

ساختار ماتریس کوواریانس موجکی و برآورد بیزی-موجکی پارامترهای فرآیند خود بازگشتی با حافظه طولانی مدت

محمود افشاری*، سعید طهماسبی، شبنم شادمان

دانشگاه خلیج فارس، دانشکده مهندسی سیستم‌های هوشمند و علوم داده

پذیرش ۹۸/۰۵/۲۶

دریافت ۹۷/۰۱/۳۰

چکیده

در روند بررسی و شناخت جوامع آماری، تحلیل داده‌های به‌دست‌آمده از این جوامع، امری مهم و ضروری تلقی می‌شود. یکی از روش‌های مناسب در تحلیل داده‌ها، بررسی ساختاری تابع برازش شده به‌وسیله این داده‌ها است. تبدیل موجک، یکی از ابزارهای بسیار قوی در تحلیل چنین توابع است و ساختار ضرایب موجک اهمیت خاصی دارد. در این مقاله، ضمن معرفی تبدیل موجک و فرآیند خود بازگشتی میانگین متحرک با حافظه طولانی مدت، ساختار ماتریس کوواریانس موجکی این فرآیند بررسی و سپس پارامترهای این مدل به‌روش بیزی و بر پایه موجک‌ها برآورد می‌شوند. در پایان با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد و کارایی برآورد پیشنهادی، در مقایسه با دو روش برآوردیابی دیگر ارزیابی می‌شود. نتایج نشان‌دهنده عملکرد خوب این روش هست.

واژه‌های کلیدی: تبدیل موجک، ضرایب موجکی، حافظه طولانی مدت، استنباط بیزی

مقدمه

داده‌هایی که از مشاهده یک پدیده در طول زمان به‌دست می‌آیند بسیار متداول هستند. یکی از مدل‌های مشهور در سری‌های زمانی و پردازش سیگنال، مدل خود بازگشتی میانگین متحرک^۱ (ARMA) است. اگر سری زمانی بررسی شده دارای حافظه بلندمدت باشد، یک مدل بخشی‌آ یا به‌عبارتی ARFIMA مناسب است. مدل $ARFIMA(p, d, q)$ برای اولین بار به‌وسیله گرانگر و همکاران معرفی شد [۱]. روش‌های کلاسیک برای مدل‌بندی، استنباط و برآورد این فرآیندها، منجر به محاسبات پیچیده ساختار کوواریانس و توابع درست‌نمایی می‌شود که کار کردن با داده‌ها را با مشکل روبه‌رو می‌سازد.

تبدیل موجک، یکی از ابزارهای بسیار قوی در تحلیل چنین توابعی است و این توابع را از منظرهای متفاوت زمانی و مکانی و همچنین فرکانس‌های کم و زیاد به بهترین شکل بررسی می‌شود. تبدیل موجک به‌دلیل خاصیت هم‌بستگی کاهشی در برآورد فرآیندهای با حافظه طولانی مدت، روشی بسیار مناسب و کارا در تحلیل و استنباط است. مقادیری که از تبدیل موجک [۲]، برای فرآیندهای با حافظه طولانی مدت به‌دست می‌آید، برخلاف ساختار کوواریانس پیچیده این فرآیندها، ضرایب موجک تقریباً ناهم‌بسته است و در نتیجه کار با آن بسیار ساده‌تر است. ساختار کوواریانس

*نویسنده مسئول afshar@pgu.ac.ir

1. Autoregressive moving average model
2. Fractional arma

متراکم چنین فرآیندهایی، محاسبه دقیق تابع درست‌نمایی داده‌ها را با مشکل مواجه می‌سازد [۳]. در این موارد استفاده از روش بیزی، می‌تواند به آسانی برای محاسبه ضرایب موجک استفاده شود. در این مقاله، ضمن معرفی مختصری از تبدیل موجک، تقریب تابع تولیدشده به وسیله بردار داده‌ها بر اساس موجک‌ها به صورت تئوری شرح داده می‌شود. سپس با معرفی مدل‌هایی با حافظه طولانی مدت به تشریح استنباط پارامترهای مدل خاصی از فرایند با حافظه طولانی بر اساس روشی بیزی و با بهره‌گیری از موجک‌ها می‌پردازیم. در پایان با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد و کارایی مدل و روش برآورد، ارزیابی می‌شود.

ساختار این مقاله بدین صورت است. که ابتدا پس از معرفی تبدیلات موجکی در بخش دوم، مدل $ARFIMA(p, d, q)$ ساختار ماتریس کوواریانس آن در بخش سوم بررسی می‌شود. در بخش چهارم برآورد بیزی پارامترهای مدل $ARFIMA$ بر پایه موجک‌ها محاسبه می‌شود. در بخش آخر با استفاده از شبیه‌سازی مطالب تئوری در عمل بررسی برآورد هدف، ارزیابی می‌شود.

تجزیه موجکی

موجک‌ها ابزاری قابل انعطاف با محتوای غنی ریاضی هستند که در تجزیه و تحلیل یک تابع نوسانی از زمان و مکان به کار می‌روند. در تجزیه موجکی، موجک اصلی (تابع یا سیگنال) روی دسته‌ای از توابع پایه که موجک نامیده می‌شوند تصویر شده و با استفاده از حاصل ضرب موج اصلی و تابع موجک، تجزیه موجکی انجام می‌گیرد. موجک تابعی با میانگین صفر است که بسط بر اساس انتقال و اتساع انجام می‌شود. اساس موجک از موجک پدر $\phi(\cdot)$ و موجک مادر $\psi(\cdot)$ تشکیل شده که به ترتیب روند کلی داده‌ها و انحرافات را نشان می‌دهند و بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

برای $z \geq 0$ و $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ انتقال‌های مقیاسی ϕ و ψ بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k),$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \quad (2)$$

توابع ϕ ، $\psi(x)$ ، $\phi_{j,k}(x)$ و $\psi_{j,k}(x)$ که قطعه‌وار ثابت هستند می‌توانند در برآورد توابع استفاده شوند و برای هر j ثابت $\psi_{j,k}$ را موجک‌های نسل j ام گوئیم. اگر برای هر $z \in Z$ ، $V_j = \text{Span}\{\phi_{j,k}, k \in Z\}$ ، در این صورت V_j ها دنباله‌ای از فضاهای تودرتو به صورت $V_j \subset V_{j+1}$ هستند.

