r(A/B)}$ ، رده‌هایی با اشتراک ناتهی هستند، پس $X = [B]_{r(A/B)}$. در نتیجه، $a/B \in [B]_{r(A/B)}$ یعنی $a \in c_A^r(B)$.

۳. S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف و S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص

در این بخش S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف و به طور مطلق dli -خالص را بررسی می‌کنیم. در واقع در این بخش نشان می‌دهیم که S -کنش‌های به طور مطلق dli -خالص همان S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف هستند.

۳.۱. S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف.

تعریف ۳.۱. برای رادیکال داده شده r ، S -کنش A را r -انژکتیو ضعیف می‌نامیم، اگر دارای ویژگی انژکتیو نسبت به همه نشاننده‌ها از ایده‌آل‌های چپ $-r$ چگال به S باشد.

ابتدا مشابه لم ۲،۳،۵ از [19] درباره S -کنش‌های انژکتیو ضعیف و گزاره ۲،۲ از [۱۵] درباره S -کنش‌های α -انژکتیو، تذکر زیر را که به راحتی از تعریف به دست می‌آید درباره S -کنش‌های r -انژکتیو ضعیف ارائه می‌کنیم.

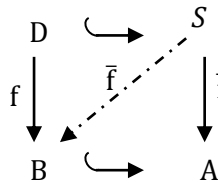
تذکر ۳.۲. S -کنش A ، r -انژکتیو ضعیف است، اگر و تنها اگر برای هر هم‌ریختی $f: D \rightarrow A$ که در آن D ایده‌آل چپ $-r$ چگال از S است، عنصری مانند $a \in A$ چنان موجود باشد که برای هر $d \in D$ داشته باشیم $f(d) = da$. واقع، کافی است برای تعریف گسترش هم‌ریختی f ، $f: S \rightarrow A$ قرار دهیم $f(1) = a$.

قضیه ۳.۳. برای رادیکال داده شده r ، هر S -کنش r -انژکتیو ضعیف در هر گسترش dli -خالص است.

برهان. فرض کنید B زیرکنش r -انژکتیوی ضعیف از S -کنش A و D ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. همچنین فرض کنید a عنصری دلخواه از A با این ویژگی باشد که $Da \leq B$. در این صورت چون B, r -انژکتیو ضعیف است، پس با استفاده از تذکر بالا، برای هم‌ریختی $f: D \rightarrow B$ با تعریف $f(d) = da$ ، عنصر $b \in B$ با ویژگی $f(d) = db$ برای هر $d \in D$ وجود دارد. بنابراین برای هر $d \in D$ ، $db = da$.

قضیه ۳.۴. فرض کنید A یک S -کنش r -انژکتیو ضعیف باشد. در این صورت هر زیرکنش dli -خالص از A, r -انژکتیو ضعیف است.

برهان. فرض کنید $f: D \rightarrow B$ هم‌ریختی‌ای از ایده‌آل r -چگال D به زیرکنش dli -خالص B از S -کنش A باشد. وجود هم‌ریختی $\bar{f}: S \rightarrow A$ با توانایی جابه‌جا کردن مربع زیر از r -انژکتیو ضعیف بودن A نتیجه می‌شود.

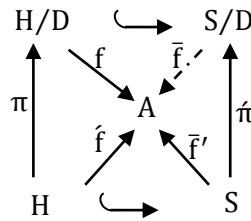


بنابراین، برای هر $d \in D$ ، داریم $f(d) = d\bar{f}(1)$ و $D\bar{f}(1) \leq B$. در نتیجه، چون B زیرکنش dli -خالص از A است، پس $b \in B$ چنان موجود است که برای هر $d \in D$ ، $f(d) = d\bar{f}(1) = db$. حال می‌توانیم گسترش $\bar{f}: S \rightarrow A$ از f را به وسیله $\bar{f}(s) = sb$ برای هر $s \in S$ ، تعریف کنیم. به وضوح \bar{f} مثلث بالای را در مربع بالا جابه‌جا می‌کند و این یعنی B, r -انژکتیو ضعیف است.

نتیجه ۳.۵. هر زیرکنش r -بسته از یک S -کنش r -انژکتیو ضعیف، r -انژکتیو ضعیف است.

