S- کنش‌های خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال

مهدیه حدادی*، سید مجتبی ناصر شیخ الاسلامی
دانشگاه سمنان، دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

دریافت: ۹۷/۰۱/۲۷ پذیرش: ۹۸/۱۰/۰۸

چکیده

در این مقاله قصد داریم مانند آنچه را که لمبک[1] در مورد تعمیم مفهوم زیرمدول‌های خالص با استفاده از یک رادیکال در رسته R- مدول‌ها انجام داده‌است، برای رسته S-کنش‌ها انجام دهیم. به این منظور، ما نوع خاصی از زیرکنش‌های خالص، یعنی زیرکنش‌های dli- خالص، که مرتبط با مفهوم رادیکال هونکه است را در این رسته معرفی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که برای هر رادیکال هونکه r، S-کنش‌های به طور مطلق dli- خالص همان S-کنش‌های r- انژکتیو ضعیف هستند. سپس به وسیله هر ایده‌آل چپ r- چگال، عملگر بستاری را معرفی می‌کنیم که ارتباط نزدیکی با مفهوم S-کنش‌های dli- خالص دارد. سپس این ارتباط را به طور مفصل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: S-کنش، رادیکال، ایده آل r- چگال، زیرکنش dli- خالص.

۱. مقدمه

مفهوم خالص بودن با رویکرد تشخیص حل‌پذیری دستگاه از معادلات، از سال ۱۹۵۵ در شاخه‌های مختلف ریاضی مورد مطالعه قرار گرفته است [۲، ۳، ۷، ۱۳، ۴۱، ۲۳]. این مفهوم را می‌توان با در نظر گرفتن دستگاه خاصی از معادلات تعمیم داد، به عنوان مثال [۴، ۵، ۲۱، ۲۲] را ببینید. لمبک در [۲۰] با استفاده از مفهوم نظریهٔ تاب[2] نوع خاصی از زیرمدول‌های خالص را تعریف کرده است. با توجه به اینکه تناظری یک به یک بین نظریه های تاب و رادیکال‌های کوروش-آمیستر در رسته S-کنش‌ها وجود دارد. [۱۷] را ببینید. در بخش ۲، نوع خاصی از زیرکنش‌های خالص، یعنی dli-خالص را نسبت به رادیکال‌های هونکه تعریف و مفاهیم مرتبط با آن را بررسی می‌کنیم. بخش ۳ را به S-کنش‌های به طور مطلق dli-خالص و r-انژکتیو ضعیف اختصاص می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم مفاهیم به طور مطلق dli-خالص و r- انژکتیو ضعیف معادلند و به چند روش آنها را مشخص می‌کنیم. همچنین به مشخص‌سازی شرایط لازم و کافی برای به طور مطلق dli-خالص بودن تمام S-کنش‌ها می‌پردازیم. سرانجام در بخش ۴، نسبت به هر ایده‌آل چپ r- چگال D، عملگر بستار c^D را معرفی می‌کنیم و به وسیله آن، S-کنش‌های به طور مطلق dli- خالص را مطالعه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم هر c^D - تک‌ریختی یک r-تک‌ریختی است. منظور از یک S-کنش روی تکواره S، مجموعه‌ای است مانند A به همراه کنش $(s,a) \mapsto sa$، $S \times A \to A$، برای $a \in A$ و $s \in S$ که در دو ویژگی $t(sa) = (ts)a$ و $1a = a$ صدق می‌کند که در آن، ۱ عنصر همانی تکواره S است. یک S-کنش A را بدیهی می‌نامیم، هرگاه $|A| \leq 1$. یک هم‌ریختی از S-کنش‌ها، نگاشتی است مانند $f: A \to B$ با این ویژگی که $f(sa) = sf(a)$، برای هر $a \in A$ و

* نویسندهٔ مسئول m.haddadi@semnan.ac.ir

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

$s \in S$. رده همهٔ S-کنش‌ها به همراه هم ریختی های بین آنها تشکیل رسته می‌دهد که آن را با *S-Act* نشان می‌دهیم. منظور از زیرکنش B از S-کنش A زیرمجموعه‌ای از A است که $sb \in B$ و $b \in B$. از آنجا که تصویر هم ریخت تک‌ریختی ها در S-کنش A با زیرکنش‌های A در تناظر یک به یک هستند، این دو مفهوم را یکی می‌گیریم.

رابطهٔ هم ارزی ρ روی S-کنش A را همنهشتی می‌نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $a\rho a'$ نتیجه دهد $(sa)\rho(sa')$. همه همنهشتی ها روی A را با *Con(A)* نشان می‌دهیم. مجمموعه *Con(A)* مشبکه ای کران دار با همنهشتی قطری، $\Delta_A = \{(a,a)|a \in A\}$، به عنوان کوچکترین عضو و همنهشتی سرا سری، $\nabla_A = A \times A$، به عنوان بزرگترین عضو است. اشتراک همه همنهشتی های روی A که شامل زیرمجموعهٔ دلخواه $C \subseteq A \times A$ هستند را همنهشتی تولید شده توسط C روی A می‌نامیم و با $\Theta(C)$ نشان می‌دهیم. برای هر S-کنش A و $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$، $\Theta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ را به معنای $\Theta(\{(a_i, a_j)|1 \le i, j \le n\})$ درنظر می‌گیریم. هر همنهشتی $\chi \in Con(A)$ افرازی است از A به وسیله χ-رده ها و یک دستگاه Σ_χ از χ-رده هایی که هر یک زیرکنشی نابدیهی از A هستند را برای ما مشخص می‌کند. هرچند ممکن است Σ_χ نیز، تهی باشد. در این مقاله، ما به جای مفهوم همنهشتی ریس (*Rees*) تعریف شده در [۱۹]، از مفهوم کلی‌تر ارائه شده در [۲۴] استفاده می‌کنیم. بدین معنی که همنهشتی ρ روی S-کنش A را ریس می‌نامیم، هرگاه هر ρ-رده آن، یک زیرکنش A یا مجموعه‌ای تک عضوی باشد. بنابراین، هر دستگاه Σ، از زیرکنش های مجزا و نابدیهی از S-کنش A، همنهشتی ریسی مانند ρ_Σ با تعریف زیر را مشخص می‌کند:

$$(a,b) \in \rho_\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in B \ B \in \sum & \text{برای یک} \\ a = b & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همنهشتی ρ_Σ را همنهشتی تولید شده بوسیله Σ روی A و A/ρ_Σ را خارج قسمت ریسی A روی ρ_Σ می‌نامیم. همچنین هرگاه Σ، مجموعه تک عضوی $\{B\}$ باشد، از نماد ρ_B به جای ρ_Σ استفاده می‌کنیم. در این حالت، خارج قسمت ریسی A/ρ_B را با A/B نشان می‌دهیم. با وجود اینکه همواره χ-رده شامل $a \in A$ را با a/χ نشان می‌دهیم؛ اما وقتی $\chi \in Con(A/B)$، χ-رده B در خارج قسمت $(A/B)/\chi$ را با $[B]_\chi$ نشان می‌دهیم. هر همنهشتی χ_B روی زیرکنش B از S-کنش A را می‌توانیم به یک همنهشتی χ_A روی A به صورت زیر گسترش دهیم:

$$(a,b) \in \chi_A \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b) \in \chi_B & \\ a = b & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در ادامه، همواره از نماد یکسان برای χ_B و χ_A استفاده می‌کنیم و درنتیجه هر همنهشتی $\chi \in Con(B)$ را به عنوان همنهشتی از *Con(A)* نیز، درنظر می‌گیریم. به ویژه اگر $B \times B \in Con(B)$ را به روش بالا به همنهشتی‌ای روی A گسترش دهیم، همنهشتی ریس تولید شده توسط B روی A، یعنی $\rho_B \in Con(A)$ حاصل می‌شود.

- نگارنده r که هر S - کنش A را به یک همنهشتی $r(A) \in Con(A)$ می‌نگارد، رادیکال هونکه یا به طور مختصر، رادیکال نامیده می‌شود، هرگاه :

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

(i) هر هم‌ریختی $f: A \to B$ یک نگاشت $r(f): r(A) \to r(B)$ را القا کند، به گونه ای که هر $(a, \acute{a}) \in r(A)$ به $(f(a), f(\acute{a})) \in r(B)$ نگاشته شود. باید توجه داشت که $r(A) \in Con(A)$ و $r(B) \in Con(B)$، به ترتیب، زیرکنش هایی از $A \times A$ و $B \times B$ هستند و $r(f)$ هم ریختی بین آنهاست.

(ii) برای هر S - کنش A داشته باشیم : $r(A/r(A)) = \Delta_{A/r(A)}$

در زیر، تعریف بعضی از انواع رادیکال ها که در [۱۶] و [۲۴] معرفی شده اند را می‌آوریم.