منظور از Span فضای تولید شده است، که اگر v_1, v_2, \dots, v_n بردارهایی از فضای برداری V باشند، به طوری که هر بردار دلخواهی در V به صورت ترکیب خطی از بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n قابل بیان باشد، آن‌گاه می‌گوئیم که این بردارها فضای برداری V را تولید Span یا تولید می‌کنند.

تبدیل موجک گسسته در بسیاری از تجزیه و تحلیل‌های سیگنال و پردازش و متراکم سازی تصاویر استفاده می‌شود. نمایش ریاضی این تبدیل را با فرض این که $n = 2^J, X = (x_1, \dots, x_n)$ بردار داده‌ها باشد که در آن J عدد صحیح مثبت و نشان‌گر مقیاس داده‌ها است.

تبدیل موجک استاندارد، مطابق آنچه مالت [۴]، پیشنهاد داد با به‌کار بردن فیلترهای زیر، روی داده‌ها عمل می‌کند:

$$\begin{aligned} c_{J-1,k} &= \sum_m h_{m-2k} c_{J,m}, \\ d_{J-1,k} &= \sum_m g_{m-2k} c_{J,m}, \end{aligned} \quad (3)$$

$c_{J-1,k}$ را فیلتر مقیاسی و $d_{J-1,k}$ را فیلتر موجکی گوئیم و ضرایب h_l و g_l بسته به خانواده موجکی استفاده شده، مقادیر متفاوتی را شامل می‌شوند. موجکی که ما در این مقاله استفاده کرده‌ایم از موجک‌های دوویچز [۲] هستند. چنین موجکی محمل فشرده دارد که منجر به فیلترهایی می‌شود که تعداد متناهی ضرایب h_l غیرصفر دارند. برای اهداف عملی تبدیل موجک گسسته اغلب به صورت ماتریسی $Z = WX$ که W ماتریسی متعامد و بدین صورت است، ظاهر می‌شود:

$$\begin{aligned} W &= [w_{J-1}, w_{J-2}, \dots, w_{J-r}, v_{J-r}]^T \\ v_{J-r} &= [\phi_{-r,k}(0) \cdots \phi_{-r,k}(n-1)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2^r} - 1 \quad \text{که در آن} \\ w_{J-i} &= [\psi_{-i,k}(0) \cdots \psi_{-i,k}(n-1)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2^i} - 1, \quad i = r, \dots, 1 \end{aligned}$$

در این تبدیل ماتریسی داده‌ها، به مجموعه‌ای از ضرایب بدین صورت تجزیه می‌شوند:

$$Z = [d_{J-1,0} \ d_{J-1,1} \ \cdots \ d_{J-1,\frac{n}{2}-1} \ d_{J-2,0} \ d_{J-2,1} \ \cdots \ d_{J-2,\frac{n}{4}-1} \ \cdots \ d_{J-r,0} \ d_{J-r,1} \ \cdots \ d_{J-r,\frac{n}{2^r}-1} \ c_{J-r,0} \ c_{J-r,1} \ \cdots \ c_{J-r,\frac{n}{2^r}-1}]^T$$

با توجه به این که ماتریس W متعامد است بنابراین $W^{-1} = W^T$. در نتیجه تبدیل عکس فرآیند بالا برای تولید مجموعه‌ی داده‌ها از تجزیه موجکی آن‌ها به صورت $X = W^T Z$ به دست می‌آید (برای جزئیات بیشتر به [۵] مراجعه شود).

لم ۱. فرض کنید $f(x)$ تابعی متعلق به فضای $L^2[0,1]$ باشد. برای مجموعه موجک $\{\psi_{j,k}\}_{k=0}^{2^j-1}$ به همراه موجک پدر، تقریب f_{j+1} از تابع $f(x)$ در مقیاس $j+1$ بدین صورت به دست می‌آید:

$$f_{j+1}(x) = f_j(x) + \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x).$$

برهان: با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) - f_j(x) &= \sum_{k=0}^{2^j-1} [2^{-\frac{1}{2}}(c_{j+1,2k} - c_{j+1,2k+1}) 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^{j+1}x - 2k) \\ &\quad - 2^{-\frac{1}{2}}(c_{j+1,2k} - c_{j+1,2k+1}) 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^{j+1}x - 2k - 1)]. \end{aligned}$$

اکنون، با قرار دادن $d_{j,k} = 2^{-\frac{1}{2}}(c_{j+1,2k} - c_{j+1,2k+1})$ این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) - f_j(x) &= \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} [\phi(2^{j+1}x - 2k) - \phi(2^{j+1}x - 2k - 1)] \\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) = \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \end{aligned}$$

نتیجه ۲. با توجه به رابطه (۲) و با استفاده از لم ۱ می‌توان تقریب تابع در این مقیاس را بدین صورت نوشت:

$$f_{j+1}(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (۴)$$

نتیجه ۳. با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۴) نمایشی از بهترین مقیاس تابع f بدین صورت است:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (۵)$$

اکنون با توجه به این که برای بردار داده‌ها \mathcal{Y} ، اولین مقیاس درشت $J-1$ است و با قرار دادن $k, j_0 = 0$ مربوط به $\phi_{j_0,k}$ صفر و k مربوط به $\psi_{j,k}$ از 0 تا $2^j - 1$ است، از رابطه (۴) رابطه (۶) که تجزیه موجکی تابع f نامیده می‌شود را نتیجه می‌گیریم.

$$f(x) = c_{0,0} \phi(x) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (۶)$$

برای جزئیات بیشتر در باره موجک‌ها به [۶] مراجعه کنید.

