(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

سایه‌نگار حد متوسط و تجزیۀ مغلوب

خسرو تاجبخش*

دانشگاه تربیت مدرس، دانشکدۀ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

چکیده

در این مقاله ابتدا مفهوم خاصیت سایه‌نگار حد متوسط[۱] برای وابرسانی‌های[۲] بر خمینۀ فشردۀ هموار M معرفی شده و سپس یک رده از وابرسانی‌های دارای ویژگی سایه‌نگار حد متوسط که خاصیت سایه‌نگار[۳] ندارند، ارایه شده است. افزون بر آن، ثابت می‌کنیم که برای مجموعه بستۀ f-ناوردای Λ از وابرسانی f ، اگر Λ سایه‌نگار حد متوسط C^1-پایدار و نقطه‌های کمینه[۴] Λ چگال باشد، آن‌گاه Λ یک تجزیۀ مغلوب[۵] می‌پذیرد.

مقدمه

فرض کنید M یک خمینۀ فشردۀ C^∞ و $Diff(M)$ فضای وابرسانی‌های M همراه با C^1-توپولوژی باشد. فاصله بر M را که از یک متر ریمانی $<,>$ بر کلاف مماس TM القا شده است، با d نمایش می‌دهیم. فرض کنید $f \in Diff(M)$ و $\Lambda \subset M$ یک مجموعه فشردۀ f-ناوردا باشد. برای $\delta > 0$ ، یک دنباله از نقطه‌های $\{x_i\}_{i=a}^{i=b}$ در M $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ یک δ-شبه مدار[۶] (δ-زنجیر) f نامیده می‌شود، اگر برای هر $a \leq i \leq b-1$ داشته باشیم $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta$. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ باشد چنان‌که برای هر δ-شبه مدار $\{x_i\}_{i=a}^{i=b} \subset \Lambda$ از f $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ یک $y \in M$ وجود داشته باشد که برای هر $a \leq i \leq b-1$، داشته باشیم: $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$، گوییم $f|_\Lambda$ دارای خاصیت سایه‌نگار است (یا Λ سایه‌پذیر است). نقطه y ، ε-سایه‌دار به‌وسیلۀ $\{x_i\}_{i=a}^{i=b}$ نامیده می‌شود. توجه شود که فقط δ-شبه مدار f درون Λ می‌تواند ε-سایه‌دار باشد ولی نیازی نیست که نقطۀ سایه‌نگار y در Λ باشد. خاصیت سایه‌نگار نقش مهمی در نظریه کیفی سیستم‌های دینامیکی دارد [۱] ببینید). ویژگی‌های مهم سایه‌نگاری را می‌توان در مرجع [۲] ملاحظه کرد. مفهوم خاصیت سایه‌نگار حدی، به‌وسیلۀ اس.پلیگین[۷] [۲] معرفی شده، و ارتباط آن با سایه‌نگارهای مختلف در [۳] به‌دست آمده است. بگذارید تعریف سایه‌نگار حدی را بیان کنیم. برای $\delta > 0$، دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ در M یک δ-زنجیر حدی نامیده می‌شود، اگر:

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta , n \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \lim_{|n|\to\infty} d(f(x_n), x_{n+1}) = 0$$

*نویسنده مسئول khtajbakhsh@modares.ac.ir

1. Limit average shadowing
2. Diffeomorphisms
3. Shadowing
4. Minimal
5. Dominated spiliting
6. δ-pseudo-orbit
7. S. Pilyugin

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

برای یک مجموعه بستهٔ f-ناوردا $\Lambda \subset M$، گوییم f بر Λ دارای خاصیت سایه‌نگار حدی است (یا Λ برای f سایه‌پذیر حدی است) اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد چنان‌که برای هر δ-زنجیر حدی $\xi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ در Λ، $y \in M$ وجود داشته باشد که:

$$lim_{|n|\to\infty}\, d(f^n(y), x_n) = 0$$

نقطهٔ y، نقطهٔ سایه‌نگار حدی ξ نامیده می‌شود. یک دنباله $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ یک δ-میانگین شبه مدار [۱] برای f است، اگر عدد طبیعی N وجود داشته باشد چنان‌که برای هر $n > N$، داشته باشیم:

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{n} d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$$

هم‌چنین f دارای خاصیت سایه‌نگار متوسط است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای وجود داشته باشد که هر δ-میانگین شبه مدار $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$، یک ε-سایه‌دار متوسط توسط نقطه‌ای مانند $z \in X$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} sup\,\frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{n} d(f^i(z), x_i) < \varepsilon.$$

مشخص است که تحدید هر وابرسانی اصل A [۲] به یک مجموعه اساسی، دارای خاصیت سایه‌نگار متوسط است. کی. ساکای [۳] [۴] ثابت کرد که C^1-درون [۴] مجموعه همهٔ وابرسانی‌هایی که دارای ویژگی سایه‌نگار متوسط‌اند، به‌صورت مجموعه همهٔ وابرسانی‌های آناسوف [۵]، مشخص شده است. سایه‌نگار متوسط تقریبی (AASP) [۶] که به‌وسیلهٔ ر.گو [۷] [۵] برای نگاشت‌های پیوسته تعریف شده است، ترکیبی از خاصیت سایه‌نگار حدی با خاصیت سایه‌نگار متوسط است [۵]. در این مقاله مفهوم (AASP) را اصلاح می‌کنیم و سایه‌نگار حد متوسط (LASP) را برای وابرسانی‌ها تعریف می‌کنیم.

دنباله $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ در M شبه مدار حد متوسط نامیده می‌شود، اگر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} d(f\,(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

تعریف ۱: *گوییم تحدید $f|_{\Lambda}$ از f به Λ دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط است (یا Λ سایه‌پذیر حد متوسط است) اگر برای هر شبه مدار حد متوسط $\xi = \{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ در Λ، $z \in \Lambda$ وجود داشته باشد، چنان‌که*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} d(f^i(z), x_i) = 0.$$

در تعریف ۱.۱ اگر $\Lambda = M$ آن‌گاه گوییم f دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط است.