- رادیکال r را موروثی می‌نامیم، هرگاه برای هر S-کنش A و $B \leq A$، $r(B) = r(A) \cap \Delta_B$.
- رادیکال r را کوروش-آمیستر می‌نامیم، هرگاه:

(i) برای هر S - کنش A، $r(A)$ همنهشتی ریس باشد.

(ii) برای هر $B \in \sum_{r(A)}$ داشته باشیم: $r(B) = \nabla_B$.

هر رادیکال r، دو زیر رده از S-کنش‌ها را مشخص می‌کند:

۱) رده رادیکال (یا رده تاب) با تعریف $\mathbb{R}_r = \{A | r(A) = \nabla_A\}$.

۲) رده نیمه ساده (یا رده بی تاب) با تعریف $S_r = \{A | r(A) = \Delta_A\}$.

در ادامه، اعضای $\mathbb{R}_r$ را S-کنش r-رادیکال و اعضای S_r را S-کنش r-نیمه‌ساده می‌نامیم. باید توجه داشت که رده S_r تحت زیرکنش‌ها، حاصل ضرب‌ها و یک‌ریختی‌ها بسته است و شامل همه S-کنش‌های بدیهی است. همچنین هر زیررده S از S-کنش‌ها که تحت زیرکنش‌ها، حاصل ضرب‌ها و یک‌ریختی‌ها بسته و شامل همه S-کنش‌های بدیهی باشد، رادیکالی به شکل r_S با تعریف

$$r_S(A) = \bigcap \{\chi \in Con(A) | A/\chi \in S\}$$

را مشخص می‌کند. علاوه براین، $S = S_r$ اگر و تنها اگر $r = r_S$، [۲۴] را ببینید.

از [۲۴] یادآوری می‌کنیم که زیرردهٔ $\mathbb{R}$ از S-کنش‌ها، ردهٔ رادیکال از یک رادیکال r است، اگر و تنها اگر

(۱) $\mathbb{R}$ شامل همه S-کنش‌های بدیهی باشد.

(۲) $\mathbb{R}$ تحت تصویر هم ریخت‌ها بسته باشد.

(۳) $\mathbb{R}$ دارای ویژگی استقرایی باشد، یعنی برای هر زنجیر صعودی $\{A_i\}_{i\epsilon I} \leq \mathbb{R}$، داشته باشیم $\bigcup_{i\epsilon I} A_i \in \mathbb{R}$.

(۴) $\mathbb{R}$ تحت گسترش همنهشتی‌های ریس بسته باشد؛ یعنی برای هر $A \in S - Act$ و هر همنهشتی ریس ρ روی A، $A/\rho \in \mathbb{R}$ و $\sum_{\rho} \subseteq R$ نتیجه دهد $A \in \mathbb{R}$.

برای هر رادیکال هونکه r و هر S-کنش A تذکر زیر را درباره $\sum_{r(A)}$ داریم:

تذکر ۱,۱ برای هر رادیکال هونکه r و هر S-کنش A

(i) اگر $r(A)$ -رده X شامل زیرکنشی از A باشد، آن‌گاه X نیز، زیرکنشی از A خواهد بود.

(ii) اگر $B \in \mathbb{R}_r$ زیرکنشی از A باشد، آن‌گاه $X \in \sum_{r(A)}$ چنان وجود دارد که $B \leq X$.

برهان. (i) اگر X، $r(A)$ - ردهی شامل زیرکنش B باشد، آن‌گاه X نسبت به S - کنش بسته است. چرا که اگر $b \in B$ را دلخواه درنظر بگیریم، آن‌گاه برای هر $x \in X$ و هر $s \in S$ داریم: $(x,b) \in (A)$ و در نتیجه، $(sx, sb) \in r(A)$. اما چون $sb \in B \subseteq X$، sx نیز، متعلق به X خواهد بود.

(ii) اگر $B \in \mathbb{R}_r$ زیرکنشی از S-کنش A باشد، آن‌گاه بنا به ویژگی (i) تعریف رادیکال هونکه، $r(B) = \nabla_B \subseteq r(A)$. پس $r(A)$ - رده X چنان وجود دارد که $B \in X$. اکنون حکم از (i) نتیجه می‌شود.

خانوادهٔ $C = (c_A)_{A \in S-\boldsymbol{Act}}$ که در آن $c_A: \boldsymbol{Sub}(A) \to \boldsymbol{Sub}(A)$ تابعی اســـت که هر زیرکنش $B \leq A$ را به زیرکنش $c_A(B)$ (یا $c(B)$، اگر باعث اشتباه نشود) از A می‌نگارد، عملگر بستار روی رستهٔ S-Act نامیده می‌شود، اگر در ویژگی‌های زیر صدق کند:

$(c1)$ (ویژگی گسترش) برای هر $B \in Sub(A)$، $B \leq c_A(B)$.

$(c2)$ (ویژگی یک‌نوایی) برای هر دو زیرکنش B_1 و B_2 از A با این ویژگی که $B_1 \leq B_2$ داشته باشیم $c_A(B_1) \leq c_A(B_2)$.

$(c3)$(ویژگی پیوستگی) برای هر هم ریختی $f: A \to C$، $f\big(c_A(B)\big) \leq c_C\big(f(B)\big)$.

خواننده می‌تواند تعریف رسته‌ای عملگر بستاری را در [۸] ببیند.

زیرکنش B از S-کنش A را C-بسته می‌گوییم، هرگاه $c_A(B) = B$، همچنین به زیرکنش B از A، C- چگال می‌گوییم، هرگاه $c_A(B) = A$، تکریختی $m: E \to A$ را C-تکریختی می‌گوییم، اگر m(E) در A، C-چگال باشد.

برای رادیکال r، هم ریختی کانونی $\pi: A \to A/B$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $c^r = (c_A^r)_{A \in S-\boldsymbol{Act}}$. با تعریف $c_A^r(B) = \pi^{-۱}\big([B]_{r(A/B)}\big)$، برای هر S-کنش A و هر زیرکنش B از A. در این‌صورت چون $B \subseteq [B]_{r(A/B)}$، پس $B \leq\ c_A^r(B)$. یعنی c^r دارای ویژگی گسترش است. برای اثبات ویژگی یک‌نوایی c^r، برای زیرکنش‌های دلخواه $B_1 \leq B_2$ از S-کنشی مانندA، هم‌ریختی کانونی $p: A/B_۱ \to\ A/B_2$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت با استفاده از ویژگی (i) تعریف رادیکال داریم $p([B_1]_r(A/B\_۱\ )) \subseteq [B_2]_{r(A/B_2)}$ از این رو $c_A^r(B_1) \leq c_A^r(B_2)$. در نهایت برای هر هم‌ریختی $f: A \to C$ و $B \leq A$، هم‌ریختی$\overline{f}: A/B \to C/f(B)$ را با تعریف $\overline{f}(a/B) = f(a)/f(B)$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از ویژگی (i) تعریف رادیکال داریم: $\overline{f}\big([B]_{r(A/B)}\big) \subseteq [f(B)]_{r(C/f(B))}$.

در نتیجه $f\big(c_A^r(B)\big) \leq\ c_C^r\ (\ f\ (B))$، یعنی ویژگی پیوستگی c^r را خواهیم داشت. بنابراین c^r عملگری بستاری روی رستهٔ S-کنش‌ها است. در ادامه، به ترتیب، از واژه‌های r- چگال و r- بسته و r- تک‌ریختی به جای واژه‌های c^r- چگال، c^r- بسته و c^r- تک‌ریختی استفاده می‌کنیم. با توجه به تعریف عملگر بستاری c^r، زیرکنش B در S-کنش A r- چگال، است اگر و تنها اگر $A = \pi^{-۱}\big([B]_{r(A/B)}\big)$ و این تنها در صورتی امکان دارد که رده $[B]\_r(A/B)$ شامل همهٔ اعضای A باشد یعنی داشته باشیم $r(A/B) = \nabla_{A/B}$. ایده‌آل چپ دلخواه I از S را r-چگال می‌گوییم، هرگاه به عنوان زیرکنش از S-کنش S r- چگال باشد. یک S-کنش را r- انژکتیو می‌گوییم، هرگاه نسبت به r- تک‌ریختی‌ها، انژکتیو باشد.

در [۲۳] نشان داده شده است که هر معادله در رستهٔ S-کنش‌ها به یکی از شکل‌های زیر است:

$(۱)\ sx = ty \qquad (۲)\ sx = tx \qquad (۳)\ sx = a$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

که در آن $s, t \in S$ و a عضوی در S-کنش A است.

به معادلاتی که ثابت‌های آنها در S-کنش A است، معادلات روی A می‌گوییم. زیرکنش B از S-کنش A را :

- خالص در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی از معادلات روی B که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب باشد.
- خالص از نوع سوم در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی از معادلات به شکل $sx = b$ روی B که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب باشد. از این نوع خالص در [۱۹] با عنوان ۱- خالص یاد شده است.
- دنباله‌ای خالص یا برای سادگی، S-خالص در A می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه دنباله‌ای از معادلات روی B، یعنی $\sum = \{sx = b_s | s \in S, b_s \in B\}$ که در A دارای جواب است، در B نیز، جواب داشته باشد.