ساختار ماتریس کوواریانس موجکی فرایند *ARFIMA*

سری‌های زمانی یکی از شاخه‌های پرکاربرد آمار است. بخش مهمی در تحلیل سری‌های زمانی انتخاب مدل احتمالی مناسب برای برازش دادن به داده‌ها است. در تحلیل سری‌های زمانی، سری‌هایی وجود دارند که تابع خود هم‌بستگی آن‌ها به صورت نمایی به سمت صفر میل می‌کند. چنین سری‌هایی به دلیل داشتن توابع خود هم‌بستگی تنک دارای تابع خود هم‌بستگی متناهی هستند و سری زمانی با حافظه کوتاه‌مدت نامیده می‌شوند [۷]. در این بخش ضمن بررسی ساختار کوواریانس مدل، با استفاده از تبدیل موجک گسسته، واریانس و کوواریانس ضرایب موجکی و مقیاسی مدل مذکور، محاسبه می‌شود.

تعریف ۴. $\{X_t\}$ یک فرآیند $ARMA(p, q)$ است اگر ایستا باشد و برای هر t داشته باشیم:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

که در آن $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ و $p, q \geq 0$ اعداد صحیح هستند.

سری X_t را به گونه‌ای در نظر بگیرید که با تفاضل‌گیری از زمان d آن، سری‌ای به دست آید که از یک فرآیند $ARMA$ تبعیت کند، در این صورت، سری X_t را سری $ARFIMA$ می‌نامند. چنین فرآیندهای ایستایی که بستگی طولانی‌مدت را از خود به نمایش می‌گذارند، امروزه به طور گسترده بررسی شده است و کاربردهای فراوانی در بسیاری از شاخه‌ها از جمله، دارائی، علوم مربوط به زمین‌شناسی، آب‌شناسی و آمار داشته‌اند. از این‌رو شناخت، بررسی و به‌ویژه برآورد پارامترهای این فرآیند، اهمیت شایانی دارد.

تعریف ۵. گوییم فرآیند X_t به صورت $ARFIMA(p, d, q)$ است، در صورتی که داشته باشیم:

$$\Phi(B)(1-B)^d(x_t - \mu) = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (۷)$$

که p و q اعداد صحیح نامنفی هستند و B عملگر پس رو است و به صورت $B^j x_t = x_{t-j}$ تعریف می شود. همچنین چند جمله ای های $\Phi(B)$ و $\theta(B)$ بدین صورت است:

$$\Phi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$$

در تعریف مذکور، μ میانگین فرآیند است و ε_t فرآیند اغتشاش گوسین با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 است. بدون این که از کلیت مسئله کم شود، μ را صفر در نظر می گیریم.

با تفاضل گیری زمان d از مدل، فرآیند y_t به صورت $(1-B)^d x_t = y_t$ بازنویسی می شود. بنابراین مدل $ARFIMA(p, d, q)$ به $\Phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ تبدیل می شود که در آن y_t فرآیندی است که از مدل $ARMA(p, q)$ تبعیت می کند. فرآیند $ARFIMA(p, d, q)$ برای $-\frac{1}{2} \leq d \leq \frac{1}{2}$ فرآیندی ایستا و برگشت پذیر است.

یک دسته خاص از فرآیندهای $ARFIMA(p, d, q)$ زمانی حاصل می شود که $p=0, q=0$ باشد، در این صورت $ARFIMA(0, d, 0)$ ، اغتشاش تفاضلی کسری نامیده می شود که مدل بندی آن بدین صورت است:

$$(1-B)^d x_t = \varepsilon_t$$

اکنون برای محاسبه تابع خود همبستگی فرآیند $ARFIMA$ فرض کنید سری زمانی انتگرالی کسری X_t دارای توزیع نرمال باشد که به وسیله مدل داده شده در رابطه (۷) تولید شده و در این شرایط صادق باشد:

الف) درجه چند جمله ای $\Phi(B)$ کمتر مساوی با p و درجه چند جمله ای $\theta(B)$ کمتر مساوی با q است و ریشه های $\Phi(x)$ و $\theta(x)$ بیرون دایره واحد قرار دارند و همچنین $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.
ب) $|d| < \frac{1}{2}$ ، ج) ریشه های $\Phi(x)$ حقیقی هستند.

فرض کنید X_T یک نمونه با T مشاهده به صورت $X_T = [X_1 X_2 \dots X_T]'$ باشد و همچنین $X_T \sim N(0, \Sigma_X)$. ایستا بودن سری زمانی X_T باعث می شود که ماتریس کوواریانس سری، برای $i, j = 1, 2, \dots, T$ به صورت $\Sigma_X = [\gamma|i-j|]$ باشد.

چون طبق شرط ۱، ریشه های $\Phi(B)$ بیرون دایره واحد هستند از این رو چند جمله ای $\Phi(x)$ بدین صورت قابل بازنویسی است:

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j x), \quad |\rho_j| \leq 1, \quad j = 1, \dots, p$$

تابع خود هم بستگی، با توجه به [۸] و با در نظر گرفتن چگالی طیفی X_t بر مبنای پارامترهای مدل، با استفاده از رابطه (۸) به دست می آید:

$$\gamma(\tau) = \int_0^{2\pi} f_X(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda \quad (۸)$$

بر اساس [۹] چگالی طیفی $X(t)$ به صورت (۹) است.