قضیه ۳.۶. اگر S -کنش A, r -انژکتیو ضعیف باشد، آنگاه A نسبت به همه نگاشت‌های شمول به S/D انژکتیو است که در آن D ایده‌آل چپ r -چگال دلخواه است.

برهان. با استفاده از قضیه تناظر، هر زیرکنش از S/D به صورت H/D است که در آن H زیرکنشی از S و شامل D است. بنابراین چون D در S, r -چگال است و H شامل D است، H نیز در S, r -چگال است و بنابراین، هر زیرکنش H/D از S/D که به شکل K/D است که $D \leq K \leq S$ ، در $S/D, r$ -چگال است. حال فرض کنید $f: H/D \rightarrow A$ یک هم‌ریختی باشد. در این صورت هم‌ریختی $f = f \circ \pi$ را خواهیم داشت که در آن $\pi: H \rightarrow H/D$ هم‌ریختی کانونی است. در نتیجه، با استفاده از فرض، گسترش $\bar{f}: S \rightarrow A$ از f با ویژگی $\bar{f}|_H = f \circ \pi$ وجود دارد. پس داریم $\rho D \leq \ker f \leq \ker (f \circ \pi) = \ker (\bar{f})$. اکنون با استفاده از قضیه هم‌ریختی برای S -کنش‌ها، هم‌ریختی $\bar{f}: S/D \rightarrow A$ را با تعریف $\bar{f}(s/D) = \bar{f}(s)$ برای هر $s/D \in S/D$ ، تعریف می‌کنیم و برای هر $h \in H$ داریم: $\bar{f}(h/H) = \bar{f}(h) = f \circ \pi(h) = f(h/D)$ و این حکم را ثابت می‌کند. نمودار زیر، روند اثبات را به روشنی مشخص می‌کند.



۳.۲. S - کنش‌های به طور مطلق dli - خالص

در ادامه، مفهوم S -کنش به طور مطلق dli - خالص را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم به طور مطلق dli - خالص بودن با r -انژکتیوی ضعیف بودن معادل است. همچنین شرایطی را که تحت آنها همه S -کنش‌ها به طور مطلق dli - خالص هستند را معین می‌کنیم.

تعریف ۳.۷. برای رادیکال هونکه داده شده r ، S -کنش A را به طور مطلق dli - خالص می‌نامیم، هر گاه A در هر گسترش از خود dli - خالص باشد.

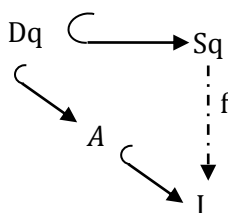
ما در [۱۸] نشان داده‌ایم که برای هر رادیکال هونکه r و هر S -کنش A ، غلاف r -انژکتیو، $E_r(A)$ ، وجود دارد. در قضیه بعد نشان می‌دهیم که به کمک غلاف‌های r -انژکتیو می‌توان S -کنش‌های به طور مطلق dli - خالص را مشخص کرد.

قضیه ۳.۸. برای هر S -کنش A گزاره‌های زیر معادلند:

- (۱) A به طور مطلق dli - خالص است.
- (۲) در هر گسترش r -انژکتیو از خود dli - خالص است.
- (۳) در گسترش غلاف r -انژکتیو خود، $E_r(A)$ ، dli - خالص است.
- (۴) A ، S -کنش r -انژکتیو ضعیف است.
- (۵) در گسترش r -انژکتیو از خود dli - خالص است.

برهان. به وضوح استلزام‌های $(۱) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۳)$ برقرار هستند. همچنین $(۲) \Rightarrow (۴)$ و $(۴) \Rightarrow (۵)$ ، به ترتیب، از قضایای ۳.۳ و ۳.۴ نتیجه می‌شوند.

برای اثبات $(۵) \Rightarrow (۱)$ ، فرض کنید A در گسترش r -انژکتیو، مثلاً I ، dli - خالص و Q گسترشی از S -کنش A و D ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. همچنین فرض کنید برای $q \in Q$ داشته باشیم $Dq \leq A$. در این صورت با توجه به بسته بودن \mathbb{R}_r تحت هم‌ریختی‌ها، Dq در Sq ، r -چگال است. بنابراین هم‌ریختی $f: Sq \rightarrow I$ وجود دارد که مثلث زیر را جابه‌جا می‌کند.