دستگاه $\sum$ از معادلات روی S-کنش A را سازگار می‌گوییم، هرگاه در S-کنشی شامل A دارای جواب باشد. S-کنش A را به طور مطلق خالص می‌گوییم، هرگاه هر دستگاه متناهی سازگار از معادلات روی A در آن دارای جواب باشد.

۲. خلوص نسبت به ایده آل‌های چپ چگال

در این بخش، مشابه تعریف لمبک برای زیرمدول های خالص [۲۰]، ما نیز، نوعی از زیرکنش‌های خالص را بوسیله رادیکال هونکه تعریف می‌کنیم. درحقیقت، با ا ستفاده از عملگر ب ستار القا شده تو سط رادیکال هونکه r، c^r، یک نوع خاص از خالص بودن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. برای رادیکال هونکه r، زیرکنش B از S-کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ چگال (یا به طور مختصر dli- خالص) می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \in A$ و هر ایده‌آل چپ r- چگال D از S، اگر $D_a \leq B$، آن‌گاه $b \in B$ چنان موجود باشد که برای هر $d \in D$، $da = db$.

اگر B زیرکنشی dli- خالص از A باشد، از نماد $B \leq_{d.l.i.p} A$ استفاده می‌کنیم. همچنین مجموعهٔ همهٔ زیرکنش‌های dli- خالص از A را با $P_{d.l.i.p}(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. زیرکنش B از S-کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل های چپ می‌گوییم، هرگاه برای هر ایده‌آل چپ D از S، B زیرکنشی s- خالص از A در ردهٔ D- کنش‌ها باشد. همچنین زیرکنش B از S-کنش A را خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ متناهی مولد می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل چپ متناهی مولد D از S، B زیرکنشی s-کنش خالص از A در ردهٔ D-کنش‌ها باشد.

تذکر ۲.۳. (۱) به راحتی می‌توان برر سی کرد که برای هر رادیکال هونکه r و هر S-کنش A، $(P_{d.l.i.p}(A), \leq_{d.l.i.p})$، یک مجموعهٔ مرتب جزئی است.

(۲) اگر تعریف ۲.۱ را با تعریف S-کنش‌های s-خالص که در [۵] مطرح شده است، مقایسه کنیم، چون برای هر رادیکال هونکه r روی S-Act، هر نیم‌گروه S یک ایده‌آل چپ r- چگال از خودش است، می‌توان گفت که هر S-کنش dli- خالص یک S-کنش s-خالص نیز، هست؛ اما عکس این مطلب درست نیست. مثال ۴،۲ را ببینید.

(۳) با استفاده از قسمت دوم می‌توان انژکتیوی نسبت به زیرکنش‌های dli- خالص را با نتایجی مشابه [۶] تعریف نمود.

مثال ۲.۴. فرض کنید $S=\{0,s,t\}$ نیم‌گروهی با جدول کیلی زیر باشد:

	۰	s	t
۰	۰	۰	۰
s	۰	s	t
t	۰	۰	۰

همچنین فرض کنید که ردهٔ $\mathbb{R}$ بســـتاری مجموعهٔ $\{\{0\},\{0,s\}\}$ تحت تصـــویر هم‌ریخت‌ها، ویژگی اســـتقرایی و گسترش همنهشتی‌های ریس باشد. در این صورت ردهٔ $\mathbb{R}$، یک رادیکال کورش-آمیتسر $r_{\mathbb{R}}$ معرفی می‌کند. قضیهٔ ۴.۲ از [۲۴] را ببینید. چون $S/\{0,t\}\cong\{0,s\}$، پس $S/\{0,t\}\in\mathbb{R}$. بنابراین، $\{0,t\}$، ایده آل چپ $r_{\mathbb{R}}$- چگالی از S است. فرض کنید $A=\{a_i\}_{1\leq i\leq 7}$ یک S-کنش با جدول کیلی زیر باشد:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7 a_7
۰	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
s	a_1	a_6	a_3	a_4	a_4	a_6	a_4
t	a_1	a_4	a_1	a_1	a_3	a_1	a_3

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $B=\{a_1,a_3,a_4,a_7\}$ زیرکنشی s- خالص از A است؛ اما در A dli- خالص نیست. درحقیقت، $B\leq\{a_1,a_4\}=a_2.\{0,t\}$ درحالی که هیچ $a\in B$ وجود ندارد که $a.\{0,t\}=a_2.\{0,t\}$. در ادامه، رابطهٔ بین زیرکنش‌های خالص نســـبت به ایده‌آل‌های چپ به عنوان تعمیمی از مفهوم زیرکنش‌های dli- خالص و زیرکنش‌های خالص از نوع سوم را در قضیهٔ ۵،۲ و قضیهٔ ۶،۲ بررسی خواهیم کرد.

قضـــیهٔ ۲.۵. فرض کنیـد B زیرکنشـــی از S-کنش A بـاشـــد. دراین صـــورت هر دســـتگـاه از معـادلات $\sum=\{s_ix_i=b_i|i\in I,b_i\in B,s_i\in S\}$ که در A دارای جواب است، در B نیز، دارای جواب خواهد بود؛ اگر و تنها اگر B در A خالص نسبت به ایده‌آل‌های چپ باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $a\in A$ و D، ایده‌آل چپی از S با ویژگی $Da\leq B$ باشـــد. در این صـــورت a جوابی از $\acute{\sum}=\{d_ix=b_i|d_ia=b_i \text{ یا } b_i\in B \text{ و } d_i\in D\}$ اســت. بنابراین، با اســتفاده از فرض جوابی از $\acute{\sum}$ در B مانند $\acute{b}$ وجود دارد. در نتیجه، برای $d_i\in D$ داریم: $d_ia=\acute{b}_i$.

($\Rightarrow$) فرض کنید $\{a_i\}_{i\in I}\subseteq A$ جوابی از د ستگاه معادلات $\sum=\{s_ix_i=b_i|i\in I,b_i\in B,s_i\in S\}$ با شد. در این صورت برای هر $i\in I$، $D_i=\{s\in S|sa_i\in B\}$ ایده‌آل چپی از S با ویژگی $D_ia_i\leq B$ ا ست. بنابراین با ا ستفاده از فرض، برای هر $i\in I$، $\acute{b}_i\in B$ چنـان وجود دارد کـه برای هر $s\in D_i$، $sa_i=s\acute{b}_i$. بـه ویژه داریم: $s_i\acute{b}_i=b_i$. درنتیجه، $\sum$ در B دارای جواب است.

با استدلالی همانند برهان قضیهٔ ۵،۲، به راحتی می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۶. زیرکنش B از S-کنش A با خالص از نوع سوم ا ست، اگر و تنها اگر B نسبت به ایده‌آل‌های چپ، متناهی مولد در A خالص باشد.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

قضیه ۲.۷. به ازای رادیکال هونکه دلخواه r، هر زیرکنش r- بسته B از S-کنش A در A، dli- خالص است.

برهان. برای اثبات، نشان می‌دهیم برای هر زیرکنش سره r- بسته B از A و $a \in A/B$، هیچ ایده‌آل چپ r- چگال D از S با ویژگی $Da \subseteq B$ وجود ندارد. فرض کنید این گونه نباشد؛ (فرض خلف) یعنی ایده‌آل چپ سره و r- چگال D از S چنان وجود داشته باشد که برای، $Da \subseteq B$. در این صورت از r- چگال بودن D در S داریم $S/D \in \mathbb{R}_r$. چون $\mathbb{R}_r$ تحت هم‌ریختی بسته است، $Sa/Da \in \mathbb{R}_r$. همچنین
$Sa/(B \cap Sa) \cong S \cdot (a/B)$، کافی است یک‌ریختی $\varphi: Sa/(B \cap Sa) \to S \cdot (a/B)$ که هر $sa/(B \cap Sa) \in Sa/(B \cap Sa)$ را به $s \cdot a/B \in S \cdot (a/B)$ می‌نگارد را در نظر بگیریم، و داریم:

$$Sa/(B \cap Sa) = (Sa/Da)/((B \cap Sa)/Da)) \in \mathbb{R}_r$$

پس $S.(a/B) \in \mathbb{R}_r$. اکنون با استفاده از تذکر ۱،۱ داریم $S.(a/B) \subseteq [B]_{r(A/B)}$. یعنی برای هم‌ریختی کانونی $\pi: A \to A/B$ داریم $Sa \subseteq \pi^{-1}\left([B]_{r(A/B)}\right)$. درنتیجه، $a \in Sa \leq c_A^r(B) = B$ که تناقض است.