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \alpha_j \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1-\rho_j\omega)} - \frac{1}{(1-\rho_j^{-1}\omega)} \right] (1-\omega)^{-d} (1-\omega^{-1})^{-d} \omega^{p+l} \quad (۹)$$

حال با جای گذاری رابطه (۹) در رابطه (۸)، تابع خود هم بستگی بدین صورت محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \alpha_j \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1-\rho_j\omega)} - \frac{1}{(1-\rho_j^{-1}\omega)} \right] (1-\omega)^{-d} (1 \\ &\quad - \omega^{-1})^{-d} \omega^{p+l} e^{i\lambda\tau} d\lambda \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \alpha_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1-\rho_j\omega)} - \frac{1}{(1-\rho_j^{-1}\omega)} \right] (1-\omega)^{-d} (1 \right. \\ &\quad \left. - \omega^{-1})^{-d} \omega^{p+l} e^{i\lambda\tau} d\lambda \right] \end{aligned}$$

با قرار دادن $h = p + l - \tau, \omega = e^{-i\lambda}$ داریم.

$$C(d, h, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1-\rho_j\omega)} - \frac{1}{(1-\rho_j^{-1}\omega)} \right] \times (1 - e^{-i\lambda})^{-d} (1 - e^{i\lambda})^{-d} e^{-i\lambda h} dh$$

بنابراین تابع خود هم‌بستگی را می‌توان به صورت (۱۰) بازنویسی کرد:

$$\gamma(\tau) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \Psi(l) \zeta_j C(d, p + l - \tau, \rho_j) \quad (10)$$

که در آن روابط $\Psi(l) = \sum_{v=\max(0,l)}^{\min(q,q+l)} \theta_v \theta_{v-l}$ و $\alpha_j = [\rho_j \prod_{k=1}^p (1 - \rho_j \rho_k) \prod_{k \neq j}^p (\rho_k - \rho_j)]^{-1}$ برقرار است.

اگر داده‌ها از یک فرآیند تصادفی با تابع خود هم‌بستگی $\gamma(\tau)$ تولید شوند، ماتریس واریانس کوواریانس بردار X برای $i, j = 1, \dots, n$ ، به صورت $\sum_X(i, j) = [\gamma(|i - j|)]$ است. بنابراین با استفاده از نماد ماتریسی تبدیل موجک گسسته، می‌توان ماتریس واریانس کوواریانس \sum_Z را به صورت (۱۱) محاسبه کرد.

$$\sum_Z = W \sum_X W^T \quad (11)$$

محاسبه \sum_Z با استفاده از رابطه (۹) کارایی ندارد. [۹] یک روش سریع‌تر را با استفاده از فیلترهای بازگشتی با استفاده از تبدیل موجک گسسته ارائه کرد. فرض کنید F یک فیلتر خطی است که با استفاده از دنباله نامتناهی f_l به‌عنوان ضرایب، بدین صورت عمل می‌کند که در آن a_n دنباله نامتناهی است.

$$(Fa)_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n-k} a_n$$

هم‌چنین فرض کنید D_0 عملگر زیر نمونه‌ای است که به صورت $(D_0 a)_j = a_{2j}$ عمل می‌کند.

با فرض $d^{(j)} = [d_{j,k}]^T$ و $c^{(j)} = [c_{j,k}]^T$ برای تمام $k \in \mathbb{Z}$ نتیجه می‌شود که $(D_0 h)_k = h_{2k}$ و $(D_0 g)_k = g_{2k}$ هم‌چنین می‌توان نوشت:

$$(Hc)_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} c_{j+1,m}, \quad (Gc)_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{m-2k} c_{j+1,m} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

در نتیجه روابط فیلترهای بازگشتی تبدیل موجک گسسته، به صورت ماتریسی (۱۲) قابل بازنویسی است:

$$c^{(j)} = H_{j+1} c^{(j+1)}, \quad d^{(j)} = G_{j+1} c^{(j+1)}, \quad (12)$$

که H_{j+1} و G_{j+1} ماتریس توابع خطی مربوط به فیلترهای $D_0 H$ و $D_0 G$ هستند.

قضیه ۶. فرض کنید $X(t)$ فرآیند دارای تغییری است که گشتاورهای اول و دوم آن موجود است. با توجه به پایه موجکی تعریف شده روی $L^2(R)$ نتایج زیر برقرار است که در آن j, j', k, k' اعداد صحیح هستند.

$$cov(d_{j,k}, d_{j',k'}) = \sum_m \sum_n g_{m-2k} g_{n-2k'} cov(c_{j+1,m}, c_{j'+1,n}). \quad (الف)$$

$$cov(c_{j,k}, c_{j',k'}) = \sum_m \sum_n h_{m-2k} h_{n-2k'} cov(c_{j+1,m}, c_{j'+1,n}). \quad (ب)$$

$$\text{cov}(c_{j,k}, d_{j',k'}) = \sum_m \sum_n h_{m-2k} g_{n-2k'} \text{cov}(c_{j+1,m}, c_{j'+1,n}). \quad (\text{ج})$$

برهان:

$$\begin{aligned} \text{cov}(d_{j,k}, d_{j',k'}) &= \text{cov}\left(\sum_m g_{m-2k} c_{j+1,m}, \sum_n g_{n-2k'} c_{j'+1,n}\right) \\ &= \sum_m \sum_n \text{cov}(g_{m-2k} c_{j+1,m}, g_{n-2k'} c_{j'+1,n}) \\ &= \sum_m \sum_n g_{m-2k} g_{n-2k'} \text{cov}(c_{j+1,m}, c_{j'+1,n}). \end{aligned}$$

اثبات قسمت (ب) و (ج) شبیه اثبات قسمت (الف) است.