به علاوه، $Df(q) = f(Dq) = Dq \leq A$. پس به دلیل dli - خالص بودن A در I ، عنصری مانند a در A چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$ ، $df(q) = da$. اما برای هر $d \in D$ داریم: $df(q) = f(dq) = dq$. بنابراین، برای هر $d \in D$ ، $dq = da$ و این یعنی A در Q ، dli - خالص است.

قضیه ۳.۹. هر زیرکنش dli - خالص از S - کنش به طور مطلق dli - خالص، S - کنشی بطور مطلق dli - خالص است.

برهان. برای اثبات، از قضیه ۸،۳ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر زیرکنش dli - خالص B از S - کنش به طور مطلق dli - خالص A ، در گسترش غلاف r - انژکتیو $E_r(B)$ ، dli - خالص است. به این منظور، فرض کنید $a \in E_r(B)$ و ایده‌آل چپ r - چگالی از S باشد، به گونه‌ای که $Da \leq B$. در این صورت چون $B \leq A$ ، پس داریم $Da \leq A$. بنابراین، dli - خالص بودن A در $E_r(A)$ وجود $\hat{a} \in A$ با ویژگی $da = d\hat{a}$ ، برای هر $d \in D$ را تضمین می‌کند. پس داریم $D\hat{a} = Da \leq B$. حال با استفاده از dli - خالص بودن B در A می‌توانیم وجود $b \in B$ را با ویژگی $db = d\hat{a} = da$ برای هر $d \in D$ را نتیجه بگیریم. پس B در $E_r(B)$ ، dli - خالص است و این، همان چیزی است که به دنبالش بودیم.

قضیه ۲.۷. به همراه قضیه بالا، نتیجه زیر را به ما می‌دهد.

نتیجه ۳.۱۰. هر زیرکنش r - بسته از یک S - کنش به طور مطلق dli - خالص، به طور مطلق dli - خالص است.

قضیه ۳.۱۱. گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) تکواره S به طور مطلق dli - خالص است؛ یعنی هر S - کنش دلخواه به طور مطلق dli - خالص است.

(۲) هر S - کنش در هر گسترش r - انژکتیو از خود، dli - خالص است.

(۳) هر S - کنش در گسترش غلاف r - انژکتیو خود، dli - خالص است.

(۴) هر S - کنش، r - انژکتیو ضعیف است.

(۵) هر S - کنش در گسترش r - انژکتیو از خود، dli - خالص است.

(۶) هر ایده‌آل چپ r - چگال S در S ، dli - خالص است.

(۷) هر ایده‌آل چپ r - چگال D از S دارای همانی راست e_D است.

(۸) هر ایده‌آل چپ r - چگال از S توسط عنصری خودتوان تولید می‌شود.

برهان. استلزام‌های (۱) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۴) \Rightarrow (۵) \Rightarrow (۱)، به سرعت از قضیه ۸،۳ نتیجه می‌شوند. همچنین (۱) \Rightarrow (۶) بدیهی است. (۶) \Rightarrow (۷) فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r - چگال از S باشد. در این صورت به وضوح داریم $D \cdot 1 \leq D$. بنابراین، با استفاده از فرض، عنصر $e_D \in D$ با ویژگی $d = d1 = de_D$ ، برای هر $d \in D$ وجود دارد؛ یعنی D شامل همانی راستی مانند e_D است.

(۷) \Rightarrow (۳) برای اثبات، فرض می‌کنیم A یک S - کنش دلخواه باشد و نشان می‌دهیم A در $E_r(A)$ ، dli - خالص است. به این منظور، فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r - چگال باشد و برای $z \in E_r(A)$ داشته باشیم $Dz \leq A$. در این صورت برای هر $d \in D$ داریم $d(e_D z) = (de_D)z = dz$ و $e_D z$ متعلق به A است. بنابراین، A در $E_r(A)$ ، dli - خالص است.

$(\lambda) \Rightarrow (4)$ فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. در این صورت، بنا به فرض، نگاشت همانی $id_D: D \rightarrow D$ می‌تواند به هم‌ریختی $f: S \rightarrow D$ گسترش یابد. پس $f(1)$ عنصری خودتوان است و برای هر $d \in D$ داریم $d = df(1)$. در نتیجه، D توسط $f(1)$ تولید می‌شود.

