

## مدول‌های با خاصیت اشتراک هم‌محض

فرانک فرشادی‌فر

دانشگاه فرهنگیان، گروه ریاضی، تهران

پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

دریافت ۹۷/۰۲/۱۲

### چکیده

در این مقاله، مدول‌هایی را که داری خاصیت اشتراک هم‌محض هستند را بررسی کرده و نتایج جدیدی در مورد این کلاس از مدول‌ها را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: زیرمدول محض، زیرمدول هم‌محض. مدول با خاصیت اشتراک هم‌محض.

### مقدمه

در سراسر این مقاله  $R$  یک حلقه جابه‌جایی با عضو واحد ناصفر و همه مدول‌ها یکانی هستند. به علاوه،  $\mathbb{Z}$  نمایش‌گر مجموعه اعداد صحیح هستند.

در زیر برخی از تعریف‌های مورد نیاز آورده شده است.

تعریف: فرض کنیم  $M$  یک  $R$ -مدول باشد.

۱. زیرمدول  $N$  از  $M$  را زیرمدول محض گوئیم هرگاه برای هر ایده‌آل  $I$  از  $R$ ،  $IN = N \cap IM$  [۲].

۲.  $M$  را کاملاً محض گوئیم هرگاه هر زیرمدول از آن محض باشد [۵].

۳. زیرمدول  $N$  از  $M$  را هم‌محض گوئیم هرگاه برای هر ایده‌آل  $I$  از  $R$ ،

$$(N :_M I) = N + (0 :_M I).$$

این تعریف در واقع دوگان تعریف زیرمدول محض از یک  $R$ -مدول است [۴].

۴.  $M$  را کاملاً هم‌محض گوئیم هرگاه هر زیرمدول از آن هم‌محض باشد [۵].

۵.  $M$  را هم‌محض ساده گوئیم هرگاه  $\langle 0 \rangle$  و  $M$  تنها زیرمدول‌های هم‌محض  $M$  باشند [۹].

$M$  را ضربی گوئیم هرگاه برای هر زیرمدول  $N$  از  $M$ ، یک ایده‌آل  $I$  از  $R$  موجود باشد به قسمی که  $N = IM$  [۷].

۶. می‌گوئیم  $M$  در شرط پوچ ساز مضاعف ( $DAC$ ) صدق می‌کند هرگاه برای هر ایده‌آل  $I$  از  $R$ ،

$$I = Ann_R((0 :_M I))$$

۷.  $M$  را هم‌ضربی گوئیم هرگاه برای هر زیرمدول  $N$  از  $M$ ، یک ایده‌آل  $I$  از  $R$  موجود باشد به قسمی که

$$N = (0 :_M I) \quad [۳]$$

۸.  $M$  را هم‌ضربی قوی گوئیم هرگاه  $M$  هم‌ضربی باشد و در شرط پوچ‌ساز مضاعف ( $DAC$ ) صدق کند [۴].  
زیرمدول  $N$  از  $M$  را کاملاً پایا گوئیم هرگاه برای هر درونریختی  $f: M \rightarrow M$ ، داشته باشیم  
 $f(N) \subseteq N$  [۱۲].

۹.  $M$  را دارای خاصیت جمع هم‌محض گوئیم هرگاه مجموع هر دو زیرمدول هم‌محض آن یک زیرمدول هم‌محض از آن باشد [۹].

انصاری طرقي و فرشادی فر [۴]، دوگان زیرمدول‌های محض را معرفی کرده و پاره‌ای از خصوصیات این کلاس از مدول‌ها را بررسی کردند. در این مقاله، مدول‌هایی را که دارای خاصیت اشتراک هم‌محض هستند را بررسی کرده و نتایج جدیدی در مورد این کلاس از مدول‌ها را به‌دست می‌آوریم.

### نتایج اصلی

تعریف ۱. یک  $R$ -مدول  $M$  را دارای خاصیت اشتراک هم‌محض گوئیم هرگاه اشتراک هر دو زیرمدول هم‌محض آن یک زیرمدول هم‌محض از آن باشد.

#### مثال ۲.

۱. هر مدول کاملاً هم‌محض دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. به‌ویژه،  $\mathbb{Z}_n$  به‌عنوان  $\mathbb{Z}_n$ -مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر  $n$  یک عدد خالی از مربع باشد.

۲. هر مدول هم‌محض ساده دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

۳.  $M = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$  را به‌عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $N = \mathbb{Z}_4 \oplus 0$  و  $K = \mathbb{Z}(1, 1)$ ، زیرمدولی که به‌وسیله  $(1, 1)$  تولید می‌شود، باشد. در این صورت به‌سادگی می‌توان دید که  $N$  و  $K$  زیرمدول‌های هم‌محضی از  $M$  هستند. اما  $N \cap K = \{(0, 0), (2, 0)\}$  و بنابراین  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض نیست.