به دلیل نقش مهمی‌که ایده‌آل چپ r- چگال در تعریف و مطالعهٔ زیرکنش‌های dli- خالص دارند، بررسی ویژگی‌های ایده‌آل‌های چپ r- چگال دارای اهمیت است. در ادامه، به بررسی برخی از ویژگی‌هایی که ایده‌آل‌های چپ r- چگال از S را به طور دقیق مشخص می‌کنند، می‌پردازیم؛ اما ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که هر همنهشتی ω روی S یک رابطه $\omega A = \{(sa, ta)(s,t) \in \omega$ و $a \in A\}$. روی S-کنش A معرفی می‌کند. به وضوح این رابطهٔ انعکاسی، تقارنی و سازگار با کنش A است؛ ولی ممکن است انتقالی نباشد. به همین دلیل، همنهشتی تولید شده توسط $\omega.A$، یعنی $\Theta\left(\omega.A\right)$ را درنظر می‌گیریم.

قضیه ۲.۸. فرض کنید r رادیکالی هونکه و ω، همنهشتی روی S باشد. در این صورت داریم:

$$r(\frac{S}{\omega}) = \{(\frac{S}{\omega},\frac{t}{\omega}) \in \frac{S}{\omega}\times\frac{S}{\omega} \Big| sa = ta، \omega a = \Delta_{Sa} \text{ با } a \in A \text{ و هر } A \in S_r \text{ برای هر}\}$$

برهان. اگر طرف راست تساوی بالا را X بنامیم، آن‌گاه برای عضو $(1/\omega)/r(S/\omega)$ از S-کنش r- نیمه‌ساده $(S/\omega)/r(S/\omega)$ داریم: $\omega.((1/\omega)/r(S/\omega)) = \Delta_{S/\omega}$. بنابراین، برای هر عضو $(s/\omega, t/\omega)$ از X داریم: $s\,(1/\omega)/r(S/\omega) = t\,(1/\omega)/r(S/\omega)$، یعنی $(s/\omega)/r(S/\omega) = (t/\omega)/r(S/\omega)$. پس $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$ در نتیجه، $X \subseteq r(S/\omega)$ حال فرض کنیم $(s/\omega, t/\omega) \in r(S/\omega)$. همچنین فرض کنیم که S-کنش r-نیمه ساده Aو $a \in A$ به گونه‌ای موجود باشند که $\omega A = \Delta_{Sa}$. نشان می‌دهیم $sa = ta$. به این منظور، هم‌ریختی $f_a: S/\omega \to A$ با تعریف $f_a(s/\omega) = sa$ را درنظر می‌گیریم. از ویژگی اول، تعریف رادیکال هونکه داریم: $(sa, ta) \in r(A)$؛ اما A، r- نیمه‌ساده است. از این‌رو، $sa = ta$.

اگر ω همنهشتی ریس تولید شده به وسیلهٔ ایده‌آل چپی از S باشد، آن‌گاه قضیه بالا می‌تواند نتایج بیشتری به دست دهد. نتیجهٔ زیر را ببینید.

نتیجهٔ ۲.۹. (۱) فرض کنید r رادیکالی هونکه و D ایده‌آل چپی از S باشد. در این صورت داریم:

$$r\left(\frac{S}{D}\right)=\left\{\left(\frac{s}{D},\frac{t}{D}\right)\in\frac{S}{D}\times\frac{S}{D}\middle| sa=ta \text{، } |Da|=1 \text{ با } a\in A \text{ و } A\in S_r \text{ برای هر}\right\}$$

(۲) فرض کنید r رادیکالی هونکه، $A\in S_r$ و ω همنهشتی تولید شده به وسیلهٔ $\{(s_i,t_i)\}_{i\in I}$ روی S باشد به گونه‌ای که $S/\omega\in\mathbb{R}_r$. دراین صورت $a\in A$ جوابی برای $\sum=\{s_ix=t_ix\}_{i\in I}$ است، اگر و تنها اگر برای هر $s,t\in S$ داشته باشیم: $sa=ta$.

(۳) فرض کنید r رادیکال هونکه و $\sum=\{s_ix=b\}_{i\in I}$ دستگاهی از معادلات روی S-کنش r- نیمه ساده A باشد، به گونه‌ای که D، ایده‌آل چپ تولید شده به و سیلهٔ ضرایب $\sum$، r- چگال و همنهشتی تولید شده به و سیلهٔ مجموعه ضرایب $\sum$ برابر با ρ_D باشد. در این صورت $\sum$ دارای جواب در $A\in S_r$ است، اگر و تنها اگر b یک عنصر صفر و تنها جواب دستگاه $\sum$ در A باشد.

برهان. (۱) برای اثبات، کافی است در قضیهٔ ۸،۲، ω را همنهشتی ریس تولید شده توسط ایده‌آل D درنظر بگیریم.
(۲) حکم به راحتی از این حقیقت اثبات شده در قضیهٔ ۸،۲ نتیجه می شود که $(s/\omega\,,t/\omega)\in r(S/\omega)$، اگر و تنها اگر برای هر $a\in A\in S_r$، $\omega.a=\Delta_{S.a}$ نتیجه دهد $sa=ta$.
(۳) این قسمت به سادگی از ترکیب (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۱۰. گزاره‌های زیر با هم معادلند :
(۱) D ایده‌آل چپ r- چگالی از S است.
(۲) اگر $A\in S_r$ و $a,b\in A$ با این ویژگی باشند که $Da=\{b\}$، آن‌گاه b عنصر صفری از A است و $Sa=\{b\}$.
(۳) اگر $A\in S_r$ و $a,b\in A$ با این ویژگی باشند که $Da=\{b\}$، آن‌گاه $a=b$ و b عنصر صفری از S-کنش A است.

برهان. $(1)\Rightarrow(۲)$ اگر $A\in S_r$، $a,b\in A$ و $Da=\{b\}$، آنگاه $|Da|=1$. با استفاده از قسمت اول نتیجهٔ ۹،۲، از r- چگال بودن D نتیجه می‌گیریم که برای هر $s,t\in S$، $sa=ta$. بنابراین داریم: $Sa=\{b\}$. از طرفی برای هر $s\in S$ و $d\in D$ داریم: $sb=sda=b$. یعنی b عنصر صفری از S-کنش A است.
$(3)\Rightarrow(۲)$ بدیهی است.
$(1)\Rightarrow(3)$ فرض کنید $(s/D\,,t/D)\in\nabla_{S/D}$. در این صورت چون هر عنصر a با این ویژگی که $|Da|=۱$ از S-کنش r- نیمه ساده A برابر صفر است، پس $a=sa=ta$. از این رو با استفاده از قسمت (۱) از نتیجه ۹،۲ داریم: $(s/D\,,t/D)\in r(S/D)$. درنتیجه $\nabla_{S/D}\le r(S/D)$ و این، برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۲.۱۱. فرض کنید r رادیکالی هونکه و $\sum=\{s_ix=b\}_{i\in I}$ دستگاه معادلات معرفی شده در قسمت (۳) نتیجه ۲.۹ باشد. در این صورت اگر $\sum$ دارای جوابی در A باشد، آن‌گاه $b/r(A)$ زیرکنش dli- خالصی از A خواهد بود که شامل همه جواب های $\sum$ در A است.

برهان. فرض کنید a جوابی از $\{s_i x = b\}_{i\in I}$ باشد. در این صورت $a/r(A)$ جوابی از دستگاه $\{s_i x = b/r(A)\}_{i\in I}$ در $A/r(A)$ است. بنابراین، با استفاده از قسمت (۳) از نتیجه ۹،۲، $b/r(A)$ عنصر صفری از $A/r(A)$ است و $b/r(A) = a/r(A)$ زیرکنشی از A است. برای اثبات dli- خالص بودن $b/r(A)$ در A، فرض کنید D ایده‌آل چپ r- چگالی از S با شد و برای $a \in A$ دا شته با شیم: $Da \leq b/r(A)$. در این صورت $D.(a/r(A)) = \{b/r(A)\}$. بنابراین با ا ستفاده از ق سمت (۳) نتیجهٔ ۹،۲ داریم: $a/r(A) = b/r(A)$، یعنی $a \in b/r(A)$. در نتیجه $b/r(A)$ در A، dli- خالص است.

قضیه ۲.۱۲. فرض کنید B زیرکنشی از S-کنش A باشد و $a \in A$. دراین صورت اگر ایده‌آل چپ r- چگال D از S و $b \in B$ چنان وجود داشته باشند که $Db = Da$، آن‌گاه $a \in c_A^r(B)$.