$(\lambda) \Rightarrow (8)$ فرض کنید A یک S -کنش $f: D \rightarrow A$ یک هم‌ریختی باشد که در آن D یک ایده‌آل چپ r -چگال از S است. در این صورت بنا به فرض، D دارای مولد خودتوانی مانند e_D است. به و ضوح هم‌ریختی $f: S \rightarrow A$ با ضابطه $f(s) = sf(e_D)$ گسترشی از f توسط نگاشت شمول $l: D \rightarrow S$ است و این یعنی A r -انژکتیو است.

۴. بستار یک زیرکنش به وسیله یک ایده‌آل چپ r -چگال

فرض کنید D ایده‌آل چپ r -چگالی باشد و B زیرکنشی از S -کنش A ، به دلیل نقش مهم عناصر $a \in A$ با ویژگی $Da \leq B$ ، در dli -خالص بودن B در A (تعریف ۱،۲ را ببینید) علاقه به بررسی بستار $\bar{B} = \{a \in A \mid Da \leq B\}$ از B امری طبیعی است؛ اما گاهی مجموعه \bar{B} زیرکنشی از A نیست. بنابراین، زیرکنش تولید شده به وسیله \bar{B} را به عنوان بستار B در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $c_A^D(B) := \{a \in A \mid Da \leq B\}$.

تذکر ۴.۱. اگر D یک ایده‌آل r -چگال از S باشد، آن‌گاه برای هر زیرکنش B از S -کنش A داریم $c_A^D(B) = \{a \in A \mid Da \leq B\}$. بخش ۲ از [۹] را ببینید.

در ادامه نشان می‌دهیم c_A^D ، یک عملگر بستار است و ارتباط بین c^D و S -کنش‌های dli -خالص را می‌یابیم. همچنین تعمیمی از مفهوم انژکتیو دنباله‌وار ([۱۲] را ببینید)، یعنی c^D -انژکتیو، ارائه می‌دهیم و خوش‌رفتاری c^D -انژکتیوی را به سادگی به عنوان نتیجه‌ای ساده از این مقاله نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید D ایده‌آل چپ r -چگالی از S باشد. خانواده $c = (c_A^D)_{A \in S-Act}$ که در آن هر c_A^D به صورت $c_A^D(B) = \{a \in A \mid Da \leq B\}$ ، برای هر زیرکنش B از A ، تعریف می‌شود، عملگر بستاری در رشته $S-Act$ است.

برهان. به وضوح c_A^D ویژگی‌های گسترش و یک‌نوایی را داراست. برای اثبات ویژگی پیوستگی، فرض کنید $f: A \rightarrow X$ یک هم‌ریختی باشد و $f(b) \in f(c_A^D(B))$. در این صورت $a \in A$ به گونه‌ای وجود دارد که $Da \leq B$ و $sa = b$ ، برای $s \in S$. بنابراین، داریم $Df(a) \leq f(B)$. یعنی $f(a) \in \{x \in X \mid Dx \leq f(B)\}$. پس $f(b) = sf(a) \in f(B)$. در نتیجه، c_A^D دارای ویژگی پیوستگی است.

حال می‌توانیم با استفاده از قضیه ۱۲.۲ نتیجه زیر را به دست آوریم.

نتیجه ۴.۳. برای هر زیرکنش dli -خالص B از S -کنش A ، داریم: $\cup_D c_A^D(B) \leq c_A^r(B)$.

در قضیه زیر، رابطه بین به طور مطلق dli -خالص بودن S و عملگر بستار c^D ، در شرایطی که هر ایده‌آل چپ از S یک ایده‌آل است را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴.۴. فرض کنید هر ایده‌آل چپ از S یک ایده‌آل باشد. در این صورت هر S -کنش، به طور مطلق dli -خالص است، اگر و تنها اگر برای هر گسترش A از یک S -کنش B و هر ایده‌آل r -چگال D از S ، B در رشته D -کنش‌ها درون‌بر $c_A^D(B)$ باشد.