۴. فرض کنیم که  $p$  یک عدد اول باشد. چون زیرمدول‌های  $\mathbb{Z}$ -مدول  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  قابل مقایسه هستند، به‌عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

لم ۳. (۲، ۹، [۴])، اگر  $M$  یک  $R$ -مدولی باشد که دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است و  $N$  یک زیرمدول هم‌محض از  $M$  باشد، آن‌گاه  $N$  و  $M/N$  نیز دارای خاصیت اشتراک هم‌محض هستند.  
زیرمدول  $N$  از  $R$ -مدول  $M$  را کاملاً تحویل‌ناپذیر گوئیم هرگاه  $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ ، که در آن  $\{N_i\}_{i \in I}$  یک خانواده از زیرمدول‌های  $M$  است، آن‌گاه برای  $i \in I$ ،  $N = N_i$ . هر زیرمدول از  $R$ -مدول  $M$  را می‌توان به‌صورت اشتراکی از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر  $M$  نوشت. بالاخص، اشتراک تمام زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر  $M$  برابر صفر است [۱۰].

تبصره ۴. فرض کنیم که  $N$  و  $K$  دو زیرمدول از  $R$ -مدول  $M$  باشند. اگر برای هر زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر  $L$  از  $M$  با شرط  $K \subseteq L$  داشته باشیم  $N \subseteq L$ ، آن‌گاه  $N \subseteq K$  [۶].

قضیه ۵. فرض کنیم  $M$  یک  $R$ -مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

**برهان:** فرض کنیم  $I$  ایده‌آل از  $R$  و  $N$  و  $K$  زیرمدول‌های هم‌محضی از  $M$  باشند. به‌وضوح،

$$N \cap K + (0 :_M I) \subseteq (N \cap K :_M I).$$

حال فرض کنیم که  $L$  یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر از  $M$  باشد به‌طوری‌که

$$N \cap K + (0 :_M I) \subseteq L.$$

چون  $M$  توزیع‌پذیر است،

$$(N + (0 :_M I) + L) \cap (K + (0 :_M I) + L) = L.$$

از این‌که  $L$  کاملاً تحویل‌ناپذیر است، می‌توان فرض کرد  $N + (0 :_M I) + L = L$ . چون  $N$  هم‌محض است، که نتیجه می‌دهد  $(N :_M I) \subseteq L$ . پس  $(N \cap K :_M I) \subseteq L$ . از این‌رو، بنابر تبصره ۴، مطلوب حاصل است.

**گزاره ۶.** فرض کنیم  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت  $M$  به‌عنوان  $R$ -مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر  $M$  به‌عنوان  $R / \text{Ann}_R(M)$ -مدول دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد. **برهان:** این واضح است.

**قضیه ۷.** فرض کنیم  $M$  یک  $R$ -مدول هم‌ضربی قوی باشد. در این صورت  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

**برهان:** فرض کنیم  $N$  و  $K$  دو زیرمدول هم‌محض از  $M$  باشند. چون  $M$  هم‌ضربی است، ایده‌آل‌هایی مانند  $I$  و  $J$  از  $R$  موجودند به‌طوری‌که  $N = (0 :_M I)$  و  $K = (0 :_M J)$ . پس

$$N \cap K = (0 :_M I) \cap (0 :_M J) = (0 :_M I + J).$$

بنابر قضیه ۲، ۱۳، [۴]،  $I$  و  $J$  ایده‌آل‌های محضی از  $R$  هستند. حال فرض کنیم که  $I_1$  یک ایده‌آل از  $R$  باشد. چون بنابر ۱، ۳، [۱۱]،  $R$  دارای خاصیت جمع محض است،  $I_1(I + J) = I_1 \cap (I + J)$ . از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} (N \cap K :_M I_1) &= ((0 :_M I + J) :_M I_1) \\ &= (0 :_M (I + J) \cap I_1). \end{aligned}$$

حال با توجه به این‌که  $M$  هم‌ضربی قوی است، داریم:

$$\begin{aligned} (0 :_M (I + J) \cap I_1) &= (0 :_M I + J) + (0 :_M I_1) \\ &= N \cap K + (0 :_M I_1). \end{aligned}$$