اگر یک مدار چگال وجود داشته باشد، گوییم f تراگذر است؛ و گوییم f توپولوژیکی آمیختنی [۸] است، اگر برای هر دو مجموعه باز ناتهی $U, V \subset M$ ، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که برای هر $n \ge N$ داشته باشیم $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

1. δ-average pseudo-orbit
2. Axiom A
3. K. Sakai
4. *C*1-interior
5. Anosov
6. Asymptotic average shadowing
7. R. Gu
8. Topological mixing

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

اگر برای نقطه‌های x , y در مجموعه بستهٔ f-ناوردای $\Lambda \subset M$ و هر $\delta > 0$ یک δ-شبه مدارِ $\{x_i\}_{i=a_\delta}^{b_\delta} \subset \Lambda$ $(a_\delta < b_\delta)$ برای f وجود داشته باشد که $x_{a_\delta} = x , x_{b_\delta} = y$، آنگاه Λ تراگذر زنجیری نامیده می‌شود.

ر.گو [۵]، چند ویژگی بنیادی از سایه‌نگار حد متوسط برای نگاشت های پیوسته را بررسی کرد. او ثابت کرد که اگر یک نگاشت پیوسته بر یک فضای متریک فشرده X سایه‌نگار حد متوسط باشد، آن‌گاه X تراگذر زنجیری است و همان‌سانی‌های $\mathcal{L}$-هذلولوی با سایه‌نگار حد متوسط، توپولوژیک تراگذر هستند(برای جزئیات بیش‌تر [۵] را ببینید).

م.کولچیتسکی و دیگران[1] [۶] ارتباط بین LASP و دیگر مفهوم های توپولوژیکی دینامیکی را بررسی کردند. آنها ثابت کردند که یک نگاشت پوشا، با خاصیت ویژه[2] دارای LASP است. هم‌چنین، بین LASP و خاصیت سایه‌نگار رابطه‌ای پیدا کردند. آنها نشان دادند که یک نگاشت گسترده[3] پیوسته با خاصیت سایه‌نگار، LASP است اگر و تنها اگر آمیختنی باشد. این مقاله ایده‌های [۵] و [۶] را دنبال می‌کند. این‌جا LASP را برای وابرسانی با تغییری جزئی برای حالت پیوسته تعریف می‌کنیم. مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد خاصیت سایه‌نگار و LASP هم‌ارز نیستند. هم‌چنین برای یک زیرمجموعه بسته f-ناوردای Λ از M مفهوم سایه‌نگار حد متوسطِ C^1-پایدار را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر Λ سایه‌نگار حد متوسطِ C^1-پایدار باشد و نقطه‌های کمینهٔ Λ نیزچگال باشند، آن‌گاه Λ یک تجزیهٔ مغلوب می‌پذیرد. به یاد آورید که اگر یک زیرمجموعه بسته ناتهی A از M ، f-ناوردا بوده و شامل هیچ زیرمجموعهٔ سره با این سه ویژگی نباشد، کمینه است. نقطه x کمینه نامیده می‌شود اگر x در یک مجموعهٔ کمینه باشد.

تعریف۲: *فرض کنید $f \in Diff(M)$، گوییم مجموعه بستهٔ f-ناوردای $\Lambda \subset M$ ، سایه‌نگار حد متوسطِ C^1-پایدار است، اگر همسایگی فشرده U از Λ و C^1-همسایگی $U(f)$ از f وجود داشته باشد، چنان‌که:*

۱. *$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$؛ یعنی Λ در U موضعی- بیشین[4] است.*

۲. *Λ_g برای $g \in U(f)$ سایه‌نگار حد متوسط است، که $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$.*

در این حالت گوییم Λ سایه‌نگار حد متوسطِ C^1-پایدار نسبت به U و $U(f)$است.

یادآوری می شود که یک مجموعه فشردهٔ ناوردای Λ برای f هذلولوی است، اگر کلاف مماس[5] $T_\Lambda M$ یک تجزیه پیوسته و Df-ناوردا داشته باشد و $C > 0$ و $0 < \lambda < 1$ وجود داشته باشد، چنان‌که برای هر $x \in \Lambda$ و $n > 0$،

$$\left\| Df^{-n}|_{F(f^n(x))} \right\| \leq C\lambda^n$$

و

$$\left\| Df^n|_{E(x)} \right\| \leq C\lambda^n$$

برقرار باشد. اگر M برای f هذلولوی باشد، گوییم f آناسوف است.

اگر یک زیرمجموعه $R \subset Diff(M)$ شامل اشتراک یک خانواده شمارا از زیرمجموعه‌های باز و چگال $Diff(M)$ باشد، R مانده[6] است؛ در این حالت R در $Diff(M)$ چگال است. یک خاصیت *(P)*، C^1-عمومی[7] نامیده

1. M. Kulczycki et.al
2. Specification
3. Expansive
4. Locally maximal
5. Tangent bundle
6. Residual
7. C1-generic

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]

[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

نامیده می‌شود اگر (P) برای همهٔ وابرسانی‌هایی که متعلق به یک زیرمجموعه مانده‌ای از $Diff(M)$ است، برقرار باشد.

هدف اصلی این مقاله، توصیف مجموعه‌های بستهٔ f-ناوردا با سایه‌نگار حد متوسط در حالت C^1-باز است. به این ترتیب، خاصیت سایه‌نگار حد متوسط را در سیستم‌های دینامیک دیفرانسیل هندسی، در نظر می‌گیریم. نتیجهٔ اصلی این مقاله قضیه زیر است.