برهان. (\Leftarrow) بنا به فرض به ازای هر $b_x \in B$ ، $x \in c_A^D(B)$ چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$ داریم $dx = db_x$. اکنون نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم.

$$f: c_A^D(B) \rightarrow B$$

$$x \mapsto \begin{cases} b_x & x \in c_A^D(B)/B \\ x & x \in B \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که چون $c_A^D(B)/B$ و B مجزا هستند، f خوش تعریف است. همچنین چون برای هر $x \in c_A^D(B)$ و هر $d \in D$ داریم $dx = db_x \in B$ پس $f(dx) = f(db_x) = db_x = df(x)$ اگر $x \in c_A^D(B)/B$ و $f(dx) = dx = df(x)$ اگر $x \in B$ بنابراین، f یک هم‌ریختی در رشته D -کنش‌ها است. همچنین $f|_B$ نگاشت همانی است. در نتیجه، f یک درون‌بری است.

(\Rightarrow) فرض کنید H و D ایده‌آل‌های r -چگالی از S باشند و $f: c_S^H(D) \rightarrow D$ یک درون‌بری باشد. در این صورت با استفاده از قضیه ۳.۱۱، برای هر ایده‌آل r -چگال S از D کافی است نشان دهیم D در S ، dli -خالص است. اگر برای هر $s \in S$ داشته باشیم $HS \leq D$ ، آن‌گاه برای هر $h \in H$ داریم $hf(s) = f(hs) = hs$ یعنی D در S dli -خالص است. در نتیجه، با استفاده از قضیه ۳.۱۱ هر S -کنش به طور مطلق di -خالص است.

لم ۴.۵. فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از S -کنش A باشد به گونه‌ای که $Sb \cap Sb' \neq \emptyset$ و $Sb \in \mathbb{R}_r$ ، برای هر $b, b' \in B$ در این صورت اگر $\cup_{b \in B} Sb = A$ ، آن‌گاه $A \in \mathbb{R}_r$.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر $X \in \sum_{r(A)}$ چنان وجود دارد که $Sb \leq X$ و در نتیجه، $X = A$ چون $Sb \in \mathbb{R}_r$ ، پس تذکر ۱.۱ وجود $X_b \in \sum_{r(A)}$ با این ویژگی که $Sb \leq X_b$ را نتیجه می‌دهد. اما اعضای $\sum_{r(A)}$ از هم مجزا هستند و برای هر $b, b' \in A$ داریم $Sb \cap Sb' \neq \emptyset$ بنابراین برای هر $b, b' \in B$ داریم $X_b = X_{b'}$. پس $A = \cup_{b \in B} Sb = X_b$ یعنی A ، S -کنشی r -رادیکال است.

قضیه ۴.۶. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و B یک زیرکنش r -رادیکال از S -کنش A باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل r -چگال D از S ، $c_A^D(B)$ زیرکنشی r -رادیکال از A است.

برهان. فرض کنید a عنصری از S -کنش A با ویژگی $Da \leq B$ باشد. در این صورت چون D ایده‌آل r -چگالی از S است، پس داریم $S/D \in \mathbb{R}_r$. بنابراین، با توجه به بسته بودن \mathbb{R}_r تحت تصویر هم‌ریخت، Sa/Da و در نتیجه، $Sa/(Sa \cap B) \cong S.(a/B)$ عضو \mathbb{R}_r هستند. همچنین اگر $\acute{a} \in A$ و $D\acute{a} \leq B$ ، آن‌گاه تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: c_A^D(B) \rightarrow c_A^D(B)/B$ عنصر صفری از $c_A^D(B)/B$ و مشمول در $S.(a/B) \cap S.(\acute{a}/B)$ است. پس با استفاده از لم ۴.۵ داریم $c_A^D(B)/B \in \mathbb{R}_r$. اما \mathbb{R}_r تحت گسترش هم‌نهشتی‌های ریس بسته است و $B \in \mathbb{R}_r$. بنابراین $c_A^D(B)/B \in \mathbb{R}_r$ و این، برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۴.۷. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و B یک زیرکنش dli -خالص از S -کنش A باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل r -چگال D از S ، زیرکنش B در $c_A^D(B)$ ، r -چگال است.