نتیجه ۷. با به کار بردن فیلترها در مقیاس $J - 1$ $j = j' = J - 1$ روی مؤلفه‌های ماتریس \sum_X که همان $\gamma(\tau)$ است، کوواریانس بین ضرایب موجک، بین ضرایب مقیاسی و همچنین بین ضرایب موجکی و مقیاسی به دست می‌آید و به همین ترتیب با به کار بردن فیلترها در سایر مقیاس‌ها می‌توان تمام مؤلفه‌های ماتریس \sum_Z را به دست آورد. حال در صورتی که ماتریس واریانس کوواریانس ضرایب مقیاسی $c^{(j+1)}$ در مقیاس $j + 1$ معلوم بوده و با $CC\{j+1, j+1\}$ نمایش داده شود می‌توان ماتریس واریانس کوواریانس ضرایب موجک در مقیاس j را با استفاده از رابطه (۱۰) بدین صورت به دست آورد:

$$\begin{aligned} DD\{j, j\} &= \text{var}(d^{(j)}) = \text{var}(G_{j+1} c^{(j+1)}) = G_{j+1} \text{var}(c^{(j+1)}) G_{j+1}^T \\ &= G_{j+1} [CC\{j+1, j+1\}] G_{j+1}^T \end{aligned}$$

و به همین ترتیب، می‌توان ماتریس واریانس کوواریانس بین ضرایب مقیاسی و بین ضرایب مقیاسی و موجکی در مقیاس j را به دست آورد که به ترتیب با $CC\{j, j\}$ و $CD\{j, j\}$ نشان داده می‌شود. لازم به ذکر است که واریانس‌های بین ضرایب در مقیاس‌های یکسان، واریانس درون مقیاسی نامیده می‌شود.

علاوه بر این کوواریانس‌های بین مقیاسی که مربوط به دو مقیاس متفاوت است برای ضرایب موجک در مقیاس j و $j - 1$ با $DD\{j-1, j\}$ و برای ضرایب مقیاسی در مقیاس $j - 1$ و ضرایب موجکی در مقیاس j با $CD\{j-1, j\}$ نشان داده و به همین ترتیب به دست می‌آید.

اعمال تبدیل موجک گسسته دوبعدی روی ماتریس کوواریانس $CC\{j+1, j+1\}$ ، بلوک‌های قطری، مربوط به واریانس و کوواریانس درون مقیاسی است. بنابراین در شبیه‌سازی‌ها می‌توان با استفاده از تبدیل موجک گسسته دوبعدی و ماتریس $CC\{j+1, j+1\}$ ، ماتریس‌های واریانس کوواریانس مورد نیاز را به آسانی محاسبه کرد.

برآورد بیزی-موجکی پارامترها

در تجزیه موجک، موج اصلی روی دسته‌ای از توابع پایه که موجک نامیده می‌شوند، تصویر شده و با استفاده از حاصل ضرب موج اصلی در تابع موجک می‌توان توابع هدف را برآورد کرد. در تجزیه موجک به دلیل ساختار پایه‌های موجکی، تحلیل هم در حوزه زمان و هم در حوزه مکان امکان پذیر است. علاوه بر این چون موجک‌ها دوره محدودی دارند و برخلاف موج‌های سینوسی که هموار هستند، موجک‌ها ناهموار و نامتقارن هستند می‌توانند در تحلیل پدیده‌های گذرا یا برآورد توابعی که در بعضی از زمان‌ها تغییرات سریع دارند و نوک تیز هستند بهتر عمل کنند.

فرآیند حالت براونی کسری که فرآیندهای *ARFIMA* را نیز در برمی‌گیرد، به وسیله $[\gamma]$ معرفی شد. آنها نشان دادند که وابستگی ضرایب موجک گسسته برای فرآیندهای حالت براونی کسری با سرعتی هذلولی گون در طول زمان

کاهش می‌یابد و به عبارتی ضرایب موجک در این حالت دارای ویژگی هم‌بستگی است. [۳] نشان دادند که ضرایب موجک برای فرآیند حالت براونی کسری با سرعتی بیش‌تر از خود فرآیند کاهش می‌یابند که این باعث می‌شود ماتریس ضرایب و یا تقریب‌های آن تنک و دارای ساختاری مناسب باشد. در نتیجه امکان استفاده از این ساختار برای توسعه الگوریتم‌های سریع در مسائل برآورد یابی فرآیندهای حالت براونی کسری را ممکن می‌سازد. همچنین [۱۰]، [۱۱] نشان دادند که این میزان کاهش در هم‌بستگی ضرایب موجک، وقتی که خود فرآیندهای با حافظه طولانی‌مدت خودهم‌بستگی زیادی دارند، به ما اجازه می‌دهد که با جای‌گزین کردن ضرایب در برآورد و تفسیر، نتایج مناسب‌تری را ارائه دهیم [۱۲]. اکنون می‌توان برآورد بیزی پارامترهای مدل *ARFIMA* را با بهره‌گیری از این ویژگی ضرایب موجک و به‌صورت زیر به‌دست آورد.

از آن‌جاکه تبدیل موجک گسسته تبدیل خطی و متعامد است بنابراین می‌توان ضرایب موجک که دارای توزیع گوسین با میانگین صفر هستند را جانشین توزیع داده‌ها کرد. فرض کنید $\Psi = (\phi, \theta, d, \sigma_\varepsilon^2)$ و همچنین $\Psi_0 = (\phi, \theta, d)$ که $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ ، $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$.

$$[Z_i | \Psi] \sim N(0, \sigma_{Z_i}^2(\Psi)) \quad (۱۳)$$

که به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ از یک‌دیگر مستقل‌اند. واریانس $\sigma_{Z_i}^2$ با توجه به الگوریتم بازگشتی که در بخش قبل ارائه شد به‌دست می‌آید. لازم به ذکر است که زمانی که تنها واریانس‌های ضرایب مدنظر باشد محاسبات به‌طور چشم‌گیری ساده می‌شوند. با توجه به آنچه گفته شد در حقیقت باید *DWT2* را روی ماتریس \sum_X اعمال کرده و مؤلفه‌های قطری ماتریس حاصل، واریانس‌های $\sigma_{Z_i}^2$ مدنظر است [۱۳]. علاوه بر این با توجه به رابطه (۹) و (۱۰) ماتریس واریانس کوواریانس ضرایب موجک بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\sum_Z = \sigma_\varepsilon^2 W \sum_X (\Psi_0) W^T = \sigma_\varepsilon^2 \sum_Z (\Psi_0)$$