قضیهٔ A: *فرض کنید Λ یک مجموعه بستهٔ f-ناوردا باشد، که نقطه‌های کمینه‌اش چگال است. اگر Λ سایه‌نگار حد متوسط C^1-پایدار باشد، آن‌گاه Λ یک تجزیهٔ مغلوب می‌پذیرد.*

مفهوم ویژه از نقطه نظر نظریه ارگودیک[1] و چند سیستم دینامیکی مهم که این ویژگی را دارند، به‌وسیلهٔ ر.بووِن[2] [۷]، به‌خوبی بررسی شده است. بگذارید این تعریف را بیان کنیم و یک نتیجه از قضیهٔ اصلی ارائه دهیم.

تعریف۳: *فرض کنید $f \in Diff(M)$ و $\Lambda \subset M$ یک مجموعهٔ بسته f-ناوردا باشد. گوییم f بر Λ خاصیت ویژه دارد (یا Λ یک مجموعهٔ ویژه برای f است) اگر برای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیح مثبت $N = N(\varepsilon) > 0$ موجود باشد، که برای هر K $(K \geq 2)$ نقطه‌های $x_1, x_2, \dots, x_k$ در Λ و عددهای صحیح*

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k \quad \text{با} \quad a_i - b_{i-1} > N$$

برای $2 \leq i \leq K$، $y \in M$ وجود داشته باشد، که برای هر $1 \leq i \leq k$ و $a_i \leq j \leq b_i$، $d(f^j(y), f^j(x_i)) < \varepsilon$ برقرار باشد.

می‌توان مفهوم ویژه C^1-پایدار را مشابه تعریف سایه‌نگار حد متوسط C^1-پایدار تعریف کرد. نتیجهٔ B بلافاصله از گزارهٔ ۶ به‌دست می‌آید..

نتیجهٔ B: *فرض کنید Λ یک مجموعهٔ بسته f-ناوردا باشد. اگر Λ ویژه C^1-پایدار باشد، آن‌گاه Λ یک تجزیهٔ مغلوب می‌پذیرد.*

مثال‌ها

در این بخش مثالی ارائه می‌دهیم که ویژگی سایه‌نگار حد متوسط را داشته باشد ولی سایه‌نگار نباشد. هم‌چنین می‌توان مثال‌هایی ارائه داد که سایه‌نگار هستند ولی سایه‌نگار حد متوسط نیستند. بنابراین خاصیت سایه‌نگار حد متوسط، خاصیت سایه‌نگاری را نتیجه نمی‌دهد. در واقع می‌توان رده‌ای از وابرسانی‌ها ارائه داد که LASP دارند ولی خاصیت سایه‌نگاری ندارند.

تعریف ۴: *زیرمجموعهٔ $J \subset \mathbb{Z}$، از چگالی صفر نامیده می‌شود، اگر*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} Card(J \cap [-n,n]) = 0.$$

لم ۵: *دنبالهٔ $\xi = \{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ از عددهای حقیقی کراندار نامنفی در رابطهٔ پایین صادق است،*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} x_i = 0$$

اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ J از چگالی صفر موجود باشد، چنان‌که برای $n \notin J$ داشته باشیم $\lim_{|n|\to\infty} x_n = 0$.

1. Ergodic
2. R. Bowen

اثبات: فرض کنید $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} x_i = 0$. برای $k > 0$، بگیرید $J_k = \{n \in \mathbb{Z} : x_n \geq \frac{1}{k}\}$. آن‌گاه

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} x_i \geq (\frac{1}{k})\frac{1}{2n+1} Card(J_k \cap [-n,n])$$

که نتیجه می‌دهد J_k برای هر $k > 0$ دارای چگالی صفر است. می‌توان $0 < l_0 < l_1 < l_2 < \cdots$ را چنان یافت که برای $n \geq l_k$، $\frac{1}{2n+1}Card\{J_{k+1} \cap [-n,n]\} < \frac{1}{k+1}$.

ادعا می‌کنیم مجموعه $J = \cup_{k=0}^{\infty}(J_{k+1} \cap ([l_k, l_{k+1}) \cup (-l_{k+1}, -l_k]))$ دارای چگالی صفر است.

چون $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ برای $l_k \leq n < l_{k+1}$ برقرار است، داریم:

$$\begin{aligned} J \cap [-n,n] &= \big(J \cap (-l_k, l_k)\big) \cup \big(J \cap ([-n, -l_k] \cup [l_k, n])\big) \\ &\subseteq \big(J_k \cap (-l_k, l_k)\big) \cup (J_{k+1} \cap [-n,n]), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} Card(J \cap [-n,n]) &\leq \frac{1}{2n+1}[Card(J_k \cap [-l_k, l_k]) + Card(J_{k+1} \cap [-n,n])] \\ &\leq \frac{1}{2n+1}\big(Card J_k \cap [-n,n] + Card(J_{k+1} \cap [-n,n])\big) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

اگر $n \to \infty$ آنگاه $k \to \infty$؛ بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} Card(J \cap [-n,n]) = 0$$

که بیان می‌کند J دارای چگالی صفر است. اگر $n > l_k$ و $n \notin J$ آنگاه $n \notin J_{k+1}$. پس $x_{|n|} < \frac{1}{k+1}$ یعنی برای $n \notin J$ داریم $\lim_{|n|\to\infty} x_n = 0$.

برعکس، فرض کنید زیرمجموعهٔ J از چگالی صفر وجود دارد که برای $n \notin J$ ، $\lim_{|n|\to\infty} x_n = 0$ برقرار است. $K > 0$ را چنان بگیرید که برای هر $i \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $x_i \leq K$. برای $\varepsilon > 0$ می‌توان N_ε را چنان یافت که $|n| \geq N_\varepsilon$ و $n \notin J$ نتیجه دهد $x_n < \varepsilon$. افزون بر آن N_ε را چنان میگیریم که $\frac{1}{2n+1}Card(J \cap [-n,n]) < \varepsilon$ برای $n \geq N_\varepsilon$. برای $|n| \geq N_\varepsilon$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} x_i &= \frac{1}{2n+1}\Big(\sum_{i\in J\cap[-n,n]} x_i + \sum_{i\notin J\cap[-n,n]} x_i\Big) \\ &\leq \frac{K}{2n+1} Card(J \cap [-n,n]) + \varepsilon < (K+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

گزارهٔ ۶ ردهٔ بزرگی از وابرسانی‌هایی را که در شرط‌های سایه‌نگار حد متوسط صدق می‌کنند، ارائه می‌دهد.