برهان. برای اثبات، نشان می‌دهیم $r(c_A^D(B)/B) = \nabla_{c_A^D(B)/B}$. فرض کنید $x/B \in c_A^D(B)/B$ در این صورت با استفاده از تعریف $c_A^D(B)$ ، عنصر s از S و $a \in A$ با ویژگی $Da \leq B$ چنان وجود دارد که $x = sa$. حال چون B زیرکنشی dli -خالص از A است، پس $b \in B$ چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$ ، $db = da$. بسته بودن \mathbb{R}_r تحت هم‌ریختی نتیجه می‌دهد که $S \cdot (a/B) \in \mathbb{R}_r$. بنابراین $\sum r(c_A^D(B)/B)$ چنان وجود دارد که $X_x \in \sum r(c_A^D(B)/B)$ چنان وجود دارد که $x/B \in S \cdot (a/B) \leq X_x$ اما تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: c_A^D(B) \rightarrow c_A^D(B)/B$ عنصر صفری از $S \cdot (a/B)$ است و $\sum r(c_A^D(B)/B)$ متشکل از زیرکنش‌های مجزای $c_A^D(B)/B$ است. بنابراین همه X_x ها با هم برابرند. در نتیجه، $r(c_A^D(B)/B) = \nabla_{c_A^D(B)/B}$.

تعریف ۴.۸. S -کنش Q را c^D -انژکتیو می‌نامیم، هرگاه نسبت به c^D -تک‌ریختی‌ها انژکتیو باشد.

نتیجه ۴.۳. هر زیرکنش r -بسته از یک S -کنش به طور مطلق dli -خالص، به طور مطلق dli -خالص است.

تذکر ۴.۹. با استفاده از واژه‌گزینی بنشافسکی در [۱۰، ۱۱]، انژکتیوی نسبت به یک رده M از تک‌ریختی‌ها در یک رشته را خوش رفتار می‌نامیم، هرگاه در قضایای خوش رفتاری صدق کند.

ما در [۱۸] نشان داده‌ایم که برای رادیکال هونکه r اگر M رده r -تک‌ریختیها باشد، آن‌گاه M -انژکتیوی خوش رفتار است. در ادامه، نشان خواهیم داد که برای هر ایده‌آل r -چگال و خودتوان D رده زیرکنش‌های c^D -چگال یک رادیکال کورش-آمیتر را تولید می‌کند. در نتیجه، c^D -انژکتیوی، برای هر ایده‌آل r -چگال و خودتوان D ، خوش رفتار است.

قضیه ۴.۱۰. برای هر ایده‌آل t -چگال D از S با ویژگی $D = D^t$ رده

$$\{B \text{ زیر کنشی } c^D - \text{چگال از } A \text{ باشد} \mid A/B \text{ تحت یکرختی، یعنی } \\ C = I(\{A/B \text{ باشد} \mid A \text{ چگال از } c^D - \text{چگال از } A \text{ باشد})\}$$

رده رادیکال از یک رادیکال کورش-آمیتر است.

برهان. برای اثبات، از قضیه ۲.۴ از [۲۴] استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم C تحت (۱) تصویر هم‌ریخت‌ها، (۲) گسترش هم‌نهشتی‌های ریس و (۳) ویژگی استقرایی، بسته است.

(۱) فرض کنید B زیرکنش c^D -چگال از یک S -کنش A و $f: A/B \rightarrow C$ هم‌ریختی‌ای پوشا باشد. در این صورت چون f پوشاست، پس برای هر $a \in A$ ، $c \in C$ چنان وجود دارد که $f(a/B) = c$. همچنین چون B در A c^D -چگال است، پس $\hat{a} \in A$ و $s \in S$ چنان وجود دارد که $s\hat{a} = a$ و $D\hat{a} \leq B$. بنابراین، برای هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/B$ داریم $\pi: A \rightarrow A/B$ و $sf(\hat{a}/B) = f(a/B) = c$ و $Df(\hat{a}/B) \leq f(\pi(B))$. در نتیجه، $f(\pi(B))$ در S -کنش C ، c^D -چگال است. حال چون B تحت π به عضو صفر A/B نگاشته می‌شود و هم‌ریختی‌ها، صفر را به صفر می‌برند، لذا $f(\pi(B))$ در C زیرکنش تک‌عضوی صفر است و اگر هر کنش را به هم‌ریختی صفر تقسیم کنیم، باز هم با خودش یکرخت می‌شود، داریم $C \cong C/f(\pi(B))$. پس $C \in \mathbb{C}$.