برهان. فرض کنید D ایده‌آل چپ r- چگال از S باشد، به گونه‌ای که برای $a \in A$ و $b \in B$ای داشته باشیم که $Da = Db$. دراین صورت، بسته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت تصویر هم‌ریختی‌ها نتیجه می‌دهد که تصویر S/D تحت هم‌ریختی $f: S/D \to A/B$، با تعریف $f(s/D) = sa/B$، یک S-کنش r- رادیکال است. یعنی $f(S/D) \in \mathbb{R}_r$. لازم به ذکر است که چون $Da = Db$، f خوش تعریف است. همچنین داریم $f((s_1 s_2)/D) = (s_1 s_2)a/B = s_1(s_2 a)/B = s_1 f(s_2/D)$، یعنی f هم‌ریختی است. بنابراین، با استفاده از تذکر (i) ۱،۱، یک $r(A/B)$ - ردهٔ X چنان وجود دارد که $S.(a/B) \leq X$. اما $Db = Da \leq Sa$ و $Db \leq B$. پس تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: A \to A/B$ یک زیرکنش بدیهی از $S.(a/B)$ است. بنابراین، $X \cap [B]_{r(A/B)} \neq \emptyset$. از این رو، چون X و $[B]_{r(A/B)}$، $r(A/B)$ - رده‌هایی با اشتراک ناتهی هستند، پس $X = [B]_{r(A/B)}$. درنتیجه، $a/B \in [B]_{r(A/B)}$ یعنی $a \in c_A^r(B)$.

۳. S-کنش‌های r-انژکتیو ضعیف و S-کنش‌های به طور مطلق dli- خالص

در این بخش S-کنش‌های r-انژکتیو ضعیف و به طور مطلق dli- خالص را بررسی می‌کنیم. در واقع در این بخش نشان می‌دهیم که S-کنش‌های به طور مطلق dli- خالص همان S-کنش‌هایr- انژکتیو ضعیف هستند.

۳. ۱. S-کنش‌های r-انژکتیو ضعیف.

تعریف ۳.۱. برای رادیکال داده شده r، S-کنش A را r- انژکتیو ضعیف می‌نامیم، اگر دارای ویژگی انژکتیو نسبت به همه نشانندهها از ایده‌آل‌های چپ r- چگال به S باشد.

ابتدا مشابه لم ۲،۳،۵ از [19] درباره S-کنش‌های انژکتیو ضعیف و گزارهٔ ۲،۲ از [۱۵] درباره S-کنش‌های α-انژکتیو، تذکر زیر را که به راحتی از تعریف به دست می‌آید دربارهٔ S-کنش‌های r-انژکتیو ضعیف ارائه می‌کنیم.

تذکر ۳.۲. S-کنش A، r-انژکتیو ضعیف است، اگر و تنها اگر برای هر هم‌ریختی $f: D \to A$ که در آن D ایده‌آل چپ r- چگال از S است، عنصری مانند $a \in A$ چنان موجود باشد که برای هر $d \in D$ داشته باشیم $f(d) = da$. در واقع، کافی است برای تعریف گسترش هم‌ریختی f، $\bar{f}: S \to A$ قراردهیم $\bar{f}(1) = a$.

قضیه ۳.۳. برای رادیکال داده شده r، هر S - کنش r - انژکتیو ضعیف در هر گسترشش dli - خالص است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

برهان. فرض کنید B زیرکنش r- انژکتیوی ضعیف از S -کنش A و D ایده‌آل چپ r- چگال از S باشد. همچنین فرض کنید a عنصری دلخواه از A با این ویژگی باشد که $Da \leq B$. در این صورت چون B، r- انژکتیو ضعیف است، پس با استفاده از تذکر بالا، برای همریختی $f: D \to B$ با تعریف $f(d) = da$، عنصر $b \in B$ با ویژگی $f(d) = db$، برای هر d در D، وجود دارد. بنابراین برای هر $d \in D$، $db = da$.

قضیه ۳.۴. فرض کنید A یک S -کنش r- انژکتیو ضعیف باشد. در این صورت هر زیرکنش dli- خالص از A، r- انژکتیو ضعیف است.

برهان. فرض کنید $f: D \to B$ هم ریختی‌ای از ایده آل r-چگال D به زیرکنش dli-خالص B از S-کنش A باشد. وجود همریختی $\bar{f}: S \to A$ با توانایی جابه‌جا کردن مربع زیر از r- انژکتیو ضعیف بودن A نتیجه می‌شود.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[dl, dotted, "\bar{\bar{f}}"'] \arrow[d, "\bar{f}"] \\ B \arrow[r, hook] & A \end{tikzcd}$$

بنابراین، برای هر $d \in D$، داریم $f(d) = d\bar{f}(1)$ و $D\bar{f}(1) \leq B$. درنتیجه، چون B زیرکنش dli- خالص از A است، پس $b \in B$ چنان موجود است که برای هر $d \in D$، $f(d) = d\bar{f}(1) = db$. حال می‌توانیم گسترش $\bar{\bar{f}}: S \to B$ از f را به وسیلهٔ $\bar{\bar{f}}(s) = sb$، برای هر $s \in S$، تعریف کنیم. به وضوح $\bar{\bar{f}}$ مثلث بالایی را در مربع بالا جابه‌جا می‌کند و این یعنی B، r-انژکتیو ضعیف است.

نتیجه ۳.۵. هر زیرکنش r- بسته از یک S -کنش r- انژکتیو ضعیف، r- انژکتیو ضعیف است.

قضیه ۳.۶. اگر S -کنش A، r- انژکتیو ضعیف باشد، آنگاه A نسبت به همهٔ نگاشت‌های شمول به S/D انژکتیو است که در آن D ایده‌آل چپ r- چگال دلخواه است.

برهان. با استفاده از قضیهٔ تناظر، هر زیرکنش از S/D به صورت H/D است که در آن H زیرکنشی از S و شامل D است. بنابراین چون D در S، r- چگال است و H شامل D است، H نیز در S، r-چگال است و بنابراین، هر زیرکنش H/D از S/D که به شکل K/D است که $D \leq K \leq S$، در S/D، r- چگال است. حال فرض کنید $f: H/D \to A$ یک همریختی باشد. در این‌صورت همریختی $\acute{f} = fo\pi$ را خواهیم داشت که در آن $\pi: H \to H/D$ همریختی کانونی است. در نتیجه، با استفاده از فرض، گسترش $\bar{f}': S \to A$ از $\acute{f}$ با ویژگی $\bar{f}'\big|_H = \acute{f} = fo\pi$ وجود دارد. پس داریم $\rho D \leq ker\, f \leq ker\,(fo\pi) = ker\,\left(\bar{f}'\right)$. اکنون با استفاده از قضیهٔ همریختی برای S-کنش‌ها، همریختی $\bar{f}: S/D \to A$ را با تعریف $\bar{f}(s/D) = \bar{f}'(s)$، برای هر $s/D \in S/D$، تعریف می‌کنیم و برای هر $h \in H$ داریم: $\bar{f}(h/H) = \bar{f}'(h) = fo\pi(h) = f(h/D)$ و این حکم را ثابت می‌کند. نمودار زیر، روند اثبات را به روشنی مشخص می‌کند.

$$\begin{tikzcd}
H/D \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f"] & & S/D \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"'] \\
& A & \\
H \arrow[uu, "\pi"] \arrow[ur, "\acute{f}"] \arrow[rr, hook] & & S \arrow[uu, "\acute{\pi}"'] \arrow[ul, "\bar{f}'"']
\end{tikzcd}$$

۳.۲. S - کنش‌های به طور مطلق dli- خالص

در ادامه، مفهوم S-کنش به طور مطلق dli- خالص را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم به طور مطلق dli- خالص بودن با r- انژکتیوی ضعیف بودن معادل است. همچنین شرایطی را که تحت آنها همهٔ S-کنش‌ها به طور مطلق dli- خالص هستند را معین می‌کنیم.

تعریف ۳.۷. برای رادیکال هونکه داده شـــده r، S-کنش A را به طور مطلق dli- خالص می‌نامیم، هرگاه A در هر گسترش از خود dli- خالص باشد.

ما در [۱۸] نشـان داده‌ایم که برای هر رادیکال هونکه r و هر S-کنش A، غلاف r- انژکتیو، $\mathrm{E_r(A)}$ ، وجود دارد. در قضیهٔ بعد نشان می‌دهیم که به کمک غلاف‌های r- انژکتیو می‌توان
S-کنش‌های به طور مطلق dli- خالص را مشخص کرد.

قضیه ۳.۸. برای هر S-کنش A گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) A به طور مطلق dli- خالص است.

(۲) A در هر گسترش r- انژکتیو از خود dli- خالص است.

(۳) A در گسترش غلاف r- انژکتیو خود، $E_r(A)$، dli- خالص است.

(۴) A، S-کنش r- انژکتیو ضعیف است.

(۵) A در گسترش r-انژکتیوی از خود dli- خالص است.

برهان. به وضوح استلزام‌های $(۳) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$ برقرار هستند. همچنین $(۴) \Rightarrow (۳)$ و $(۵) \Rightarrow (۴)$، به ترتیب، از قضایای ۳.۴ و ۳.۳ نتیجه می‌شوند.