گزارهٔ ۶: *فرض کنید Λ یک مجموعهٔ f-ناوردای موضعی بیشین باشد. اگر Λ یک مجموعهٔ ویژه[1] برای f باشد، آن‌گاه Λ سایه‌نگار حد متوسط است.*

اثبات: فرض کنید $\xi = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \Lambda$ شبه مدار حد متوسط باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} w_i = 0$$

1. Specific set

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

که $w_i = d(f(x_i), x_{i+1})$. باتوجه به لم ۵، یک زیرمجموعهٔ $J \subset \mathbb{Z}$ از چگالی صفر وجود دارد که $\lim_{|n|\to\infty} w_n = 0$ وقتی $n \notin J$. با استقرا دنبالهٔ اکیدا صعودی $\{M_i\} \subseteq \mathbb{R}$ و دنباله $\{z_i\} \subseteq \Lambda$ پیدا می‌کنیم، چنان‌که برای هر n و هر $1 \le k < n$ ، داشته باشیم:

$$d(f^j(z_n), x_j) < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n},$$

$$j \in \{M_k, \dots, M_{k+1} - 1\} \cup \{-M_{k+1} + 1, \dots, -M_k\} \backslash \tilde{J}$$

برای زیرمجموعه $\tilde{J} \subseteq \mathbb{Z}$ از چگالی صفر، $z_i \in \Lambda$ را یک نقطهٔ دلخواه و $M_1 = q_1 2^{q_1+1} M + 1$ بگیرید که M یک عدد وابسته به $\varepsilon = \frac{1}{2^{q_1+1}}$ در خاصیت ویژه برای f است و $q \in \mathbb{N}$.

می‌توانیم $\delta > 0$ ، M و یک عدد طبیعی $q_1 \ge 3$ را چنان گرفت که:

۱. هر δ–شبه مدار $\{z_1, \dots, z_{M2^{q_1+1}}\}$ با طول کم‌تر از $M2^{q_1+1}$ به‌وسیلهٔ یک مدار واقعی $\{z_1, \dots, f^{M2^{q_1+1}-1}(z_1)\}$، $\frac{1}{2^{q_1+1}}$–سایه‌دار است.

۲. $w_i < \delta$ برای $i \in [M_1, \infty) \cup (-\infty, -M_1] \backslash J$

۳. $B\left(z_1, \frac{1}{2^{q_1+1}}\right) = \{x | d(x, z_1) \le \frac{1}{2^{q_1+1}}\} \subseteq \Lambda$

بعد $M_2 > M_1$ ، $z_2 \in \Lambda$ و $\tilde{J}$ با چگالی صفر را چنان می‌یابیم که $d(f^j(z_2), x_j) < \frac{1}{2^2}$ ، $j \in \{M_1, \dots, M_2 - 1\} \backslash \tilde{J} \cup \{-M_2 + 1, \dots, -M_1\} \backslash \tilde{J}$ و دنباله‌های خواسته شده $\{z_i\}$ و $\{M_i\}$ را می‌سازیم. برای $A, B \subseteq \mathbb{Z}$، تعریف می‌کنیم $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

بگیرید $\acute{J} = (\{-M, -M+1, \dots, M\} + J) \cup (\{\mp M2^{q_1+1}, \mp 2M2^{q_1+1}, \dots\} + \{\mp 1, \mp 2, \dots, \mp M\})$

$\tilde{J} \subseteq \mathbb{Z}$ را چنان می‌گیریم که

۱. $\tilde{J} \cap [-M_1, M_1] = \{-M_1, M_1\}$؛

۲. $\tilde{J} \cap (M_1, M_2] = \acute{J} \cap (M_1, M_2] \cup \{M_2\}$؛

۳. $\tilde{J} \cap [-M_2, -M_1) = \acute{J} \cap (-M_2, -M_1] \cup \{-M_2\}$ ؛

۴. $\emptyset \ne \{M_1, \dots, M_2 - 1\} \backslash \tilde{J} = \bigcup_{i=2}^{r} \{a_i, \dots, b_i\}$؛

۵. $\emptyset \ne \{-M_2 + 1, \dots, -M_1\} \backslash \tilde{J} = \bigcup_{i=2}^{r} \{-b_i, \dots, -a_i\}$؛

۶. $0 \le b_i - a_i < M2^{q_1+1}, a_i - b_{i-1} \ge M$؛

توجه داشته باشید که می‌توانیم M_2 را به‌اندازه کافی بزرگ بگیریم که (۴) و (۵) برقرار باشد. برای هر $i \in \{2, \dots, r\}$ $\mathrm{y}_i, y_{-i} \in \Lambda$ را چنان بگیرید که $f^{a_i}(\mathrm{y}_i) = x_{a_i}, f^{-b_i}(y_{-i}) = x_{-b_i}$. هم‌چنین قرار دهید $a_1 = -M_1 + 1$ و $b_1 = M_1 - 1$. تکه‌های متفاوتی از مسیرهای

$$\{f^{-b_r}(y_{-r}), \dots, f^{-a_r}(y_{-r})\}, \dots, \{f^{-b_2}(y_{-2}), \dots, f^{-a_2}(y_{-2})\},$$

$$\{f^{a_1}(z_1), \dots, z_1, \dots, f^{b_1}(z_1)\}, \{f^{a_2}(y_2), \dots, f^{b_2}(y_2)\}, \dots, \{f^{a_r}(y_r), \dots, f^{b_r}(y_r)\}.$$

را در نظر بگیرید. با توجه به خاصیت ویژه، یک نقطهٔ z_2 وجود دارد که مسیر z_1 ، مسیرهای بالا را $\frac{1}{2^{q_1+1}}$–سایه‌دار کرده است. از سوی دیگر برای هر $i \in \{2, \dots, r\}$ ، $\{x_{a_i}, x_{a_i+1}, \dots, x_{b_i}\}$ و $\{x_{-b_i}, x_{-b_i+1}, \dots, x_{-a_i}\}$ برای f، δ–شبه مدار با طول حداکثر $M2^{q_1+1}$ هستند.