(۲) فرض کنید A یک S -کنش و ρ هم‌نهشتی ریزی روی A به گونه‌ای باشد که $\rho \subseteq C$ و $A/\rho \in C$. در این صورت تصویر ρ $B \in \sum$ تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: A \rightarrow A/\rho$ عنصر صفری از A/ρ است؛ اما با استفاده از تذکر ۴.۱ و تعریف رده C ، به راحتی می‌توان نشان داد که هر عضو C از C دقیقاً یک عنصر صفر θ_C دارد و برای هر

$c \in C$ داریم $Dc = \{\theta_c\}$. بنابراین $|\sum \rho| \leq 1$. در حالت $\sum \rho = \theta$ حکم بدیهی است. پس فرض می‌کنیم $|\sum \rho| = 1$. در این حالت از این حقیقت که $A/\rho \in C$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که زیرکنش $B \in \sum \rho$ در $A - c^D$ چگال است. پس برای هر $a \in A$ داریم $Da \leq B$. در نتیجه چون $B \in C$ ، پس عنصر θ در B چنان موجود است که به ازای هر $d \in D$ ، $Dda = \{\theta\}$. بنابراین با استفاده از فرض داریم $Da = D^2 a = \{\theta\}$ یعنی $A \in C$ و در نتیجه، C تحت گسترش همنهشتی‌های ریس بسته است.

(۳) فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر صعودی در C باشد. در این صورت برای هر $i \in I$ ، عنصری مانند θ_i در A_i چنان موجود است که برای هر $a \in A_i$ ، $Da = \{\theta_i\}$. چون زنجیری صعودی است، پس برای هر $i \in I$ داریم $\theta_i = \theta_1$. از این رو برای هر $a \in \cup_{i \in I} A_i$ داریم $a \in \cup_{i \in I} A_i / \theta_1 \in C$.
در قسمت اول برهان قضیه ۴.۱۰ حکم قوی‌تری را ثابت کرده‌ایم. درحقیقت این قسمت از برهان حتی اگر ایده‌آل چپ D ایده‌آل یا خودتوان نباشد نیز، صحیح است. بنابراین قضیه زیر به سادگی از قسمت اول برهان قضیه ۱۰.۴ به دست می‌آید.

قضیه ۴.۱۱. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و D یک ایده‌آل چپ r -چگال از S باشد. در این صورت بستار $C = I \left(\{B\} \text{ زیرکنشی } c^D \text{ - چگال از } A \text{ باشد} \mid A/B \text{ تحت یکریختی، یعنی - چگال از } A \text{ باشد} \mid A/B \right)$ $C = I \left(\{B\} \text{ زیرکنشی } c^D \text{ یک زیررده از رده رادیکال } \mathbb{R}_r \text{ است. گذشته از این، هر زیرکنش } c^D \text{ - چگال از یک } S \text{-کنش } A \text{ در آن } r \text{-چگال است.} \right)$

برهان. با استفاده از برهان ۴.۱۰ رده C تحت تصویر هم‌ریخت بسته است. همچنین $C \cap S_r$ از S -کنش‌های بدیهی تشکیل شده است. در واقع اگر $X \in C \cap S_r$ ، آن‌گاه یکریختی $f: A/B \rightarrow X$ که در آن B زیرکنش c^D -چگالی از A است، وجود دارد. بنابراین وقتی که $\pi: A \rightarrow A/B$ هم‌ریختی کانونی باشد، $f(\pi(B))$ زیرکنش c^D -چگال از X خواهد بود. لذا از تعریف عملگر بستار c^D می‌توان نتیجه گرفت که برای هر عنصر a از X ، $\acute{a} \in X$ و $s \in S$ چنان وجود دارد که $s\acute{a} = a$ و $D\acute{a} = f(\pi(B))$. پس با استفاده از قضیه ۲.۱۰، $a = \acute{a} = f(\pi(B))$ عنصر صفری از X است. در نتیجه، S -کنش X بدیهی است. حال با استفاده از قضیه ۳.۲ از [۲۴] داریم $C \leq \mathbb{R}_r$. بنابراین چون برای هر زیرکنش c^D -چگال B از یک S -کنش A داریم $A/B \in C$ ، پس $A/B \in \mathbb{R}_r$. یعنی هر زیرکنش c^D -چگال از A در آن r -چگال است و این، همان حکم است.