بنابراین مؤلفه‌های روی قطر ماتریس \sum_Z که همان واریانس‌های ضرایب موجک هستند بدین‌صورت است:

$$\sigma_{Z_i}^2(\Psi) = \sigma_\varepsilon^2 \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)$$

که در آن $\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)$ تنها به پارامترهای حافظه طولانی‌مدت d و پارامترهای خود برگشتی و میانگین متحرک بستگی دارد و در نتیجه رابطه (۱۳) به‌صورت $[Z_i | \Psi] \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0))$ بیان می‌شود. قضیه ۸ توزیع پسین پارامترها را تحت مفروضاتی نتیجه می‌دهد.

قضیه ۸. فرض کنید شرایط زیر برای مدل بررسی شده برقرار باشد.

۱. پارامترهای $d, \theta, \phi, \sigma_\varepsilon^2$ از یک‌دیگر مستقل‌اند به‌عبارتی. $\pi(\Psi) = \pi(\phi)\pi(\theta)\pi(d)\pi(\sigma_\varepsilon^2)$.

۲. چگالی پیشین برای σ_ε^2 تابع گاما معکوس $IG(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2})$ بدین‌صورت است:

$$\pi(\sigma_\varepsilon^2) = \frac{(\frac{\alpha}{2})^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2})} (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{(\beta+2)}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

۳. برای پارامتر d چگالی پیشین، توزیع یکنواخت روی فاصله $(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ است.

۴. توزیع پیشین ϕ و θ ، توزیع یکنواخت روی فاصله $(-1, 1)$ است.

آن‌گاه توزیع پسین پارامترهای $\Psi_0 = (\phi, \theta, d)$ بدین‌صورت قابل‌محاسبه است.

$$\pi(\Psi_0|Z) \propto \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}\right)\right]^{-\frac{n}{2}} \pi(\Psi_0)$$

برهان. با توجه به این که توزیع پسین Ψ با در نظر گرفتن ضرایب موجک با تابع درست‌نمایی (توزیع توأم) ضرایب موجک ضربدر توزیع پیشین Ψ متناسب است و با توجه به این که توزیع ضرایب موجک، گوسین با میانگین صفر و واریانس ضرایب موجک است، توزیع پسین Ψ به صورت (۱۴) است.

$$\pi(\Psi|Z) \propto (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}\right)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \pi(\Psi) \quad (14)$$

حال با در نظر گرفتن σ_ε^2 به عنوان یک پارامتر مزاحم، با انتگرال گیری از رابطه (۱۲) نسبت به σ_ε^2 ، توزیع پسین حاشیه‌ای Ψ_0 به دست می آید :

$$\begin{aligned} \pi(\Psi_0|Z) &= \int_{\sigma_\varepsilon^2} \pi(\Psi|Z) d\sigma_\varepsilon^2 \\ &\propto \int (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \pi(\Psi_0) \pi(\sigma_\varepsilon^2) d\sigma_\varepsilon^2 \\ &\propto \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \pi(\Psi_0) \int (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \\ &\quad \times (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{(\beta+2)}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) d\sigma_\varepsilon^2 \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \pi(\Psi_0) \int (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{(n+\beta+2)}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\left(\alpha + \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}\right)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)\right] d\sigma_\varepsilon^2 \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \pi(\Psi_0) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+\beta}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}}{2}\right)^{\frac{n+\beta}{2}}} \cdot \int f(\sigma_\varepsilon^2) d\sigma_\varepsilon^2 \\ &\propto \left(\prod_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \pi(\Psi_0) \left[\sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}\right]^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

که در آن $f(\sigma_\varepsilon^2)$ تابع چگالی گاما معکوس هست .

نتیجه ۹. با توجه به رابطه (۱۴) و با توجه به این که $\pi(\Psi|Z) = \pi(\Psi_0, \sigma_\varepsilon^2|Z)$ با فرض معلوم بودن σ_ε^2 و ثابت در نظر گرفتن Ψ_0 داریم:

$$\pi(\sigma_\varepsilon^2|\Psi_0, Z) \propto (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \rightarrow \pi(\sigma_\varepsilon^2|\Psi_0, Z) = IG\left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2(\Psi_0)}\right)}{2}, \frac{n}{2} - 1\right).$$

در نهایت توزیع پسین حاشیه‌ای σ_ε^2 ، با در نظر گرفتن داده‌ها بدین صورت است:

$$\begin{aligned}\pi(\sigma_{\varepsilon}^2|Z) &= \int_{\Psi_0} \pi(\Psi_0, \sigma_{\varepsilon}^2|Z) d\Psi_0 = \int_{\Psi_0} \frac{\pi(\Psi_0, \sigma_{\varepsilon}^2, Z)}{\pi(Z)} d\Psi_0 \\ &= \int_{\Psi_0} \frac{\pi(\sigma_{\varepsilon}^2, \Psi_0, Z)}{\pi(\Psi_0, Z)} \cdot \frac{\pi(\Psi_0, Z)}{\pi(Z)} d\Psi_0 = \int_{\Psi_0} \pi(\sigma_{\varepsilon}^2|\Psi_0, Z) \cdot \pi(\Psi_0|Z) d\Psi_0.\end{aligned}$$