این δ–شبه مدارها به‌وسیلهٔ $\{x_{a_i}, f(x_{a_i}), f^2(x_{a_i}), \dots, f^{b_i - a_i}(x_{a_i})\}$ و $\{x_{-b_i}, f(x_{-b_i}), \dots, f^{b_i - a_i}(x_{-b_i})\}$، $\frac{1}{2^{q_1+1}}$– سایه‌دار است ولی

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

$$\{x_{a_i}, f(x_{a_i}), f^2(x_{a_i}), \dots, f^{b_i-a_i}(x_{a_i})\} = \{f^{a_i}(y_i), f^{a_i+1}(y_i), \dots, f^{b_i}(y_i)\}$$

و

$$\{x_{-b_i}, f(x_{-b_i}), \dots, f^{b_i-a_i}(x_{-b_i})\} = \{f^{-b_i}(y_{-i}), f^{-b_i+1}(y_{-i}), \dots, f^{-a_i}(y_{-i})\}.$$

یعنی برای هر $j \in \{M_1, \dots, M_2-1\} \backslash \tilde{J} \cup \{-M_2+1, \dots, -M_1\} \backslash \tilde{J}$ ، $d(f^j(z_2), x_j) < \frac{1}{2^2}$ برقرار است. با گرفتن یک زیردنبالهٔ همگرای $\{z_i\} \subseteq \Lambda$ اثبات کامل است.

مثال ۷ نشان می‌دهد که سایه‌نگار حد متوسط، خاصیت سایه‌نگار را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۷. خودسانی چنبره‌ای[1]: فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

و نگاشت خطی L_A را درنظر بگیرید،

$$L_A: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, L_A(x) = Ax.$$

آن‌گاه خودسانی تورال $f: \mathbb{T}^4 \longrightarrow \mathbb{T}^4$ که به‌صورت پایین تعریف می‌شود، یک وابرسانی بر ۴-چنبره[2] است که آناسوف نیست.

$$f([Ax]) = [Ax] \ , \qquad [x] = \{y | x-y \in \mathbb{Z}^4\}$$

افزون بر آن می‌توان دید f دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط است. در واقع چند جمله‌ای مشخصهٔ A برابر $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ است، که بر $\mathbb{Q}$ نافروکاستنی[3] است. هم‌چنین مقدارهای ویژهٔ A برابر است با:

$$x_1 = \sqrt{2} - 1 + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}, \qquad x_2 = \sqrt{2} - 1 - i\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$
$$x_3 = -\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2}+2}, \qquad x_4 = -\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

بنابراین $P(x)$ صفری که ریشهٔ واحد باشد، ندارد. پس، f ارگودیک بوده است و در نتیجه دارای خاصیت ویژه است و بنابر گزارهٔ ۶ دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط است. از سوی دیگر می‌توان دید $|x_1| = 1 = |x_2|$ و بنابراین $\mathbb{T}^4$ برای f هذلولوی نیست. می‌دانیم اگر یک وابرسانی خطی بر $\mathbb{R}^n$ دارای خاصیت سایه‌نگاری باشد آن‌گاه آناسوف است ([۸] را ببینید). این واقعیت نشان می‌دهد که f دارای خاصیت سایه‌نگاری روی $\mathbb{T}^4$ نیست.

اثبات قضیهٔ A

فرض کنید M و f همانند قبل باشند. ابتدا نشان می‌دهیم اگر f دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط بر یک مجموعه بستهٔ f-ناوردای Λ باشد، آن‌گاه Λ تراگذر زنجیری است. بااستفاده از تراگذر زنجیری و خاصیت سایه‌نگار حد متوسط، می‌توان ثابت کرد که Λ تراگذر است. جزئیات بحث در ادامه ارائه می‌شود.

1. Toral Automorphisms
2. 4-torus
3. Irreducible

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

گزارهٔ ۸: *فرض کنید Λ یک مجموعه موضعی بیشین بستهٔ f-ناوردا باشد. اگر Λ سایه‌پذیر حد متوسط باشد، آن‌گاه Λ برای f تراگذر زنجیری است.*

اثبات: فرض کنید Λ در یک همسایگی فشردهٔ U موضعی بیشین است. هم‌چنین $x, y \in \Lambda$ و ε داده شده است. می‌خواهیم یک ε-شبه مدار از x به y پیدا کنیم. δ را چنان می‌گیریم که $B(\Lambda, \delta) \subset U$ و از $d(x, y) < \delta$ نتیجه دهد: $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. ابتدا یک شبه مدار حد متوسط که شامل مدارهای x و y باشد می‌سازیم. آن‌گاه با خاصیت سایه‌نگار حد متوسط یک مدار واقعی نزدیک شبه مدار حد متوسط، پیدا می‌کنیم و در پایان با استفاده از مدار واقعی، x را به y وصل می‌کنیم. در واقع هنگامی که یک شبه مدار حد متوسط را که شامل مدارهای x و y است، مدار نقطه‌های سایه‌نگار حد متوسط، به نامتناهی از مسیرهای x و y، ε-نزدیک هستند که کمک می‌کند یک ε-شبه مدار از x به y بسازیم. بگذارید جزئیات را ارائه دهیم. بگیرید:

$$\mathrm{x}_{-3} = \mathrm{y}\,, \mathrm{x}_{-2} = \mathrm{x}\,, \mathrm{x}_{-1} = \mathrm{y}\,, \mathrm{x}_0 = \mathrm{x}\,, \mathrm{x}_1 = \mathrm{y}\,, \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}\,, \mathrm{x}_3 = \mathrm{y}$$