نتیجه ۴.۱۲. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و D ایده‌آل r -چگالی از S با ویژگی $D = D^2$ باشد. در این صورت:

$$C \subseteq \mathbb{R}_r \quad (۱)$$

(۲) هر S -کنش r -انژکتیو، c^D -انژکتیو است.

برهان. (۱) واضح است.

(۲) بنا به قضیه بالا، چون هر زیرکنش c^D -چگال از S -کنشی مانند A ، در $A - r$ چگال است، S -کنش‌های r -انژکتیو نسبت به c^D -تکریختی‌ها انژکتیو هستند.

References

1. B. Banaschewski. *Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras*. In Proc. Conf. on Universal Algebra (Queen's Univ., Kingston, Ont., 1969), pages 131-147. Queen's Univ., Kingston, Ont., 1970.
2. B. Banaschewski. *Equational compactness of G-sets*. Canad. Math. Bull., 17:11-18, 1974.
3. B. Banaschewski and E. Nelson. *Equational compactness in equational classes of algebras*. Algebra Universalis, 2:152-165, 1972.
4. H. Barzegar. *Sequentially pure injectivity*. Quaest. Math., 38(2):191-201, 2015.
5. H. Barzegar and M.M. Ebrahimi. *Sequentially pure monomorphisms of acts over semigroups*. Eur. J. Pure Appl. Math., 1(4):41-55, 2008.
6. H. Barzegar, M.M. Ebrahimi, and M. Mahmoudi. *Essentiality and injectivity relative to sequential purity of acts*. Semigroup Forum, 79(1):128-144, 2009.
7. P.M. Cohn. *On the free product of associative rings*. Math. Z., 71:380-398, 1959.
8. D. Dikranjan and W. Tholen. *Categorical structure of closure operators, volume 346 of Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995. *With applications to topology, algebra and discrete mathematics*.
9. M.M. Ebrahimi. *On ideal closure operators of M-sets*. Southeast Asian Bull. Math., 30(3):439-444, 2006.
10. M.M. Ebrahimi, M. Haddadi, and M. Mahmoudi. *Injectivity in a category: an overview on well behavior theorems*. Algebras Groups Geom., 26(4):451-471, 2009.
11. M.M. Ebrahimi, M. Haddadi, and M. Mahmoudi. *Injectivity in a category: an overview on smallness conditions*. Categ. General Alg. Struct. Appl., 2(1):83-112, 2014.
12. M.M. Ebrahimi, M. Mahmoudi, and L. Shahbaz. *Proper behaviour of sequential injectivity of acts over semigroups*. Comm. Algebra, 37(7):2511-2521, 2009.
13. S. Gacsályi. *On pure subgroups and direct summands of abelian groups*. Publ. Math. Debrecen, 4:89-92, 1955.
14. V. Gould. *Completely right pure monoids*. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, 87(1):73-82, 1987.
15. V. Gould. *Coperfect monoids*. Glasgow Math. J., 29(1):73-88, 1987.
16. M. Haddadi and M.M. Ebrahimi. *A radical extension of the category of S-sets*. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 43(5):1153-1163, 2017.

17. M. Haddadi and S.M.N. Shaykholislami. *On radical and torsion theory in the category of S-acts*. arXiv:1806.07075v1, 2018.
18. M. Haddadi and S.M.N. Shaykholislami. *Radical-injectivity in the category S-act*. arXiv:1806.07077v1, 2018.
19. M. Kilp, U. Knauer, and A. V. Mikhaev. *Monoids, acts and categories, volume 29 of De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000. *With applications to wreath products and graphs, a handbook for students and researchers*.
20. J. Lambek. *Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients. With an appendix by H. H. Storrer on torsion theories and dominant dimensions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 177. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
21. M. Mahmoudi and M.M. Ebrahimi. *Purity and equational compactness of projection algebras*. Appl. Categ. Structures, 9(4):381-394, 2001.
22. M. Mahmoudi and Gh. Moghaddasi. *Sequential purity and injectivity of acts over some classes of semigroups*. Taiwanese J. Math., 15(2):737-744, 2011.
23. P. Normak. *Purity in the category of M-sets*. Semigroup Forum, 20(2):157-170, 1980.
24. R. Wiegandt. *Radical and torsion theory for acts*. Semigroup Forum, 72(2):312-328, 2006.