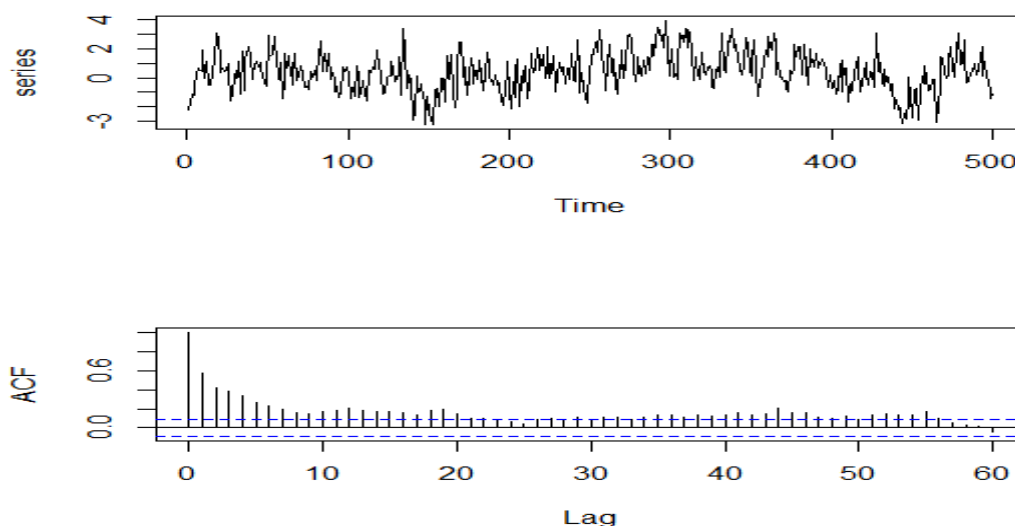
اکنون می‌توان با استفاده از روش‌های عددی در رابطه (۱۴) پارامترهای مدل را برآورد کرد.

بررسی شبیه‌سازی

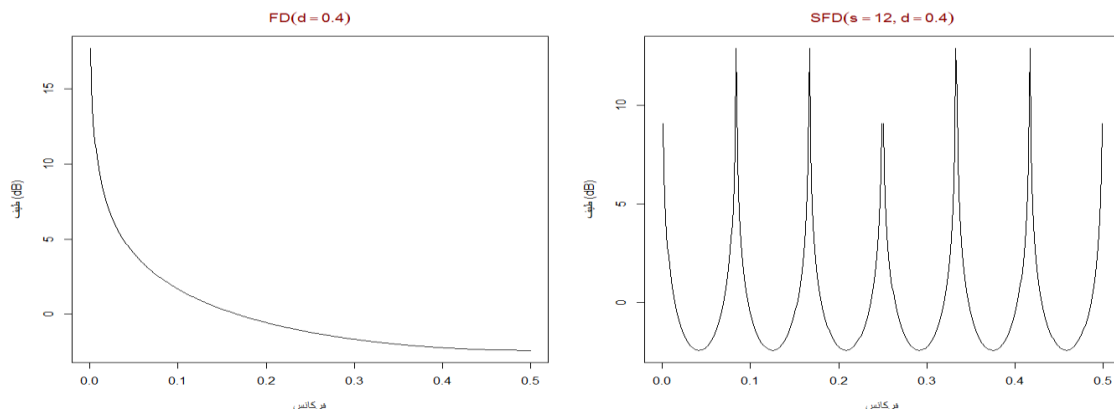
در این بخش به منظور بررسی روش پیشنهادی، مطالب به دست آمده از بخش تئوری با استفاده از شبیه‌سازی در عمل بررسی می‌شود. همه برنامه‌ها با نرم‌افزار R نوشته شده و خلاصه آنها در ضمیمه قابل مشاهده است. ابتدا یک سری زمانی با خاصیت حافظه طولانی مدت تولید کرده و سپس پارامترهای مدل بر اساس نمونه‌های ۲۵۶ و ۱۰۲۴ به روش بیزی-موجکی، درستن‌مایی بیشینه و کم‌ترین توان دوم خطا برآورد و نتایج مقایسه می‌شود.

تولید فرآیند ARFIMA

روش‌های زیادی برای تولید یک سری زمانی با حافظه طولانی مدت وجود دارد. یکی از این روش‌ها، روش محاسبه‌ای ساده است که ابتدا مقادیر خودهم‌بستگی و سپس مقادیر خود هم‌بستگی را تولید و در نهایت ماتریس هم‌بستگی را تشکیل می‌دهیم. با تجزیه ماتریس هم‌بستگی و وارد کردن سری اغتشاش گوسین با میانگین صفر و واریانس واحد در مدل فرآیند با حافظه طولانی مدت ARFIMA تولید می‌شود [۱۴]، [۱۵]. شکل ۱ سری تولید شده به همراه تابع خودهم‌بستگی آن را نشان می‌دهد.



شکل ۱. سری تولید شده به وسیله ARFIMA(۰/۲،/۳،۰) و تابع خودهم‌بستگی



شکل ۲. چگالی طیفی فرایند انتگرال کسری

نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی برآورد پارامترهای مدل $ARFIMA(0, d, 1)$ بر اساس نمونه‌های $n=256$ و $n=1024$ به روش بیز موجکی و درست‌نمایی بیشینه و کم‌ترین مربعات خطا در جدول ۱ ارائه شده است. در برآورد موجکی از موجک‌های دوبیچز مرتبه ۴ استفاده شده است. چنان‌که از مقادیر جدول مشاهده می‌شود با افزایش اندازه نمونه برآوردها به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شوند که عملکرد برآورد بیزی-موجکی با افزایش نمونه بهتر شده و دارای خطای استاندارد کم‌تری است.