$$\mathrm{x}_{-7} = \mathrm{y}, \mathrm{x}_{-6} = \mathrm{f(y)}, \mathrm{x}_{-5} = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}), \mathrm{x}_{-4} = \mathrm{x}, \mathrm{x}_4 = \mathrm{x}, \mathrm{x}_5 = \mathrm{f(x)}, \mathrm{x}_6 = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}), \mathrm{x}_7 = \mathrm{y}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{x}_{2^k} = \mathrm{x}, \mathrm{x}_{2^k+1} = \mathrm{f(x)}, \dots, \mathrm{f}^{2^{k-1}-1}(\mathrm{x}), \mathrm{f}^{-2^{k-1}+1}(\mathrm{y}), \dots, \mathrm{x}_{2^{k+1}-2} = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}), \mathrm{x}_{2^{k+1}-1} = \mathrm{y}$$

$$\mathrm{x}_{-2^{k+1}+1} = \mathrm{y}, \mathrm{f(y)}, \dots, \mathrm{f}^{2^{k-1}-1}(\mathrm{y}), \mathrm{f}^{-2^{k-1}+1}(\mathrm{x}), \dots, \mathrm{x}_{-2^k-1} = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}), \mathrm{x}_{-2^k} = \mathrm{x}$$

آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \mathrm{d}(\mathrm{f}(\mathrm{x_i}), \mathrm{x_{i+1}}) = 0$$

و $\xi = \{x_i\} \subseteq \Lambda$ یک شبه مدار حد متوسط برای f است. بنابراین می‌توان یک نقطه $z \in M$ پیدا کرد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \mathrm{d}(\mathrm{f^i}(\mathrm{z}), \mathrm{x_i}) = 0$$

چون شبه مدار حد متوسط ξ شامل مدارهای x و y است، می‌توان دنباله $\{x_{n_i}\}$ از مدارهای x و y گرفت که

$$d(f^{n_i}(z), x_{n_i}) < \delta.$$

اکنون می‌توانیم یک ε-شبه مدار از x به y بسازیم. بگیرید $n_r < n_s$ چنان‌که برای عددهای صحیح r_{n_i} و s_{n_i} داشته باشیم:

$$\mathrm{x}_{n_r} = \mathrm{f}^{r_{n_i}}(\mathrm{x}) \qquad \text{و} \qquad \mathrm{x}_{n_s} = \mathrm{f}^{-s_{n_i}}(\mathrm{y})$$

آن‌گاه $\{\mathrm{x}, \mathrm{f(x)}, \dots, \mathrm{f}^{r_{n_i}}(\mathrm{x}), \mathrm{f}^{n_r+1}(\mathrm{z}), \dots, \mathrm{f}^{s_n-1}(\mathrm{z}), \mathrm{f}^{-s_{n_i}}(\mathrm{y}), \mathrm{f}^{-s_{n_i}+1}(\mathrm{y}), \dots, \mathrm{y}\}$ یک ε-شبه مدار از x به y است.

فرض کنید $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2, \dots\}$، یک زیرمجموعه S از $\mathbb{N}_0$، متصل شده[1] نامیده می‌شود اگر یک عدد طبیعی l باشد که $(S \cup \{0\}) + \{0,1,2, \dots, l\} = \mathbb{N}_0$. به بیان دیگر $\mathbb{N}_0 \setminus S$ شامل بازه‌های به دلخواه بزرگ از اعداد صحیح نباشد، یعنی شکاف‌های S کراندار است.

لم ۹: *نقطهٔ $x \in M$ برای f کمینه است، اگر و تنها اگر برای هر همسایگی باز U از x، مجموعهٔ زمان‌های بازگشت $\{n \in \mathbb{N}: f^n(x) \in U\}$، متصل شده باشد ([۹] را ببینید).*

1. Syndetic

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

گزارهٔ ۱۰: *فرض کنید f بر مجموعهٔ بستهٔ f-ناوردای Λ دارای خاصیت سایه‌نگار حدمتوسط و نقطه‌های کمینهٔ f چگال باشد، آن‌گاه f تراگذر است.*

اثبات: فرض کنید U و V دو همسایگی باز در M باشند و دو مجموعهٔ باز $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ و $\varepsilon > 0$ را چنان بگیرید که $\widetilde{U} \subset U$، $\widetilde{V} \subset V$، $d(\widetilde{U}, U^c) < \varepsilon$ و $d(\widetilde{V}, V^c) > \varepsilon$ که $U^c = M - U$, $V^c = M - V$. چون نقطه‌های کمینه چگال است، دو نقطهٔ کمینه x و y به‌ترتیب درون $\widetilde{U}$ و $\widetilde{V}$ وجود دارد. مانند اثبات گزارهٔ ۸، برای f شبه مدار متوسط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathrm{x}_{-3} = \mathrm{y}\,, \mathrm{x}_{-2} = \mathrm{x}\,, \mathrm{x}_{-1} = \mathrm{y}\,, \mathrm{x}_0 = \mathrm{x}\,, \mathrm{x}_1 = \mathrm{y}\,, \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}\,, \mathrm{x}_3 = \mathrm{y}$$

$$\mathrm{x}_{-7} = \mathrm{y}, \mathrm{x}_{-6} = \mathrm{f}(\mathrm{y}), \mathrm{x}_{-5} = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}), \mathrm{x}_{-4} = \mathrm{x}, \mathrm{x}_4 = \mathrm{x}, \mathrm{x}_5 = \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{x}_6 = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}), \mathrm{x}_7 = \mathrm{y}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{x}_{2^k} = \mathrm{x}, \mathrm{x}_{2^k+1} = \mathrm{f}(\mathrm{x}), \dots, \mathrm{f}^{2^{k-1}-1}(\mathrm{x}), \mathrm{f}^{-2^{k-1}+1}(\mathrm{y}), \dots, \mathrm{x}_{2^{k+1}-2} = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}), \mathrm{x}_{2^{k+1}-1} = \mathrm{y}$$

$$\mathrm{x}_{-2^{k+1}+1} = \mathrm{y}, \mathrm{f}(\mathrm{y}), \dots, \mathrm{f}^{2^{k-1}-1}(\mathrm{y}), \mathrm{f}^{-2^{k-1}+1}(\mathrm{x}), \dots, \mathrm{x}_{-2^k-1} = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}), \mathrm{x}_{-2^k} = \mathrm{x}$$

آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} d(f(x_i), x_{i+1}) = 0$$

و $\xi = \{x_i\} \subseteq \Lambda$ یک شبه مدار حد متوسط برای f است. فرض کنید z یک نقطهٔ سایه‌نگار حد متوسط ξ باشد. بنابر لم ۹، $\widetilde{U}_r = \{i \in \mathbb{N}: f^i(x) \in \widetilde{U}\}$ و $\widetilde{V}_r = \{i \in \mathbb{N}: f^i(x) \in \widetilde{V}$ متصل شده است. اکنون ثابت می‌کنیم مدار مثبت z ، U و V را قطع می‌کند و بنابراین تراگذراست. $\delta > 0$ را چنان می‌گیریم که برای هر $x, y \in \Lambda$ و هر $-l \le n \le l$ ، $d(x,y) < \delta$ نتیجه دهد $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ ، که l کران بالای شکاف‌های دو مجموعهٔ $\widetilde{U}_r$ و $\widetilde{V}_r$ در تعریف مجموعهٔ متصل شده است. مانند اثبات گزارهٔ ۸، می‌توان $l_1 > 0$ را چنان یافت که $d(x_{l_1}, f^{l_1}(z)) < \delta$ و $x_{l_1+i} = f^{k+i}(x)$ ، برای یک $i \in \{0,1,2,\dots,l\}$ و $k \in \mathbb{N}$ برقرار شود. چون l یک کران بالای شکاف‌های $\widetilde{U}_r$ است، $l_2 \in \{l_1, l_1+1, \dots, l_1+l\}$ هست که $f^{l_2}(z) \in U$. به‌طور مشابه می‌توان $l_3 > l_2$ را چنان یافت که $d(x_{l_3}, f^{l_3}(z)) < \delta$ و $x_{l_3+i} = f^{k'+i}(x)$ ، برای یک $i \in \{0,1,2,\dots,l\}$ و $k' \in \mathbb{N}$ برقرار باشد. از این‌که l یک کران بالا برای شکاف‌های $\widetilde{V}_r$ است، $l_4 \in \{l_3, l_3+1, \dots, l_3+l\}$ هست که $f^{l_4}(z) \in V$. این اثبات را کامل می‌کند.

م.لی[1] [۱۰] اخیرا ثابت کرده است برای مجموعهٔ تراگذر Λ ، اگر f بر Λ سایه‌نگار متوسط C^1-پایدار باشد، آن‌گاه Λ تجزیهٔ مغلوب می‌پذیرد. هم‌چنین د.یانگ[2] [۱۱] ثابت کرده است اگر Λ یک مجموعهٔ تراگذر سایه‌نگار C^1-پایدار ضعیف باشد آن‌گاه، Λ یا گودال[3] است یا چشمه[4]، یا تجزیهٔ مغلوب می‌پذیرد.

پایان اثبات قضیهٔ A: تاکنون ثابت کرده‌ایم که اگر f بر یک مجموعهٔ بستهٔ f-ناوردای Λ خاصیت سایه‌نگار حد متوسط داشته باشد و نقطه‌های کمینهٔ f چگال باشد، آن‌گاه Λ تراگذر است. در [11] به‌طور اساسی با فرض‌ها و نتیجه‌های گزارهٔ A ثابت شده است که Λ یک تجزیهٔ مغلوب می‌پذیرد. بگذارید تعریف تقریباً گودال و تقریباً چشمه را

1. M. Lee
2. D. Yang
3. Sink
4. Source

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]

بیاوریم. برای یک نقطهٔ متناوب p برای f، گوییم f تقریباً گودال است اگر $Df^{\pi(p)}$ دارای مقدارهای ویژهٔ $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ باشد که $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots \le |\lambda_k|$ و $|\lambda_k| = 1$.

لم ۱۱. (**لم فِرنکس**[1]): *فرض کنید $U(f)$ یک C^1- همسایگی f باشد. آن‌گاه $\varepsilon > 0$ و یک C^1-همسایگی $U_0(f) \subset U(f)$ از f وجود دارد که، برای هر $g \in U_0(f)$ ، یک مجموعهٔ متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ، یک همسایگی U از $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ و یک نگاشت خطی $L_i: T_{x_i}M \longrightarrow T_{g(x_i)}M$ که برای هر $1 \le i \le N$ در $\|L_i - D_{x_i}g\| \le \varepsilon$ صدق می‌کنند، $\hat{g} \in U(f)$ وجود دارد که $\hat{g}(x) = g(x)$ اگر $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \cup (M \backslash U)$ و $D_{x_i}\hat{g} = L_i$ برای $1 \le i \le N$.*

یادآوری ۱۲: *به سادگی می‌توان دید f دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط است اگر و تنها اگر برای دست‌کم یک عدد صحیح k ، f^k دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط باشد* ([۵]، [۶] را ببینید.)

گزاره $\mathbf{A}$ که در [۱۲] برای سایه‌نگار ضعیف اثبات شده را برای سایه‌نگار حد متوسط اثبات می‌کنیم.