بنابراین،  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

**قضیه ۸.** فرض کنیم  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر به‌ازای ایده‌آل  $I$  از  $R$  و زیرمدول‌های هم‌محض  $N$  و  $K$  از  $M$  داشته باشیم

$$N \cap K + (0 :_M I) = (N + (0 :_M I)) \cap (K + (0 :_M I)).$$

**برهان:** ابتدا فرض کنیم  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض،  $I$  ایده‌آل از  $R$  و  $N$  و  $K$  زیرمدول‌های هم‌محضی از  $M$  باشند. بنابر فرض،  $N \cap K$  یک زیرمدول هم‌محض از  $M$  است. از این‌رو، داریم:

$$(N \cap K :_M I) = N \cap K + (0 :_M I).$$

بنابراین حکم از این حقیقت که

$$(N \cap K :_M I) = (N :_M I) \cap (K :_M I)$$

نتیجه می‌شود. برعکس، فرض کنیم  $N$  و  $K$  دو زیرمدول هم‌محض از  $M$  و  $I$  یک ایده‌آل از  $R$  باشد. در این صورت بنا بر فرض،

$$N \cap K + (0 :_M I) = (N + (0 :_M I)) \cap (K + (0 :_M I)).$$

حال چون  $(N :_M I) = N + (0 :_M I)$  و  $(K :_M I) = K + (0 :_M I)$  داریم

$$(N + (0 :_M I)) \cap (K + (0 :_M I)) = (N :_M I) \cap (K :_M I) = (N \cap K :_M I)$$

و مطلوب حاصل است.

**گزاره ۹.** فرض کنیم  $R$  یک حلقه نوتری و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. اگر برای هر ایده‌آل ماکزیمال  $P$  از  $R$ ،  $M_P$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض به عنوان  $R_P$ -مدول باشد، آنگاه  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض به عنوان  $R$ -مدول است.

**برهان:** فرض کنیم  $N$  و  $K$  دو زیرمدول هم‌محض از  $M$  باشند. در این صورت برای هر ایده‌آل ماکزیمال  $P$  از  $R$ ، بنا بر گزاره ۳.۲ از [۹]،  $N_P$  و  $K_P$  زیرمدول‌های هم‌محضی از  $M_P$  به عنوان  $R_P$ -مدول هستند. برای هر ایده‌آل ماکزیمال  $P$  از  $R$ ، چون  $M_P$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است،  $N_P \cap K_P = (N \cap K)_P$ ، یک زیرمدول هم‌محض از  $M_P$  است. بنابراین بنا بر گزاره ۳.۲ از [۹]،  $N \cap K$  یک زیرمدول هم‌محض از  $M$  است.

**گزاره ۱۰.** فرض کنیم  $R$  یک  $PID$  و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت  $M$  دارای خاصیت اشتراک محض است اگر و فقط اگر  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد.

**برهان:** حکم از این حقیقت که بنا بر قضیه ۲.۱۲ از [۴]، هر زیرمدول از  $M$  محض است اگر و فقط اگر هم‌محض باشد نتیجه می‌شود.

### (مدول موضعاً دوری تعریف شود)

**نتیجه ۱۱.** فرض کنیم  $R$  یک  $PID$  و  $M$  یک  $R$ -مدول موضعاً دوری (بالاخص،  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی) باشد. در این صورت  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

**برهان:** این از گزاره قبل و نتیجه ۲.۱۷ از [۹] نتیجه می‌شود.

**مثال ۱۲.**  $\mathbb{Z}$ -مدول  $\mathbb{Z}$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است.

**تبصره ۱۳.** اگر یک  $R$ -مدول  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد، آنگاه ممکن است  $M \oplus M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض نباشد. به عنوان مثال،  $\mathbb{Z}$ -مدول  $\mathbb{Z}_4$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. اما  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض نیست.

**قضیه ۱۴.** فرض کنیم  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$  یک  $R$ -مدول باشد، که هر  $M_i$  یک زیرمدول از  $M$  است. اگر  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد، آنگاه هر  $M_i$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. عکس قضیه زمانی که هر زیرمدول هم‌محض از  $M$  کاملاً پایا باشد برقرار است.