جدول ۱. برآورد درست‌نمایی بیشینه، بیزی-موجکی، کم‌ترین مربعات خطا با خطای استاندارد مدل $ARFIM(1, d, 1)$

N	(φ, d, θ)	$MLE(\hat{\varphi}, \hat{d}, \hat{\theta})$	$BWE(\hat{\varphi}, \hat{d}, \hat{\theta})$	LSE
۵۰۴	$(0.25, 0.1, 0.5)$	$(0.29, 0.072, 0.43)$ s.e. $(0.033, 0.068, 0.035)$	$(0.31, 0.091, 0.44)$ s.e. $(0.032, 0.061, 0.034)$	$(0.35, 0.078, 0.42)$ s.e. $(0.037, 0.069, 0.037)$
۱۰۲۴	$(0.25, 0.1, 0.5)$	$(0.28, 0.083, 0.46)$ s.e. $(0.031, 0.063, 0.032)$	$(0.26, 0.095, 0.47)$ s.e. $(0.021, 0.058, 0.025)$	$(0.28, 0.080, 0.47)$ s.e. $(0.032, 0.065, 0.033)$
۵۰۴	$(-0.25, 0.1, -0.5)$	$(-0.21, 0.078, -0.42)$ s.e. $(0.034, 0.069, 0.035)$	$(-0.19, 0.093, -0.43)$ s.e. $(0.033, 0.062, 0.035)$	$(-0.19, 0.073, -0.41)$ s.e. $(0.036, 0.068, 0.036)$
۱۰۲۴	$(-0.25, 0.1, -0.5)$	$(-0.27, 0.085, -0.45)$ s.e. $(0.033, 0.068, 0.032)$	$(-0.24, 0.096, -0.48)$ s.e. $(0.019, 0.059, 0.026)$	$(-0.27, 0.081, -0.48)$ s.e. $(0.031, 0.066, 0.032)$

نتیجه‌گیری

تجزیه موجک در تحلیل داده‌ها، سیگنال‌ها و توابع، وقتی که تبدیل فوریه از تحلیل زمان-فرکانسی داده‌ها ناتوان است، بسیار مناسب عمل می‌کند به این مفهوم که ناپیوستگی توابع و تغییر فرکانس آن‌ها را به بهترین شکل ممکن آشکار می‌سازد. در این راستا هرچه تقریب‌ها در مقیاس‌های بزرگ‌تری ارائه شود، تجزیه موجک، اطلاعات بیش‌تر و مناسب‌تری از داده‌ها را به دست می‌دهد و رفتار داده‌ها را روشن‌تر به نمایش می‌گذارد. فرآیندهای با حافظه طولانی مدت به دلیل وجود هم‌بستگی شدید، استفاده مستقیم داده‌ها در تحلیل‌ها و استنباط‌ها را با مشکل مواجه می‌سازد. تبدیل موجک با تغییر این داده‌های هم‌بسته به ضرایبی که تقریباً ناهم‌بند هستند، در تحلیل‌ها بسیار مفید است و در بسیاری از موارد تقریب‌های مناسبی به داده‌ها برازش می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی که در بخش قبل ارائه شد

خود حاکی از این موضوع است. با مشاهده جداول تقریباً در اکثر موارد تبدیل موجک به روش بیزی، در مقایسه با برآوردگرهای درست‌نمایی بیشینه و کم‌ترین مربعات خطا تقریب بهتری ارائه کرده است.

تشکر و قدردانی

از سردبیر، هیات تحریریه و کمیته داوران نشریه قدردانی می‌کنیم. هم‌چنین از دانشگاه خلیج فارس به دلیل حمایت و پشتیبانی قدردانی می‌شود.

منابع

1. Granger C. W., Joyeux R., "An introduction to long memory time series models and fractional differencing", *Journal of Time Series Anal.* Vol. 1 (1980) 15-29.
2. Daubechies I., "Ten Lectures on Wavelets", SIAM, CBMS-NSF Conference Series. SIAM, Philadelphia, PA.16 (1992).
3. Tewfik A. H., Kim M., "Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional Brownian motion", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 38 (2) (1992) 904-909.
4. Mallat S. G., "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Trans Pattern Anal. Mach. Intell.* Vol. 11 (7) (1989) 674-693.
5. Afshari M., "A Fast Wavelet Algorithm for Analyzing of Signal Processing and Empirical Distribution of Wavelet Coefficient with numerical Example and Simulation, *Communication of Statistics-Theory and Methods*, Vol. 42 (2013) 4156-4169.
6. Vidakovic B., "Statistical modeling by wavelets", John Wiley & Sons (2009).
7. Brockwell P. J., Davis R. A., "Introduction to time Series and Forecasting", Colorado State university (2001).
8. McCoy E. J., Walden A. T., "Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory processes", *J. Comput. Graphical Statist.* Vol. 5 (1) (1996) 26-56.
9. Jensen M., "An alternative maximum likelihood estimator of long-memory processes using compactly supported wavelets", Vol. 24 (3) (2000) 361-386.
10. Doosti H., Afshari M., Niroomand H. A., "Wavelets for Nonparametric Stochastic Regression with Mixing Stochastic Process", *Communication of Statistics-Theory and Methods.* Vol. 37 (2008) 373-385.
11. Koop G., Ley E., Osiewalski J., Steel M. F. J., "Bayesian analysis of long memory and persistence using ARFIMA models", *J. Econometrics.* Vol. 76 (1997) 149-169.
12. Afshari M., Lak F., Gholizadeh B., "A new Bayesian wavelet thresholding estimator of nonparametric regression", *Journal of Applied Statistics*, 4, 44 (2016) 649-666.
13. Hsu N. J., "Long memory wavelet models", *statistica sinica*, Vol. 16 (2006) 1255-1271.
14. Chan N. H., "Time Series Applications to Finance with R and S-Plus", Department of Statistics, The Chinese University of Hong Kong (2010).
15. Degiannakis S., Xekalaki E., "ARCH Models for Financial Applications", Department of Statistics Athens University of Economics and Business, Greece (2010).