برای اثبات $(۱) \Rightarrow (۵)$، فرض کنید A در گسترش r- انژکتیوی، مثلاً I، dli-خالص و Q گسترشی از S-کنش A و D ایده‌آل چپ r- چگال از S باشد. همچنین فرض کنید برای $q \in Q$ داشته باشیم $Dq \leq A$. در این صورت با توجه به بســته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت هم‌ریختی‌ها، Dq در Sq، r- چگال اســت. بنابراین هم‌ریختی $f\colon Sq \to I$ وجود دارد که مثلث زیر را جابه‌جا می‌کند.

$$\begin{tikzcd}
Dq \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & Sq \arrow[dd, dashed, "f"] \\
& A \arrow[dr, hook] & \\
& & I
\end{tikzcd}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

به علاوه، $Df(q) = f(Dq) = Dq \leq A$. پس به دلیل dli - خالص بودن A در I، عنصری مانند a در A چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$، $df(q) = da$. اما برای هر $d \in D$ داریم: $df(q) = f(dq) = dq$. بنابراین، برای هر $d \in D$، $dq = da$ و این یعنی A در Q، dli - خالص است.

قضیه ۳.۹. هر زیرکنش dli - خالص از S - کنش به طور مطلق dli - خالص، S - کنشی بطور مطلق dli - خالص است.

برهان. برای اثبات، از قضیهٔ ۸،۳ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر زیرکنش dli-خالص B از S - کنش به طور مطلق dli- خالص A، در گسترش غلاف r - انژکتیو $E_r(B)$، dli - خالص است. به این منظور، فرض کنید $a \in E_r(B)$ و D ایده‌آل چپ r - چگالی از S باشد، به گونه‌ای که $Da \leq B$. در این صورت چون $B \leq A$، پس داریم $Da \leq A$. بنابراین، dli- خالص بودن A در $E_r(A)$ وجود $\acute{a} \in A$ با ویژگی $da = d\acute{a}$، برای هر $d \in D$ را تضمین می‌کند. پس داریم $D\acute{a} = Da \leq B$. حال با استفاده از dli- خالص بودن B در A می‌توانیم وجود $b \in B$ را با ویژگی $db = d\acute{a} = da$، برای هر $d \in D$ را نتیجه بگیریم. پس B در $E_r(B)$، dli- خالص است و این، همان چیزی است که به دنبالش بودیم.

قضیهٔ ۲.۷. به همراه قضیهٔ بالا، نتیجه زیر را به ما می‌دهد.

نتیجه ۳.۱۰. هر زیرکنش r- بسته از یک S-کنش به طور مطلق dli- خالص، به طور مطلق dli- خالص است.

قضیه ۳.۱۱. گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) تکواره S به طور مطلق dli- خالص است؛ یعنی هر S-کنش دلخواه به طور مطلق dli- خالص است.

(۲) هر S-کنش در هر گسترش r- انژکتیو از خود، dli- خالص است.

(۳) هر S-کنش در گسترش غلاف r - انژکتیو خود، dli- خالص است.

(۴) هر S-کنش، r- انژکتیو ضعیف است.

(۵) هر S-کنش در گسترش r- انژکتیو از خود، dli- خالص است.

(۶) هر ایده‌آل چپ r-چگال S در S، dli-خالص است.

(۷) هر ایده‌آل چپ r-چگال D از S دارای همانی راست e_D است.

(۸) هر ایده‌آل چپ r-چگال از S توسط عنصری خودتوان تولید می‌شود.

برهان. استلزام‌های $(۱) \Rightarrow (۵) \Rightarrow (۴) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$، به سرعت از قضیهٔ ۸،۳ نتیجه می‌شوند. همچنین $(۶) \Rightarrow (۱)$ بدیهی است. $(۷) \Rightarrow (۶)$ فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r- چگال از S باشد. در این صورت به وضوح داریم $D.۱ \leq D$. بنابراین، با استفاده از فرض، عنصر $e_D \in D$ با ویژگی $d = d۱ = de_D$، برای هر $d \in D$، وجود دارد؛ یعنی D شامل همانی راستی مانند e_D است.

$(۳) \Rightarrow (۷)$ برای اثبات، فرض می‌کنیم A یک S-کنش دلخواه باشد و نشان می‌دهیم A در $E_r(A)$، dli - خالص است. به این منظور، فرض کنید D یک ایده آل چپ r-چگال باشد و برای $z \in E_r(A)$ داشته باشیم $Dz \leq A$. در این صورت برای هر $d \in D$ داریم $d(e_D z) = (de_D)z = dz$ و $e_D z$ متعلق به A است. بنابراین، A در $E_r(A)$، dli- خالص است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

$(8) \Rightarrow (4)$ فرض کنید D یک ایده‌آل چپ r- چگال از S باشد. در این صورت، بنا به فرض، نگاشت همانی $id_D: D \to D$ می‌تواند به هم‌ریختی $f: S \to D$ گسترش یابد. پس $f(1)$ عنصری خودتوان است و برای هر $d \in D$ داریم $d = df(1)$. درنتیجه، D توسط $f(1)$ تولید می‌شود.

$(4) \Rightarrow (8)$ فرض کنید A یک S-کنش $f: D \to A$ یک هم‌ریختی باشد که در آن D یک ایده‌آل چپ r- چگال از S است. در این صورت بنا به فرض، D دارای مولد خودتوانی مانند e_D است. به وضوح هم‌ریختی $\acute{f}: S \to A$ با ضابطهٔ $\acute{f}(s) = sf(e_D)$، گسترشی از f توسط نگاشت شمول $l: D \to S$ است و این یعنی A، r- انژکتیو است.

۴. بستار یک زیرکنش به وسیلهٔ یک ایده‌آل چپ r- چگال

فرض کنید D ایده‌آل چپ r- چگالی باشد و B زیرکنشی از S-کنش A. به دلیل نقش مهم عناصر $a \in A$ با ویژگی $Da \leq B$، در dli- خالص بودن B در A (تعریف ۱٫۲ را ببینید) علاقه به بررسی بستار $\bar{B} = \{a \in A | Da \leq B\}$ از B امری طبیعی است؛ اما گاهی مجموعهٔ $\bar{B}$ زیرکنشی از A نیست. بنابراین، زیرکنش تولید شده به وسیلهٔ $\bar{B}$ را به عنوان بستار B درنظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $c_A^D(B) := \langle\{a \in A | Da \leq B\}\rangle$.

تذکر ۴.۱. اگر D یک ایده‌آل r- چگال از S باشد، آن‌گاه برای هر زیرکنش B از S-کنش A داریم $c_A^D(B) = \{a \in A | Da \leq B\}$. بخش ۲ از [۹] را ببینید.

در ادامه نشان می‌دهیم c^D، یک عملگر بستار است و ارتباط بین c^D و S-کنش‌های dli- خالص را می‌یابیم. همچنین تعمیمی از مفهوم انژکتیو دنباله‌وار ([۱۲] را ببینید)، یعنی c^D-انژکتیو، ارائه می‌دهیم و خوش‌رفتاری c^D-انژکتیوی را به سادگی به عنوان نتیجه‌ای ساده از این مقاله نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید D ایده‌آل چپ r- چگالی از S باشد. خانواده $c = (c_A^D)_{A \in S-Act}$ که در آن هر c_A^D به صورت $c_A^D(B) = \langle\{a \in A | Da \leq B\}\rangle$، برای هر زیرکنش B از A، تعریف می‌شود، عملگر بستاری در رسته ***S-Act*** است.

برهان. به وضوح c_A^D ویژگی‌های گسترش و یک‌نوایی را داراست. برای اثبات ویژگی پیوستگی، فرض کنید $f: A \to X$ یک هم‌ریختی باشد و $f(b) \in f\left(c_A^D(B)\right)$. در این صورت $a \in A$ به گونه‌ای وجود دارد که $Da \leq B$ و $sa = b$، برای $s \in S$. بنابراین، داریم $Df(a) \leq f(B)$. یعنی $f(a) \in \{x \in X | Dx \leq f(B)\}$. پس $f(b) = sf(a) \in c_X^D\big(f(B)\big)$. درنتیجه، c_A^D دارای ویژگی پیوستگی است.

حال می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ ۱۲.۲ نتیجه زیر را به دست آوریم.

نتیجه ۴.۳. برای هر زیرکنش B از S-کنش A، dli-خالص داریم: $\bigcup_D c_A^D(B) \leq c_A^r(B)$.