**برهان:** فرض کنیم که  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد. چون هر  $M_i$  یک جمع‌وند از  $M$  است، بنا بر برهان لم ۱۱،۳ از [۵]، هر  $M_i$  یک زیرمدول هم‌محض از  $M$  است. از این‌رو، بنا بر لم ۳، هر  $M_i$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. برای دیدن قسمت عکس، فرض کنیم که  $N$  و  $K$  دو زیرمدول هم‌محض از  $M$  باشند. در این صورت بنا بر فرض،  $N$  و  $K$  کاملاً پایا هستند. از این‌رو، بنا بر ۸.۱۱، [۱۲]،  $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$  و  $K = \bigoplus_{i \in I} (K \cap M_i)$ . بنا بر این

$$N \cap K = \left( \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i) \right) \cap \left( \bigoplus_{i \in I} (K \cap M_i) \right) = \bigoplus_{i \in I} ((N \cap M_i) \cap (K \cap M_i)).$$

به سادگی می‌توان دید که  $N \cap M_i$  و  $K \cap M_i$  زیرمدول‌های هم‌محضی از  $M_i$  هستند. پس  $(N \cap M_i) \cap (K \cap M_i)$  یک زیرمدول هم‌محض از  $M_i$  است. از این‌رو، بنا بر گزاره ۲.۱۱ از [۴]،  $N \cap K$  یک زیرمدول هم‌محض از  $M$  است و مطلوب حاصل است.

**گزاره ۱۵.** فرض کنیم دو  $R$ -مدول  $M_1$  و  $M_2$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشند و  $Ann_R(M_1) + Ann_R(M_2) = R$ . در این صورت  $M_1 \oplus M_2$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است. **برهان:** فرض کنیم  $N$  و  $K$  دو زیرمدول هم‌محض از  $M_1 \oplus M_2$  باشند. چون

$$Ann_R(M_1) + Ann_R(M_2) = R,$$

بنا بر [۱]، داریم  $N = N_1 \oplus N_2$  و  $K = K_1 \oplus K_2$ ، که در آن  $N_1$ ،  $N_2$ ،  $K_1$ ،  $K_2$  زیرمدول‌هایی از  $M_1$  و  $M_2$  هستند، از این‌رو،

$$N \cap K = (K_1 \oplus K_2) \cap (N_1 \oplus N_2) = (N_1 \cap K_1) \oplus (N_2 \cap K_2).$$

حال بنا بر فرض،  $N_1 \cap K_1$  زیرمدول هم‌محضی از  $M_1$  و  $N_2 \cap K_2$  زیرمدول هم‌محضی از  $M_2$  است. از این‌رو، بنا بر گزاره ۲.۱۱ از [۴]،  $(N_1 \cap K_1) \oplus (N_2 \cap K_2)$  زیرمدول هم‌محضی از  $M_1 \oplus M_2$  است. پس  $N \cap K$  زیرمدول هم‌محضی از  $M_1 \oplus M_2$  است و مطلوب حاصل است.

**قضیه ۱۶.** فرض کنیم  $R = R_1 \times R_2$  و  $M = M_1 \times M_2$  یک  $R$ -مدول باشد، که در آن  $M_1$  یک  $R_1$ -مدول و  $M_2$  یک  $R_2$ -مدول است. در این صورت  $M$  دارای خاصیت اشتراک هم‌محض است اگر و فقط اگر برای  $M_i$ ،  $i = 1, 2$ ، دارای خاصیت اشتراک هم‌محض باشد.

**برهان:** با توجه به گزاره ۲.۲ از [۹]، برهان سر راست است.

## منابع

1. Abbas M. S., "On fully stable modules", Ph.D. Thesis, University of Baghdad (1990).
2. Anderson W., Fuller K. R., "Rings and Categories of Modules", Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1974).
3. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "The dual notion of multiplication modules", Taiwanese J. Math. 11 (4) (2007) 1189-1201.

4. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "Strong comultiplication modules", *CMU. J. Nat. Sci.*, 8 (1) (2009) 105-113.
5. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "Fully idempotent and coideempotent modules", *Bull. Iranian Math. Soc.*, 38 (4) (2012) 987-1005.
6. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F., "The dual notion of some generalizations of prime submodules", *Comm. Algebra*, 39 (2011) 2396-2416.
7. Barnard A., "Multiplication modules", *J. Algebra* 71 (1981) 174-178.
8. Faith C., "Rings whose modules have maximal submodules", *Publ. Mat.* 39 (1995) 201-214.
9. Farshadifar F., "Copure submodules and related results", *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 16 (2) (2019) 010-015.
10. Fuchs L., Heinzer W., Olberding B., "Commutative ideal theory without finiteness conditions: Irreducibility in the quotient field, in: *Abelian Groups, Rings, Modules, and Homological Algebra*", *Lect. Notes Pure Appl. Math.* 249 (2006) 121-145.
11. Adil G., Naoum and Bahar H., Al-Bahraany, "Modules with the pure sum property", *Iraqi J. Sci.*, 43 (3) (2002) 39-51.
12. Wisbauer R., "Foundations of Modules and Rings Theory", Gordon and Breach, Philadelphia, PA (1991).