گزارهٔ $\mathbf{A}$: *فرض کنید Λ سایه‌پذیر حد متوسط C^1-پایدار باشد، آنگاه یک همسایگی $U(f)$ از f و یک همسایگی U از Λ وجود دارد که Λ_g برای هر $g \in U(f)$ ، شامل هیچ تقریباً گودال یا تقریباً چشمه ای نیست.*

اثبات: فرض کنید $U_0(f) \subset U(f)$ همسایگی به‌دست آمده در لم فِرنکس باشد. ابتدا فرض کنید $g \in U_0(f)$ وجود دارد که تقریباً دارای گودال $p \in P(g|_{\Lambda_g})$ است و به تناقض می‌رسیم (حالت دیگر مشابه است).در این حالت $D_p g^{\pi(p)}$ دارای مقدار ویژهٔ λ با قدر مطلق یک است($\pi(p)$ دوره تناوب کمینهٔ P است) و مقدارهای ویژه دیگرکم‌تر از یک است. آن‌گاه $T_pM = E_p^s \oplus E_p^c$، که E_p^s و E_p^c، زیرفضاهای $D_p g^{\pi(p)}$–ناوردای متناظرِ مقدارهای ویژهٔ $D_p g^{\pi(p)}$ با قدرمطلق کم‌تر از یک و برابر یک هستند.

با توجه به لم فرنکس، می‌توانیم وابرسانی $\tilde{g} \in U_0(f)$ ، $m > 0$ و $\delta > 0$ را چنان بیابیم که

$$\tilde{g}^{m\pi(p)}|_{exp_p E^c(p,\delta)} = id|_{exp_p E^c(p,\delta)}$$

که $E^c(p,\delta) = E_p^c \cap T_pM(\delta)$. توجه داشته باشید که می‌توانیم δ را چنان می‌گیریم که $E^c(p,\delta) \subset \Lambda_{\tilde{g}}$. چون $\tilde{g}$ دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط است، بنابر یادآوری ۳.۵، $\tilde{g}^{m\pi(p)}$ دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط است. برای سادگی فرض کنید $g_1 = \tilde{g}^{m\pi(p)}$. نقطه $y \in E^c(p,\delta)$ را درنظر بگیرید. مانند اثبات گزارهٔ ۸، یک شبه مدار حد متوسط بدین‌صورت می‌سازیم:

$$x_{-3} = y\,, x_{-2} = p\,, x_{-1} = y\,, x_0 = p\,, x_1 = y\,, x_2 = p\,, x_3 = y$$
$$x_{-7} = y, x_{-6} = g_1(y), x_{-5} = {g_1}^{-1}(p), x_{-4} = p, x_4 = p, x_5 = g_1(p), x_6 = {g_1}^{-1}(y), x_7 = y$$
$$\vdots$$
$$x_{2^k} = p, x_{2^k+1} = g_1(p), \dots, {g_1}^{2^{k-1}-1}(p), {g_1}^{-2^{k-1}+1}(y), \dots, x_{2^{k+1}-2} = {g_1}^{-1}(y), x_{2^{k+1}-1} = y$$
$$x_{-2^{k+1}+1} = y, g_1(y), \dots, {g_1}^{2^{k-1}-1}(y), {g_1}^{-2^{k-1}+1}(p), \dots, x_{-2^k-1} = {g_1}^{-1}(p), x_{-2^k} = p.$$

آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} d(g_1(x_i), x_{i+1}) = 0,$$

1. Franks' lemma

و $\xi = \{x_i\} \subseteq \Lambda_{g_1}$ یک شبه مدار حد متوسط برای g_1 است. بنابراین می‌توان نقطهٔ $z \in M$ را چنان یافت که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} d(g_1^i(z), x_i) = 0$$

چون شبه مدار حد متوسط ξ شامل مدارهای p و y است، می‌توانیم یک دنبالهٔ $\{x_{n_i}\}$ از مدارهای p و y را چنان گرفت که

$$d({g_1}^{n_i}(z), x_{n_i}) < d(y,p)/10$$

از سوی دیگر، اگر نقطهٔ سایه‌نگار حد متوسط z در $E^c(p,\delta)$ باشد، آشکارا نابرابری بالا برقرار نیست. بنابراین g_1 دارای خاصیت سایه‌نگار حد متوسط نیست که یک تناقض است.

گفتنی است که اگر f یک خودسانی روی $\mathbb{T}^2$ باشد که خاصیت سایه‌نگار داشته باشد آن‌گاه $\mathbb{T}^2$ سایه‌نگار حد متوسط C^1-پایداراست و تجزیهٔ مغلوب می‌پذیرد.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم مقاله برای نظرهای ارزشمندشان سپاسگزاری می‌کنم.

منابع

1. Denker M., Girllenberger C., Sigmund K., "Ergodic Theory on Compact Spaces", Lecture Note in Math. 527 (Springer Verlag, Berlin (1976).
2. Pilyugin S. Yu., "Shadowing in Dynamical Systems", Lecture Notes in Math. 1706 (SpringerVerlag, Berlin (1999).
3. Pilyugin S. Yu., "Sets of dynamical systems with various limit shadowing properties", J. Dynam, Diff. Eq. 19 (2007) 747-775.
4. Sakai K., "Diffeomorphisms with the average-shadowing property on two-dimensional closed manifolds", Rocky Mountain J.Math. 30 (2000) 1129-1137.
5. Gu R., "The asymptotic average shadowing property and transitivity", Nonlinear Anal. (6) 158 (2007) 1680-1689.
6. Kulczycki M.t, Oprocha P., "Exploring the asymptotic average shadowing property", to appear in J. Difference Eq. Appl.
7. Bowen R., "Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms", Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), 377-397.
8. Pilyugin S. Yu, Rodionova A. A., Sakai K., "Orbital and weak shadowing in dynamical systems", Disc. Contin. Dynam, Syst. (2003) 287-308.
9. Downarowicz T., "Survey of odometers and Toeplitz flows", Algebraice and topological dynamics, Contemp, Math. 385 (Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005).

10. Lee M., Wen X., "Diffeomorphisms with C1-stably average shadowing", Acta Mathematica Sinica, English Series Jan.29 (2012) 85-92.

11. "Dawei Yang. Stably weak shadowing transitive sets and dominated splitting", Proc. Amer, Math., Soc. 139 (2011) 2747-2751.

12. Gan S., Sakai K., Wen L., "C1-stably weak shadowing homoclinic classes admit dominated splitting", Disc. Cont. Dynam. Syst., 27 (2008) 945-976.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.12.3]

[DOI: 10.52547/mmr.6.2.157]