در قضیهٔ زیر، رابطهٔ بین به طور مطلق dli- خالص بودن S و عملگر بستار c^D، در شرایطی که هر ایده‌آل چپ از S یک ایده‌آل است را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴.۴. فرض کنید هر ایده‌آل چپ از S یک ایده‌آل باشد. در این صورت هر S - کنش، به طور مطلق dli- خالص است، اگر و تنها اگر برای هر گسترش A از یک S-کنش B و هر ایده‌آل r- چگال D از S، B در رسته D- کنش‌ها درون‌بر $c_A^D(B)$ باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) بنا به فرض به ازای هر $x \in c_A^D(B)$، $b_x \in B$ چنان وجود دارد که برای هر $d \in D$ داریم $dx = db_x$. اکنون نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم.

$$f: c_A^D(B) \to B$$
$$x \longmapsto \begin{cases} b_x & x \in c_A^D(B)/B \\ x & x \in B \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که چون $c_A^D(B)/B$ و B مجزا هستند، f خوش تعریف است. همچنین چون برای هر $x \in c_A^D(B)$ و هر $d \in D$ داریم $dx = db_x \in B$، پس $f(dx) = f(db_x) = db_x = df(x)$ اگر $x \in c_A^D(B)/B$ و $f(dx) = f(db_x) = db_x = dx = df(x)$ اگر $x \in B$. بنابراین، f یک هم‌ریختی در ردهٔ D - کنش‌ها است. همچنین $f|_B$ نگاشت همانی است. در نتیجه، f یک درون‌بری است.

($\Rightarrow$) فرض کنید H و D ایده‌آل های r- چگالی از S باشند و $f: c_S^H(D) \to D$ یک درون‌بری باشد. در این صورت با استفاده از قضیهٔ ۳.۱۱، برای هر ایده‌آل r- چگال D از S کافی است نشان دهیم D در S، dli- خالص است. اگر برای هر $s \in S$ داشته باشیم $Hs \leq D$، آن‌گاه برای هر $h \in H$ داریم $hf(s) = f(hs) = hs$. یعنی D در S dli- خالص است. در نتیجه، با استفاده از قضیهٔ ۳.۱۱ هر S-کنش به طور مطلق di- خالص است.

لم ۴.۵. فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از S-کنش A باشد به گونه‌ای که $Sb \cap S\acute{b} \neq \emptyset$ و $Sb \in \mathbb{R}_r$، برای هر $b, \acute{b} \in B$. در این صورت اگر $\bigcup_{b \in B} Sb = A$، آن‌گاه $A \in \mathbb{R}_r$.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر $X \in \sum_{r(A)}$، $b \in B$ چنان وجود دارد که $Sb \leq X$ و در نتیجه، $X = A$. چون $Sb \in \mathbb{R}_r$، پس تذکر ۱.۱ وجود $X_b \in \sum_{r(A)}$ با این ویژگی که $Sb \leq X_b$ را نتیجه می‌دهد. اما اعضای $\sum_{r(A)}$ ازهم مجزا هستند و برای هر $b, \acute{b} \in A$ داریم $Sb \cap S\acute{b} \neq \emptyset$. بنابراین برای هر $b, \acute{b} \in B$ داریم $X_b = X_{\acute{b}}$. پس $A = \bigcup_{b \in B} Sb = X_b$. یعنی A، S-کنشی r- رادیکال است.

قضیه ۴.۶. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و B یک زیرکنش r- رادیکال از S-کنش A باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل چپ r - چگال D از S، $c_A^D(B)$ زیرکنشی r- رادیکال از A است.

برهان. فرض کنید a عنصری از S - کنش A با ویژگی $Da \leq B$ باشد. در این صورت چون D ایده‌آل چپ r- چگالی از S است، پس داریم $S/D \in \mathbb{R}_r$. بنابراین، با توجه به بسته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت تصویر هم‌ریخت، Sa/Da و درنتیجه، $Sa/(Sa \cap B) \cong S.(a/B)$ عضو $\mathbb{R}_r$ هستند. همچنین اگر $\acute{a} \in A$ و $D\acute{a} \leq B$، آن‌گاه تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: c_A^D(B) \to c_A^D(B)/B$ عنصر صفری از $c_A^D(B)/B$ و مشمول در $S.(a/B) \cap S.(\acute{a}/B)$ است. پس با استفاده از لم ۴.۵ داریم $c_A^D(B)/B \in \mathbb{R}_r$. اما $\mathbb{R}_r$ تحت گسترش همنهشتی‌های ریس بسته است و $B \in \mathbb{R}_r$. بنابراین $c_A^D(B)/B \in \mathbb{R}_r$ و این، برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۴.۷. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و B یک زیرکنش dli- خالص از S-کنش A باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل چپ r-چگال D از S، زیرکنش B در $c_A^D(B)$، r- چگال است.

برهان. برای اثبات، نشان می‌دهیم $r(c_A^D(B)/B)=\nabla_{c_A^D(B)/B}$. فرض کنید $x/B\in c_A^D(B)/B$. در این صورت با استفاده از تعریف $c_A^D(B)$، عنصر s از S و $a\in A$ با ویژگی $Da\le B$ چنان وجود دارد که $x=sa$. حال چون B زیرکنشی dli- خالص از A است، پس $b\in B$ چنان وجود دارد که برای هر $d\in D$، $db=da$. بسته بودن $\mathbb{R}_r$ تحت هم‌ریختی نتیجه می‌دهد که $S.(a/B)\in\mathbb{R}_r$. بنابراین $X_x\in\sum_{r(c_A^D(B)/B)}$ چنان وجود دارد که $x/B\in S.(a/B)\le X_x$. اما تصویر هم‌ریخت B تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: c_A^D(B)\to c_A^D(B)/B$ عنصر صفری از $S.(a/B)$ است و $\sum_{r(c_A^D(B)/B)}$ متشکل از زیرکنش‌های مجزای $c_A^D(B)/B$ است. بنابراین همه X_xها با هم برابرند. در نتیجه، $r(c_A^D(B)/B)=\nabla_{c_A^D(B)/B}$.

تعریف ۴.۸. S-کنش Q را c^D - انژکتیو می‌نامیم، هرگاه نسبت به c^D- تک‌ریختی‌ها انژکتیو باشد.

نتیجه ۱۰.۳. هر زیرکنش r- بسته از یک S-کنش به طور مطلق dli- خالص، به طور مطلق dli- خالص است.

تذکر ۴.۹. با استفاده از واژه‌گزینی بنشافسکی در[۱،۱۰،۱۱] انژکتیوی نسبت به یک ردهٔ M از تک‌ریختی‌ها در یک رسته را خوش رفتار می‌نامیم، هرگاه در قضایای خوش رفتاری صدق کند.

ما در [۱۸] نشان داده‌ایم که برای رادیکال هونکه r اگر M ردهٔ r- تک‌ریختیها باشد، آن‌گاه M- انژکتیوی خوش رفتار است. در ادامه، نشان خواهیم داد که برای هر ایده‌آل r- چگال و خودتوان D ردهٔ زیرکنش‌های c^D- چگال یک رادیکال کورش-آمیتسر را تولید می‌کند. درنتیجه، c^D- انژکتیوی، برای هر ایده‌آل r - چگال و خودتوان D، خوش رفتار است.

قضیه ۴.۱۰. برای هر ایده‌آل t- چگال D از S با ویژگی $D=D^2$ بستار رده

$\{A/B|$ باشد A چگال از c^D- زیر کنشی $B\}$ تحت یکریختی، یعنی

$C=I(\{A/B|$ باشد A چگال از c^D- زیر کنشی $B\})$،

ردهٔ رادیکال از یک رادیکال کورش- آمیتسر است.

برهان. برای اثبات، از قضیهٔ ۲.۴ از [۲۴] استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم C تحت (۱) تصویر هم‌ریخت‌ها، (۲) گسترش همنهشتی‌های ریس و (۳) ویژگی استقرایی، بسته است.

(۱) فرض کنید B زیرکنش c^D- چگال از یک S-کنش A و $f: A/B\to C$ هم‌ریختی‌ای پوشا باشد. در این صورت چون f پوشااست، پس برای هر $c\in C$، $a\in A$ چنان وجود دارد که $f(a/B)=c$. همچنین چون B در A، c^D-چگال است، پس $\acute{a}\in A$ و $s\in S$ چنان وجود دارد که $s\acute{a}=a$ و $D\acute{a}\le B$. بنابراین، برای هم‌ریختی کانونی $\pi: A\to A/B$ داریم $sf(\acute{a}/B)=f(a/B)=c$ و $Df(\acute{a}/B)\le f(\pi(B))$. درنتیجه، $f(\pi(B))$ در S-کنش C، c^D- چگال است. حال چون B تحت π به عضو صفر A/B نگاشته می‌شود و هم‌ریختی‌ها، صفر را به صفر می‌برند، لذا $f(\pi(B))$ در C زیرکنش تک عضوی صفر است و اگر هر کنش را به هم‌ریختی صفر تقسیم کنیم، باز هم با خودش یک‌ریخت می‌شود، داریم $C\cong C/f(\pi(B))$، پس $C\in\mathbb{C}$.

(۲) فرض کنید A یک S-کنش و ρ همنهشتی ریسی روی A به گونه‌ای باشد که $\sum_\rho\subseteq C$ و $A/\rho\in C$. در این صورت تصویر $B\in\sum_\rho$ تحت هم‌ریختی کانونی $\pi: A\to A/\rho$ عنصر صفری از A/ρ است؛ اما با استفاده از تذکر ۴.۱ و تعریف رده C، به راحتی می‌توان نشان داد که هر عضو C از C دقیقاً یک عنصر صفر θ_C دارد و برای هر

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

$c \in C$ داریم $Dc = \{\theta_C\}$. بنابراین $\left|\sum_\rho\right| \leq ۱$. در حالت $\theta = \sum_\rho$، حکم بدیهی است. پس فرض می‌کنیم $\left|\sum_\rho\right| = ۱$. در این حالت از این حقیقت که $A/\rho \in C$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که زیرکنش $B \in \sum_\rho$ در A، c^D- چگال است. پس برای هر $a \in A$ داریم $Da \leq B$. در نتیجه چون $B \in C$، پس عنصر θ در B چنان موجود است که به ازای هر $d \in D$، $Dda = \{\theta\}$. بنابراین با استفاده از فرض داریم $Da = D^۲a = \{\theta\}$. یعنی $A \in C$ و درنتیجه، C تحت گسترش همنهشتی‌های ریس بسته است.

(۳) فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر صعودی در C باشد. در این صورت برای هر $i \in I$، عنصری مانند θ_i در A_i چنان موجود است که برای هر $a \in A_i$، $Da = \{\theta_i\}$. چون $\{A_i\}_{i\in I}$ زنجیری صعودی است، پس برای هر $i \in I$ داریم $\theta_i = \theta_۱$. از این رو برای هر $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ داریم $\bigcup_{i\in I} A_i \cong (\bigcup_{i\in I} A_i)/\theta_۱ \in C$.

در قسمت اول برهان قضیهٔ ۴.۱۰ حکم قوی‌تری را ثابت کرده‌ایم. درحقیقت این قسمت از برهان حتی اگر ایده‌آل چپ D ایده‌آل یا خودتوان نباشد نیز، صحیح است. بنابراین قضیه زیر به سادگی از قسمت اول برهان قضیهٔ ۱۰،۴ به دست می‌آید.

قضیه ۴.۱۱. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و D یک ایده‌آل چپ r- چگال از S باشد. در این صورت بستار $C = I\left(\{A/B | \{B$ زیر کنشی $c^D -$ چگال از A باشد$\}A/B\}$ تحت یکریختی، یعنی $-$ چگال از A باشد$\right)$ $\left(\{B$ زیر کنشی c^D یک زیررده از رده رادیکال $\mathbb{R}_r$ است. گذشته از این، هر زیرکنش c^D- چگال از یک S-کنش A در آن r- چگال است.

برهان. با استفاده از برهان ۴.۱۰ رده C تحت تصویر هم‌ریخت بسته است. همچنین $C \cap S_r$ از S-کنش‌های بدیهی تشکیل شده است. در واقع اگر $X \in C \cap S_r$، آن‌گاه یک‌ریختی $f: A/B \to X$ که در آن B زیرکنش c^D- چگالی از A است، وجود دارد. بنابراین وقتی که $\pi: A \to A/B$ هم‌ریختی کانونی باشد، $f\big(\pi(B)\big)$ زیرکنش c^D-چگال از X خواهد بود. لذا از تعریف عملگر بستار c^D می‌توان نتیجه گرفت که برای هر عنصر a از X، $\acute{a} \in X$ و $s \in S$ چنان وجود دارد که $s\acute{a} = a$ و $D\acute{a} = f\big(\pi(B)\big)$. پس با استفاده از قضیهٔ ۲.۱۰، $a = \acute{a} = f\big(\pi(B)\big)$ عنصر صفری از X است. در نتیجه، S-کنش X بدیهی است. حال با استفاده از قضیهٔ ۳.۲ از [۲۴] داریم $C \leq \mathbb{R}_r$. بنابراین چون برای هر زیرکنش c^D-چگال B از یک S - کنش A داریم $A/B \in C$، پس $A/B \in \mathbb{R}_r$. یعنی هر زیرکنش c^D-چگال از A در آن r- چگال است و این، همان حکم است.

نتیجهٔ ۴.۱۲. فرض کنید r یک رادیکال هونکه و D ایده‌آل r- چگالی از S با ویژگی $D = D^۲$ باشد. در این صورت:

(۱) $C \subseteq \mathbb{R}_r$

(۲) هر S-کنش r-انژکتیو، c^D-انژکتیو است.

برهان. (۱) واضح است.

(۲) بنا به قضیهٔ بالا، چون هر زیرکنش c^D-چگال از S-کنشی مانند A، در A r- چگال است، S-کنش‌های r- انژکتیو نسبت به c^D- تک‌ریختی‌ها انژکتیو هستند.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

References

1. *B. Banaschewski. Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras. In* Proc. Conf. on Universal Algebra (Queen's Univ., Kingston, Ont., 1969)*, pages 131-147. Queen's Univ., Kingston, Ont., 1970.*
2. *B. Banaschewski. Equational compactness of* G-*sets.* Canad. Math. Bull.*, 17:11-18, 1974.*
3. *B. Banaschewski and E. Nelson. Equational compactness in equational classes of algebras.* Algebra Universalis*, 2:152-165, 1972.*
4. *H. Barzegar. Sequentially pure injectivity.* Quaest. Math.*, 38(2):191-201, 2015.*
5. *H. Barzegar and M.M. Ebrahimi. Sequentially pure monomorphisms of acts over semigroups.* Eur. J. Pure Appl. Math.*, 1(4):41-55, 2008.*
6. *H. Barzegar, M.M. Ebrahimi, and M. Mahmoudi. Essentiality and injectivity relative to sequential purity of acts.* Semigroup Forum*, 79(1):128-144, 2009.*
7. *P.M. Cohn. On the free product of associative rings.* Math. Z.*, 71:380-398, 1959.*
8. *D. Dikranjan and W. Tholen.* Categorical structure of closure operators*, volume 346 of* Mathematics and its Applications. *Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995. With applications to topology, algebra and discrete mathematics.*
9. *M.M. Ebrahimi. On ideal closure operators of* M-*sets.* Southeast Asian Bull. Math.*, 30(3):439-444, 2006.*
10. *M.M. Ebrahimi, M. Haddadi, and M. Mahmoudi. Injectivity in a category: an overview on well behavior theorems.* Algebras Groups Geom.*, 26(4):451-471, 2009.*
11. *M.M. Ebrahimi, M. Haddadi, and M. Mahmoudi. Injectivity in a category: an overview on smallness conditions.* Categ. General Alg. Struct. Appl.*, 2(1):83-112, 2014.*
12. *M.M. Ebrahimi, M. Mahmoudi, and L. Shahbaz. Proper behaviour of sequential injectivity of acts over semigroups.* Comm. Algebra*, 37(7):2511-2521, 2009.*
13. *S. Gacsályi. On pure subgroups and direct summands of abelian groups.* Publ. Math. Debrecen*, 4:89-92, 1955.*
14. *V. Gould. Completely right pure monoids.* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 87(1):73-82, 1987.*
15. *V. Gould. Coperfect monoids.* Glasgow Math. J.*, 29(1):73-88, 1987.*
16. *M. Haddadi and M.M. Ebrahimi. A radical extension of the category of S-sets.* Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 43(5):1153-1163, 2017.*

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]

17. *M. Haddadi and S.M.N. Shaykholislami. On radical and torsion theory in the category of S-acts. arXiv:1806.07075v1, 2018.*

18. *M. Haddadi and S.M.N. Shaykholislami. Radical-injectivy in the category S-act. arXiv:1806.07077v1, 2018.*

19. *M. Kilp, U. Knauer, and A. V. Mikhalev.* Monoids, acts and categories, *volume 29 of* De Gruyter Expositions in Mathematics. *Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000. With applications to wreath products and graphs, a handbook for students and researchers.*

20. *J. Lambek.* Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients. *With an appendix by H. H. Storrer on torsion theories and dominant dimensions. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 177. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.*

21. *M. Mahmoudi and M.M. Ebrahimi. Purity and equational compactness of projection algebras.* Appl. Categ. Structures, *9(4):381-394, 2001.*

22. *M. Mahmoudi and Gh. Moghaddasi. Sequential purity and injectivity of acts over some classes of semigroups.* Taiwanese J. Math., *15(2):737-744, 2011.*

23. *P. Normak. Purity in the category of* M-*sets.* Semigroup Forum, *20(2):157-170, 1980.*

24. *R. Wiegandt. Radical and torsion theory for acts.* Semigroup Forum, *72(2):312-328, 2006.*

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.495]